

حل تحلیلی معادلات امواج در جریان لزج دارای حباب گازی، با در نظر گرفتن انتقال حرارت

حسین جعفری^۲

دانشکده ریاضی

دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲)

نعمت‌اله کدخدا^۱

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه

دانشگاه بزرگمهر قائنات، قائن، ایران

چکیده

ابتداء، هدف این مقاله به دست آوردن معادلات غیرخطی برای توصیف امواج فشار در یک جریان لزج حاوی حباب‌های گازی می‌باشد. بدین منظور، معادلات غیرخطی مرتبه چهارم و بعضی از موارد خاص آن‌ها برای توصیف تغییرات فشار امواج در ترکیب حباب‌های گاز در مایع در نظر گرفته شده است. سپس، با در نظر گرفتن تاثیر لزجت و وجود انتقال حرارت، یک رابطه دیفرانسیلی بین فشار ترکیب مایع و گاز نسبت به تغییرات شعاع حباب‌های گازی به دست آمده است. نشان داده شد که معادلات برگرز، کا دی وی و کا دی وی- برگرز حالت‌های خاصی برای توصیف فشار امواج در این مورد می‌باشند. همچنین، یک روش بسط $\frac{G'}{G}$ معرفی شد که به کمک آن می‌توان جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی را بدون نیاز به شرایط اولیه و مرزی به دست آورد. در این روش، با انتخاب ثابت‌های خاص در جواب‌های به دست آمده، جواب‌های بیشتری از معادلات امواج در جریان‌های لزج قابل محاسبه می‌باشد. این ویژگی‌ها برتری روش معرفی شده را نسبت به سایر روش‌ها نشان می‌دهد. علاوه بر این، جواب‌های دقیق این معادلات که کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارند، به کمک روش بسط $\frac{G'}{G}$ به دست آمده‌اند.

واژه‌های کلیدی: معادلات غیرخطی، انتقال حرارت، ویسکوزیته، روش بسط $\frac{G'}{G}$ ، حباب‌های گاز

Analytical Solution of Wave Equations in Viscous Flow with Gas Bubbles and Heat Transfer Considerations

N. Kadhoda

Department of Mathematics

Faculty of Basic Sciences

Bozorgmehr University Of Qaenat, Qaen, Iran

H. Jafari

Department of Mathematics

University of Mazandaran,

Babolsar, Iran

(Received: 05/June/2018 ; Accepted: 02/January/2019)

ABSTRACT

The first purpose of this paper was to obtain non-linear equations for describing pressure waves in a liquid with gas bubbles. For this purpose, non-linear equations of fourth order and some of their special cases for describing pressure waves in a mixture of fluid and gas were considered. Then, considering the influence of heat transfer and viscosity in fluid, a differential relation between pressure and perturbation radius of gas bubbles is obtained. It is shown that the Burgers, the KdV and KdV- Burger' equations are special cases for describing pressure waves. Also, we introduced a $\frac{G'}{G}$ -expansion method, which can obtain exact solutions of non-linear differential equations without requiring the boundary and initial conditions. In this method, by choosing special constants in the obtained solutions, more solutions of these equations can be obtained. These features exhibit the superiority of the introduced approach. compared to the other methods. Furthermore, exact solutions of these equations are obtained using $\frac{G'}{G}$ -expansion method, which has many applications in science and engineering.

Keywords: Non-linear Equations, Heat Transfer, Viscosity, $\frac{G'}{G}$ Expansion Method, Gas Bubbles

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): kadhoda@buqaen.ac.ir

۲- استادیار: jafari@umz.ac.ir

فهرست علائم و اختصارات

| | |
|-------------------------------------|-------|
| گاز | g |
| مایع | l |
| جرم (Kg) | M |
| تعداد حباب‌ها در واحد جرم | N |
| عدد ناسلت | Nu |
| فشار ترکیب گاز-مایع (Pa) | P |
| فشار ترکیب (Pa) در $t = 0$ | P_0 |
| فشار گاز در یک حباب (Pa) | P_g |
| شعاع حباب (m) | r |
| شعاع حباب در حالت اولیه (m) | R_0 |
| دمای ترکیب (K) در $t = 0$ | T_0 |
| دمای گاز (K) | T_g |
| دمای مایع (K) | T_l |
| حجم مشخصی از گاز در ترکیب (m^3) | V |

علائم یونانی

| | |
|-------------------------------------|----------|
| پارامتر انحراف کوچک شعاع حباب | δ |
| ضریب لزجت سینماتیکی مایع | ν |
| چگالی گاز (kg / m^3) | ρ_g |
| چگالی مایع (kg / m^3) | ρ_l |
| ضریب هدایت حرارتی گاز ($W / m.K$) | χ_g |

۱- مقدمه

بررسی چگونگی رفتار مایعات دارای حباب‌های گازی از اهمیت زیادی برخوردار است. مایعات دارای حباب‌های گازی دارای کاربردهای زیادی در صنعت می‌باشند [۱]. ایجاد حباب‌های گازی می‌تواند در اثر عوامل مختلف از جمله تماس یک ماده نظیر فلز مذاب با مایعات رخ دهد. در این صورت مقادیر فشار و دما در مایع با تغییر ناگهانی همراه است. گاهی این تغییرات ناگهانی می‌تواند باعث به وجود آمدن پدیده‌ای به نام انفجار بخار^۱ گردد [۲]. معادله معروف کا دی وی^۲ که برای توصیف امواج غیرخطی در

مایعات دارای حباب‌های گازی استفاده می‌شود [۳]. برای اولین بار توسط ون وینگاردن^۳ به دست آمد [۴]. در ادامه نیز ناکوریاکف^۴ و همکارانش معادله کا دی وی- برگرز^۵ را برای توصیف فشار امواج در مایعات حباب‌دار ارائه نمودند [۵]. همچنین، انتشار یک موج شبه همدمما در یک ترکیب گاز- مایع، توسط اوگیان^۶ مورد بررسی قرار گرفت [۶].

محققان زیادی فرآیندهای غیرخطی در یک مایع با حباب‌های گازدار را با استفاده از روش‌های عددی مورد مطالعه قرار دادند. برای مثال، مسئله انتقال گرما بین یک حباب گازی و یک مایع و مقدار تلاطم امواج در یک مایع با حباب‌های گازی توسط نیگماتولین^۷ و خابیف^۸ مورد بررسی قرار گرفت [۷-۸]. ریابوف^۹ به مطالعه چگونگی فشار امواج در مایعات با حباب‌های گازی با استفاده از معادلات کودریاشوف و سینل‌چیکوف^{۱۰} پرداخت [۹]. کودریاشوف و سینل‌چیکوف با در نظر گرفتن انتقال حرارت در یک سیال، به بررسی فشار امواج و امواج غیرخطی در مایعات با حباب‌های گازی پرداختند [۱۱-۱۲]. همچنین، کودریاشوف و سینل به کمک جواب‌های تحلیلی معادله رایلی حباب‌های پر شده با گاز را مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. کودریاشوف و کلوترز^{۱۱} نیز به بررسی دینامیک حباب‌ها پرداخته و اثر میدان مغناطیسی بر روی آن‌ها را مورد مطالعه قرار دادند [۱۳-۱۴]. فوستر^{۱۲} اثر انتقال جرم را روی روی انتشار امواج در مایعات حباب‌دار بررسی نمود [۱۵]. علاوه بر این، جعفری و همکارانش به روش عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی نانوسیال را در با استفاده از روش بولتزمن به صورت عددی مورد بررسی قرار دادند [۱۶].

هدف این پژوهش بررسی معادلات غیرخطی برای توصیف فشار امواج در یک مایع لزج (چسبناک) حاوی

3- Van Wijngaarden
 4- Nakoryakov
 5- KdV-Burgures
 6- Oganyan
 7- Nigmatulin
 8- Khabeev
 9- Ryabov
 10- Kudryashov and Sinelshchikov
 11- Klotz.
 12- Fuster

1- Vapor Explosion
 2- Korteweg-de Vries

دستگاه معادلات برای توصیف حباب گازی با استفاده از معادله رایلی^۱ به صورت زیر قابل بیان می‌باشند [۲۱-۱۷]:

$$\rho_l \left(r_{tt} + \frac{3}{2} r_t^2 + \frac{4\nu}{3r} r_t \right) = P_g - P, \quad (2)$$

$$P_{g,t} + \frac{3nP_g}{r} r_t + \frac{3\chi_g Nu(n-1)}{2r^2} (T_g - T_l) = 0, \quad (3)$$

$$T_g = \frac{T_0 P_g}{P_{g,0}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^3, \quad (4)$$

که در آن، $P(x,t)$ فشار ترکیب گاز مایع، P_g فشار گاز در یک حباب، T_l و T_g به ترتیب دماهای گاز و مایع، χ_g ضریب هدایت حرارتی گاز، Nu عدد ناسلت^۲ و ν لزجت سینماتیکی مایع است.

چگالی ترکیب مایع-گاز از رابطه (۵) محاسبه می‌گردد [۵].

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-M}{\rho_l} + V \rightarrow \rho = \frac{\rho_l}{1-M + V \rho_l} \quad (5)$$

با در نظر گرفتن تغییر کوچک در شعاع حباب نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} r(x,t) &= r_0 + \delta(x,t), \\ r_0 &= const, \\ \|\delta\| &\ll r_0, \\ r(x,0) &= r_0. \end{aligned} \quad (6)$$

با فرض این‌که دمای مایع ثابت و برابر با مقدار اولیه به صورت رابطه (۷) باشد، در لحظه اولیه ($t=t_0$)، روابط (۸) برقرار می‌باشد.

$$T_l = T \Big|_{r=0} = T_0 \quad (7)$$

$$T_0 = const.$$

$$\begin{cases} P = P_g = P_0 \\ P_0 = const, & t = 0 \\ V = V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 N \end{cases} \quad (8)$$

با جای‌گذاری P_g و T_g از معادلات (۲) و (۴) در معادله (۳) و با استفاده از رابطه (۶)، وابستگی فشار ترکیب مایع-گاز نسبت به تغییرات شعاع به صورت رابطه (۹) به دست خواهد آمد [۱۱].

حباب‌های گازدار با در نظر گرفتن اثر انتقال حرارت روی مرز حباب و مایع می‌باشد. همچنین، جواب‌های دقیق بعضی از معادلات خاص که از شکل کلی این معادلات به دست می‌آیند و دارای کاربردهای فراوانی هستند، به صورت تحلیلی به دست آمده‌اند. سپس، دستگاه معادلات حاکم برای توصیف امواج در یک مایع لزج با حباب‌های گازدار با در نظر گرفتن انتقال حرارت ارائه شده است. همچنین، معادله توصیف امواج غیرخطی در مایعات حباب‌دار نیز در بخش سوم آورده شده است. در بخش چهارم، روش بسط $\frac{G'}{G}$ جهت محاسبه جواب‌های دقیق معادلات غیرخطی شرح داده شده و در بخش پنجم جواب‌های دقیق معادلات خاص به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی، ارائه شده‌اند. در بخش انتهایی نیز نتیجه‌گیری کلی ارائه شده است.

۲- توصیف امواج در یک مایع لزج با حباب‌های گازی

در این بخش فرض بر این است که در ترکیب مایع با حباب‌های گازی از دما، سرعت، چگالی و فشار متوسط استفاده شود. همچنین، فرض شده است که حباب‌های گازی اندازه یکسانی داشته و تعداد آنها در واحد جرم ثابت باشد. علاوه بر این، انتقال حرارت بین مرز حباب گازی و مایع نیز در نظر گرفته شده است. مقدار حجم و جرم گاز در واحد جرم ترکیب مایع گاز به صورت رابطه (۱) بیان می‌گردد.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 N, \quad M = V \rho_g \quad (1)$$

در رابطه فوق، $r = r(x,t)$ شعاع حباب، N تعداد حباب‌ها در واحد جرم، $\rho_g = \rho_g(x,t)$ چگالی و M جرم گاز می‌باشد. همچنین، زیرنویس‌های g و l به ترتیب بیان‌گر گاز و مایع می‌باشند.

در این‌جا، آشفتگی طول موج در ترکیب مایع و حباب‌های گازی را با فرض این‌که طول مشخصه امواج آشفتگی بیشتر از فاصله بین حباب‌ها بوده و همچنین، فاصله بین حباب‌ها خیلی بیشتر از شعاع یک حباب باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

1- Rayleigh
2- Nusselt Number

با تعریف متغیرهای زیر:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{c_0} t', \quad x = l x', \\ u &= c_0 u', \quad \delta = r_0 \delta', \\ P &= P_0 P' + P_0, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، l بیانگر طول موج می‌باشد. معادلات (۱۲) به صورت زیر بیان می‌گردند [۲۲]:

$$\begin{aligned} \delta_t - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_x + u \delta_x + \delta u_x - \frac{2\mu_1 r_0}{\mu} \delta \delta_t &= 0, \\ \frac{-\rho_0}{\mu r_0} (u_t + u u_x) + u \delta_t - \frac{1}{3} P_x &= 0, \\ P + x_1 P_t + \eta P + 3n x_1 \delta_t P &= \\ -\gamma \delta_{tt} - \gamma \delta \delta_{tt} - (3n+4) \gamma \delta_t \delta_{tt} & \\ -(\Delta_1 + \Delta_2) \delta_{tt} - (2\Delta_2 - \Delta_1) \delta \delta_{tt} & \\ -\left(\frac{3n-1}{2} \Delta_1 + \frac{3}{2} \Delta_2\right) \delta_t^2 - \lambda \delta_t - 3\delta + 3\delta^2. & \end{aligned} \quad (15)$$

پارامترهای به کار رفته در روابط (۱۵) به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4\nu \rho_l c_0}{3P_0 l} + 3n x_1, \\ \Delta_1 &= \frac{4\nu x \rho_l c_0^2}{3P_0 l^2}, \\ \Delta_2 &= \frac{\rho_l c_0^2 r_0^2}{P_0 l^2}, \\ \gamma &= \frac{x \rho_l c_0^3 r_0^2}{P_0 l^3}, \\ x_1 &= \frac{x c_0}{l}. \end{aligned} \quad (16)$$

۳- معادله توصیف امواج غیرخطی در مایعات

حباب‌دار

به دست آوردن جواب‌های دقیق دستگاه معادلات (۱۵) کار بسیار مشکلی است. با در نظر گرفتن تغییر متغیرهایی به صورت رابطه (۱۷) و جای‌گذاری آن‌ها در معادلات (۱۵)، نتیجه به صورت روابط زیر حاصل می‌گردد [۲۳]:

$$\begin{cases} \xi = \sigma^m (x - t), \\ \tau = \sigma^{m+1} t, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \sigma^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} = \sigma^{m+1} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sigma^m \frac{\partial}{\partial \xi}, \end{cases} \quad m > 0, \quad \sigma \ll 1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} p - p_0 + \frac{\delta}{r_0} p + \frac{3n x}{r_0} p \delta_t + x p_t & \\ + x \rho_l (r_0 + \delta) \delta_{tt} + (3n+4) x \rho_l \delta_t \delta_{tt} & \\ + \frac{\rho_l (3r_0^2 + 4\nu x)}{3r_0} \delta_{tt} + \frac{\rho_l (6r_0^2 - 4\nu x)}{3r_0^2} \delta \delta_{tt} & \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} + \frac{\rho_l (8\nu x (3n-1) + 9r_0^2)}{6r_0^2} \delta_t^2 & \\ + \frac{4\nu \rho_l}{3r_0} \delta_t + \frac{2P_0}{r_0} \delta + \frac{3P_0}{r_0^2} \delta^2 = 0 & \\ x = \frac{2r_0^2 P_0}{3\chi Nu (n-1) T_0} & \end{aligned} \quad (10)$$

دستگاه معادلات حاکم برای توصیف حرکت ترکیب مایع-گاز به شکل رابطه (۱۱) بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

در این رابطه، $u=u(x,t)$ سرعت یک سیال در ترکیب مایع-گاز می‌باشد. معادله (۱۱) همراه با معادلات (۹) و (۱۰) جهت توصیف امواج غیرخطی در ترکیب گاز-مایع استفاده می‌گردد. این دستگاه معادلات می‌تواند به صورت زیر بیان گردند [۲۲]:

$$\begin{aligned} \delta_t + u \delta_x + \delta u_x - \frac{\rho_0}{\mu} u_x - \frac{2\mu_1}{\mu} \delta \delta_t &= 0, \\ -\frac{\rho_0}{\mu} (u_t + u u_x) + \delta u_t - \frac{1}{\mu} p_x &= 0, \\ p + \frac{\delta}{r_0} p + \frac{3n x}{r_0} p \delta_t + x p_t &= \\ -x \rho_l (r_0 + \delta) \delta_{tt} - (3n+4) x \rho_l \delta_t \delta_{tt} & \\ -\frac{\rho_l (3r_0^2 + 4\nu x)}{3r_0} \delta_{tt} - \frac{\rho_l (6r_0^2 - 4\nu x)}{3r_0^2} \delta \delta_{tt} & \\ -\frac{\rho_l (8\nu x (3n-1) + 9r_0^2)}{6r_0^2} \delta_t^2 - \frac{4\nu \rho_l}{3r_0} \delta_t & \\ -\frac{2P_0}{r_0} \delta + \frac{3P_0}{r_0^2} \delta^2 + p_0. & \end{aligned} \quad (12)$$

با در نظر گرفتن حالت خطی و با فرض این‌که فشار در یک ترکیب متناسب با تغییرات شعاع باشد، معادله خطی موج برای تغییرات شعاع از معادلات (۱۲) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \delta_{tt} &= c_0^2 \delta_{xx}, \\ c_0 &= \sqrt{\frac{3P_0}{\mu r_0}}. \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن، تابع $\psi(\tau)$ تابعی دلخواه بوده و مقدار آن برابر با $\psi(\tau) = 0$ در نظر گرفته شده است.

حال دستگاه معادلات (۲۴) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \delta_{1\tau} - \delta_{2\xi} - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_{2\xi} + \delta_1 u_{1\xi} + u_1 u_{1\xi} + \frac{2\mu_1 r_0}{\mu} \delta_1 \delta_{1\xi} &= 0, \\ -\frac{\rho_0}{\mu r_0} u_{1\tau} + \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_{2\xi} - \delta_1 u_{1\xi} - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_1 u_{1\xi} - \frac{1}{3} P_{2\xi} &= 0, \\ P_2 - \sigma^{m-1} x_1 P_\xi + \delta_1 P_1 - 3\sigma^m n x_1 \delta_{1\xi} P_1 = \sigma^{3m-1} \gamma \delta_{1\xi\xi\xi} & \quad (24) \\ + \sigma^{3m} \gamma \delta_1 \delta_{1\xi\xi\xi} + \sigma^{3m} (3n+4) \gamma \delta_{1\xi} \delta_{1\xi\xi} \\ - \sigma^{2m-1} \delta_{1\xi\xi\xi} (\Delta_1 + \Delta_2) \delta_{1\xi\xi} - \sigma^{2m} (2\Delta_2 - \Delta_1) \delta_1 \delta_{1\xi\xi} \\ - \sigma^{2m} \left(\frac{3n-1}{2} \Delta_1 + \frac{3}{2} \Delta_2 \right) \delta_{1\xi}^2 + \sigma^{m-1} \lambda \delta_{1\xi} - 3\delta_2 + 3\delta_1^2. \end{aligned}$$

در نتیجه، با استفاده از معادلات (۲۳) و (۲۴) معادله فشار P_1 به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} P_{1\tau} + \alpha P_1 P_{1\xi} + \sigma^{2m-1} \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6} P_{1\xi\xi\xi} - \sigma^{2m} \frac{2\Delta_2 - \Delta_1}{18} P_1 P_{1\xi\xi\xi} \\ - \sigma^{2m} \left(\frac{3n-2}{18} \Delta_1 + \frac{5}{18} \Delta_2 \right) P_{1\xi} P_{1\xi\xi} = \\ \sigma^{m-1} \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2} \right) P_{1\xi\xi} + \sigma^m \frac{n x_1}{2} (P_1 P_{1\xi})_\xi + \sigma^{3m-1} \frac{\gamma}{6} P_{1\xi\xi\xi\xi\xi} \\ - \sigma^{3m} \frac{\gamma}{18} P_1 P_{1\xi\xi\xi\xi\xi} - \sigma^{3m} \frac{(3n+5)\gamma}{18} P_{1\xi} P_{1\xi\xi\xi\xi} - \\ \sigma^{3m} \frac{(3n+4)\gamma}{18} P_{1\xi\xi\xi}^2 \alpha = \frac{3\mu r_0}{\rho_0} - \frac{3\mu_1 r_0}{\mu} + \frac{2}{3}. \quad (25) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن m های مناسب و ضرایب بر حسب ε می‌توان معادلات معروف زیر را به دست آورد.

برای حالت $m=1$ و $\sigma \rightarrow 0$ ، معادله برگرز به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$P_{1\tau} + \alpha P_1 P_{1\xi} = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2} \right) P_{1\xi\xi}. \quad (26)$$

برای حالت $m = \frac{1}{2}$ و $\sigma \rightarrow 0$ ، $\left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2} \right) \approx \sigma^2$ ، معادله معروف کا دی وی به صورت رابطه (۲۷) نتیجه می‌شود.

$$P_{1\tau} + \alpha P_1 P_{1\xi} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6} P_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma \delta_\tau - \delta_\xi - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_\xi + \delta u_\xi + u \delta_\xi & \quad (18) \\ - \sigma \frac{2\mu_1 r_0}{\mu} \delta \delta_\tau + \frac{2\mu_1 r_0}{\mu} \delta \delta_\xi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \left(-\frac{\rho_0}{\mu r_0} \right) u_\tau + \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_\xi + \sigma \delta u_\tau \\ - \delta u_\xi - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u u_\xi - \frac{1}{3} P_\xi = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P + \sigma^{m+1} x_1 P_\tau - \sigma^m x_1 P_\xi + \delta P + 3\sigma^{m+1} n x_1 \delta_\tau P \\ - 3\sigma^m n x_1 \delta_\xi P = -\sigma^{3m+3} \gamma \delta_{\tau\tau\tau} + 3\sigma^{3m+2} \gamma \delta_{\tau\xi\xi} - \\ 3\sigma^{3m+1} \gamma \delta_{\xi\xi\xi} + \sigma^{3m} \gamma \delta_{\xi\xi\xi} - \sigma^{3m+3} \gamma \delta \delta_{\tau\tau\tau} + \\ 3\sigma^{3m+2} \gamma \delta \delta_{\tau\xi\xi} - 3\sigma^{3m+1} \gamma \delta \delta_{\xi\xi\xi} + \sigma^{3m} \gamma \delta \delta_{\xi\xi\xi} \\ - \sigma^{3m+3} (3n+4) \gamma \delta_\tau \delta_{\tau\xi} + \sigma^{3m+2} (3n+4) \gamma \delta_\xi \delta_{\tau\xi} \\ + 2\sigma^{3m+2} (3n+4) \gamma \delta_\tau \delta_{\xi\xi} - \sigma^{3m+1} (3n+4) \gamma \delta_\xi \delta_{\xi\xi} \\ - \sigma^{3m+1} (3n+4) \gamma \delta_\tau \delta_{\xi\xi} + \sigma^{3m} (3n+4) \gamma \delta_\xi \delta_{\xi\xi} - \\ \sigma^{2m+2} (\Delta_1 + \Delta_2) \delta_{\tau\xi} + 2\sigma^{2m+1} (\Delta_1 + \Delta_2) \delta_{\tau\xi\xi} - \\ \sigma^{2m} (\Delta_1 + \Delta_2) \delta_{\xi\xi} - \sigma^{2m+2} (2\Delta_2 - \Delta_1) \delta \delta_{\tau\xi} + \\ 2\sigma^{2m+1} (2\Delta_2 - \Delta_1) \delta \delta_{\xi\xi} - \sigma^{2m} (2\Delta_2 - \beta_1) \delta \delta_{\xi\xi} - \\ \sigma^{2m+2} \left(\frac{3n-1}{2} \Delta_1 + \frac{3}{2} \Delta_2 \right) \delta_\tau^2 + 2\sigma^{2m+1} \left(\frac{3n-1}{2} \Delta_1 \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \Delta_2 \right) \delta_\tau \delta_\xi - \sigma^{2m} \left(\frac{3n-1}{2} \Delta_1 + \frac{3}{2} \Delta_2 \right) \delta_\xi^2 \\ - \sigma^{m+1} \lambda \delta_\tau + \sigma^m \lambda \delta_\xi - 3\delta + 3\delta^2. \quad (20) \end{aligned}$$

حال، متغیرهای u ، δ ، p به صورت سری‌های توانی بر حسب σ به شکل رابطه (۲۱) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} u &= \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots \\ \delta &= \sigma \delta_1 + \sigma^2 \delta_2 + \dots \\ P &= \sigma P_1 + \sigma^2 P_2 + \dots \quad (21) \end{aligned}$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۱) در معادلات (۱۸) تا (۲۰)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -\delta_{1\xi} - \frac{\rho_0}{\mu r_0} u_{1\xi} = 0, \\ -\frac{\rho_0}{\mu r_0} u_{1\xi} + \frac{1}{3} P_{1\xi} = 0, \\ P_1 = -3\delta_1. \quad (22) \end{aligned}$$

با حل دستگاه معادلات فوق، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \delta_1(\xi, \tau) &= -\frac{\rho_0}{\mu r_0} u_1(\xi, \tau) + \psi(\tau), \\ P_1(\xi, \tau) &= -3\delta_1(\xi, \tau) \quad (23) \end{aligned}$$

همچنین، $P_1(\theta)$ بر اساس گام‌های زیر تعیین می‌گردد:
گام ۱: با در نظر گرفتن توازن همگن بین بالاترین جمله
غیرخطی و بالاترین مرتبه مشتقات $P_1(\theta)$ در معادله (۳۱)،
عدد صحیح و مثبت M در رابطه (۳۲) مشخص می‌شود.

گام ۲: با جای‌گذاری روابط (۳۲) و (۳۳) در معادله (۳۱) و
جمع‌آوری همه جملات با توان‌های مشابه از $(\frac{G'}{G})$ ، طرف
چپ معادله (۳۱) به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود. بعد
از برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های $\frac{G'}{G}$ در چند
جمله‌ای حاصل، یک مجموعه از معادلات جبری بر حسب
متغیرهای A_i, c, m و n به دست خواهد آمد.

گام ۳: با حل این دستگاه از معادلات جبری و سپس
جای‌گذاری نتایج به دست آمده همراه با جواب‌های معادله
(۳۳) در رابطه (۳۲)، جواب‌های معادله (۳۱) محاسبه
می‌گردند.

۵- جواب‌های دقیق معادلات به دست آمده با روش

$$\text{بسط } \frac{G'}{G}$$

در این قسمت، روش بسط $\frac{G'}{G}$ برای معادلات خاص
به دست آمده در بخش سوم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۱- معادله برگرز

ابتدا معادله برگرز (۲۶) در نظر گرفته شده است. همان‌طور
که ذکر شد، این معادله یک حالت خاص از معادله (۲۵)
به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{1\tau} + \alpha P_1 P_{1\xi} = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2}\right) P_{1\xi\xi} \quad (35)$$

با استفاده از تبدیل (۳۰)، معادله (۳۵) به صورت زیر نوشته
می‌شود.

$$-k P_{1\theta} + \alpha P_1 P_{1\theta} = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x}{2}\right) P_{1\theta\theta} \quad (36)$$

با موازنه کردن بر اساس گام ۱، مقدار $M=1$ محاسبه
می‌گردد. بنابراین، جواب معادله (۳۶) به صورت زیر نوشته
می‌شود:

$$P_{1\theta} = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (37)$$

همچنین، برای حالت $m = \frac{1}{2}$ و $\left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2}\right) \approx \sigma$ در
 $\sigma \rightarrow 0$ ، معادله معروف کا دی وی-برگرز به صورت زیر
حاصل می‌گردد:

$$P_{1\tau} + \alpha P_1 P_{1\xi} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6} P_{1\xi\xi\xi} = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2}\right) P_{1\xi\xi} \quad (28)$$

۴- روش بسط $\frac{G'}{G}$ برای تعیین جواب‌های معادلات غیرخطی

برای بیان این روش، معادله دیفرانسیل غیرخطی با
متغیرهای مستقل τ و ξ و متغیر وابسته P_1 به صورت زیر در
نظر گرفته می‌شود [۲۴]:

$$N(P_1, P_{1\tau}, P_{1\xi}, P_{1\tau\xi}, P_{1\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (29)$$

با استفاده از تبدیل رابطه (۳۰)، معادله با مشتقات جزئی
(۲۹)، را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی
رابطه (۳۱) بیان نمود.

$$P_1 = P_1(\theta), \theta = \xi - k\tau \quad (30)$$

$$N(P_1(\theta), -kP_1(\theta), P_1'(\theta), k^2 P_1''(\theta), P_1'''(\theta), \dots) = 0 \quad (31)$$

بر اساس روش بسط $\frac{G'}{G}$ ، جواب معادله (۳۱) به شکل یک
چند جمله‌ای بر حسب $\frac{G'}{G}$ به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$P_1(\theta) = \sum_{i=1}^M A_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i; A_i \neq 0, \quad (32)$$

که در آن، $G = G(\theta)$ در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه
دوم (رابطه (۳۳)) صدق می‌کند.

$$G'' + mG' + nG = 0 \quad (33)$$

در رابطه (۳۳)، ضرایب $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ و m و n
ثابت‌هایی هستند که باید مشخص گردند. همچنین، G
جواب معادله (۳۳) می‌باشد که با استفاده از رابطه (۳۴)
قابل محاسبه می‌باشد.

$$\frac{G'}{G} = \begin{cases} \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \left(\frac{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)}{c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)} \right) \\ -\frac{m}{2}; m^2 - 4n > 0, \\ \frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \left(\frac{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)}{c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) + c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)} \right) \\ -\frac{m}{2}; m^2 - 4n < 0. \end{cases} \quad (34)$$

در حالت دوم، ضریب c_2 در رابطه (۴۰) صفر قرار داده شده و جواب‌های (۴۰) به صورت رابطه (۴۲) محاسبه می‌گردند.

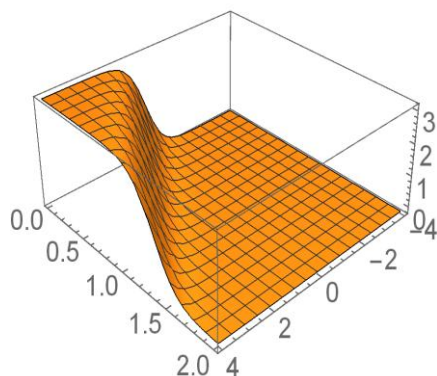
$$P_{1\theta} = \frac{k}{\alpha} - \frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)$$

$$m^2 - 4n > 0$$

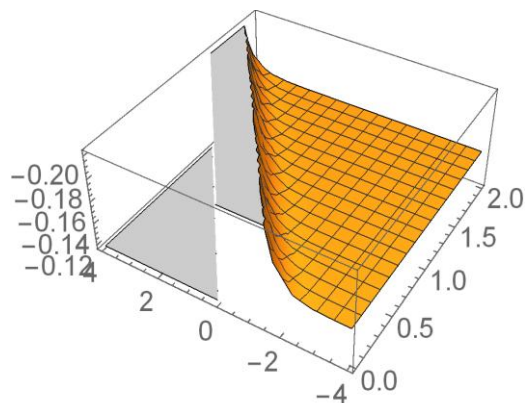
$$P_{2\theta} = \frac{k}{\alpha} - \frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)$$

$$m^2 - 4n < 0, \quad (42)$$

با در نظر گرفتن مقادیر $\alpha = 2$ ، $\lambda = 2$ ، $x_1 = 3$ با $k = 3$ نمودار $P_{1\theta}$ به ازای $n = 2$ و $m = 4$ در حالت اول و دوم به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ و نمودار $P_{2\theta}$ به ازای $n = 2$ و $m = 4$ در حالت اول و دوم به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ ارائه شده‌اند.



شکل (۱): نمودار جواب‌های خاص $P_{1\theta}$ در معادله (۴۱) در حالت اول.



شکل (۲): نمودار جواب‌های خاص $P_{1\theta}$ در معادله (۴۲) در حالت دوم.

با جای‌گذاری معادله (۳۷) همراه با (۳۳) در (۳۶) و برابر صفر قرار دادن همه ضرایب توان‌های $\frac{G'}{G}$ خواهیم داشت:

$$A_0 = \frac{6k - m(\lambda - 3x_1)}{6\alpha}, \quad (38)$$

$$A_1 = \frac{(\lambda - 3x_1)}{-3\alpha}.$$

با جای‌گذاری ضرایب به دست آمده (۳۸) در (۳۷)، جواب زیر به دست می‌آید:

$$P_1(\theta) = \frac{6k - m(\lambda - 3x_1)}{6\alpha} - \frac{(\lambda - 3x_1)}{3\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right). \quad (39)$$

با جای‌گذاری رابطه (۳۴) در (۳۹)، دو نوع از جواب‌های موج تراولینگ از معادله (۳۶) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$P_{1\theta} = \frac{\left(c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) \right)}{\left(c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) \right)}$$

$$\times \left(-\frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} + \frac{k}{\alpha}; m^2 - 4n > 0, \right.$$

$$P_{2\theta} = \frac{\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) \right)}{\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) + c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) \right)}$$

$$\times \left(-\frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} + \frac{k}{\alpha}; m^2 - 4n < 0. \quad (40)$$

ضرایب c_1 و c_2 اعداد ثابت و دلخواه هستند.

برای درک بهتر، نمودار حالت‌های خاص رابطه (۴۰) در ادامه ارائه شده است. در حالت اول، ضریب c_1 برابر با صفر در نظر گرفته شده است. در این صورت، جواب‌های معادله (۴۰) به صورت رابطه (۴۱) به دست خواهند آمد.

$$P_{1\theta} = \frac{k}{\alpha} - \frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)$$

$$m^2 - 4n > 0$$

$$P_{2\theta} = \frac{k}{\alpha} + \frac{\lambda - 3x_1}{3\alpha} \frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)$$

$$m^2 - 4n < 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= \frac{2m(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha}, \\ A_2 &= \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha}. \end{aligned} \quad (46)$$

با جای گذاری ضرایب (۴۳) در رابطه (۴۲) نتیجه می شود:

$$P_{1\theta} = \frac{2m(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha} \left(\frac{G'}{G} \right) + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \quad (47)$$

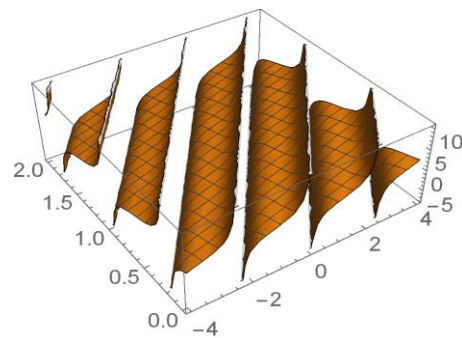
با جای گذاری (۳۴) در (۴۷)، جواب های موج تراولینگ از معادله (۴۱) به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} P_{1\theta} &= \left[\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \frac{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)}{c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)} + \frac{m}{2} \right] \\ &\quad \times \left(\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha} \right); m^2 - 4n > 0, \\ P_{2\theta} &= \left[\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \frac{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)}{c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) + c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)} + \frac{m}{2} \right] \\ &\quad \times \left(\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha} \right); m^2 - 4n < 0. \end{aligned} \quad (48)$$

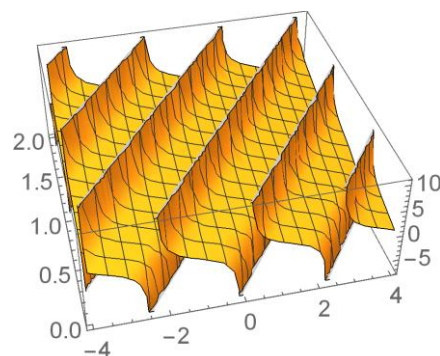
در رابطه (۴۸)، c_1 و c_2 اعداد ثابت و دلخواه هستند.

مشابه توضیحات ارائه شده در بخش ۵-۱، برای درک بهتر، نمودار حالت های خاص رابطه (۴۸) در ادامه ارائه شده است. بدین منظور، در حالت اول ضریب c_1 برابر با صفر و در حالت دوم ضریب c_2 برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

برای رسم جواب های خاص این دو حالت، $\beta_1 = 1$ ، $\beta_2 = 1$ ، $\alpha = 2$ و $k = 3$ فرض شده است. در شکل های ۵ و ۶ نمودارهای $P_{1\theta}$ برای مقادیر $n = 2$ و $m = 4$ در حالت اول و دوم نشان داده شده است. همچنین، نمودارهای $P_{2\theta}$ برای $n = 4$ و $m = 3$ در شکل های ۷ و ۸ برای دو حالت اول و دوم ارائه شده است.



شکل (۳): نمودار جواب های خاص $P_{2\theta}$ در معادله (۴۱) در حالت اول.



شکل (۴): نمودار جواب های خاص $P_{2\theta}$ در معادله (۴۲) در حالت دوم.

۵-۲- معادله کا دی وی

دومین معادله در نظر گرفته شده جهت یافتن جواب های دقیق آن، معادله معروف کا دی وی است که به صورت زیر (معادله ۴۰) می باشد:

$$P_{1r} + \alpha P_1 P_{1\xi} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{6} P_{1\xi\xi\xi} = 0. \quad (43)$$

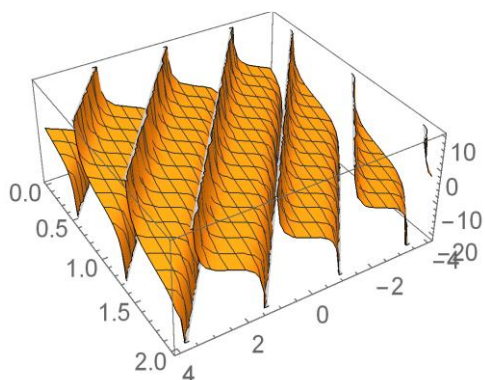
با استفاده از (۳۰)، معادله (۴۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$-k P_{1\theta} + \alpha P_1 P_{1\theta} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{6} P_{1\theta\theta\theta} = 0. \quad (44)$$

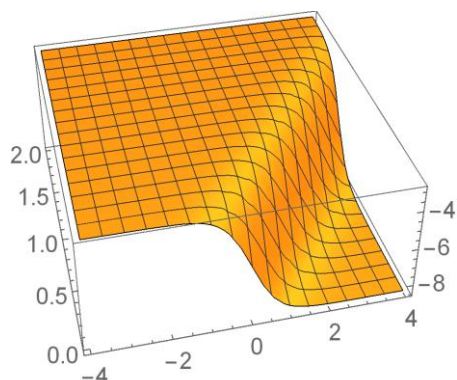
با موازنه بر اساس گام ۱، $M=2$ به دست آمده و جواب معادله (۴۴) به صورت رابطه زیر حاصل می گردد:

$$P_{1\theta} = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + A_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2. \quad (45)$$

با جای گذاری روابط (۴۵) و (۳۳) در معادله (۴۳) و برابر صفر قرار دادن همه ضرایب توان های $\frac{G'}{G}$ ، خواهیم داشت:



شکل (۸): نمودار جواب‌های خاص $P_{2\theta}$ در معادله (۴۸) در حالت دوم.



شکل (۵): نمودار جواب‌های خاص $P_{1\theta}$ در معادله (۴۸) در حالت اول.

۵-۳- معادله کا دی وی- برگرز

در این قسمت، جواب‌های دقیق معادله معروف کا دی وی- برگرز (رابطه ۴۹) ارائه شده است.

$$P_{1r} + \alpha P_1 P_{1z} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{6} P_{1zzz} = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{x_1}{2}\right) P_{1zz} \quad (49)$$

مشابه دو حالت قبل داریم:

$$P_{1\theta} = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + A_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (50)$$

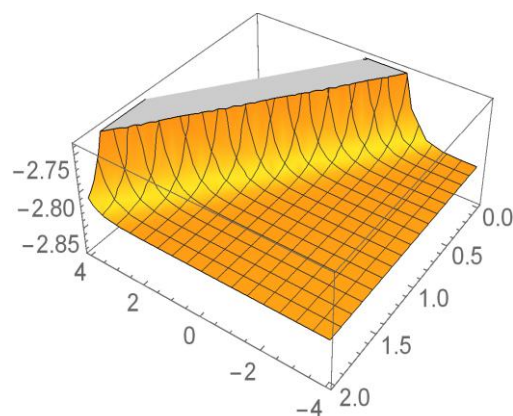
با استفاده از روابط (۵۰) و (۳۳) همراه با معادله کا دی وی- برگرز، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{k}{\alpha} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(m^2 + 8n)}{6\alpha}, \\ A_1 &= \frac{2m(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha}, \\ A_2 &= \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha}. \end{aligned} \quad (51)$$

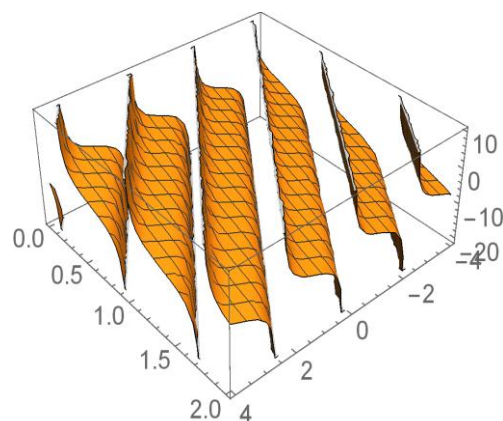
با جای گذاری ضرایب (۵۱) در رابطه (۵۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P_{1\theta} &= \frac{k}{\alpha} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(m^2 + 8n)}{6\alpha} \\ &\quad - \frac{2m(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{-\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right)^2. \end{aligned} \quad (52)$$

حال با استفاده از روابط (۳۴) و (۵۲)، جواب‌های معادله کا دی وی- برگرز به صورت روابط زیر به دست می‌آیند.



شکل (۶): نمودار جواب‌های خاص $P_{1\theta}$ در معادله (۴۸) در حالت دوم.



شکل (۷): نمودار جواب‌های خاص $P_{2\theta}$ در معادله (۴۸) در حالت اول.

عمق می‌پردازد. همچنین، معادله کا دی وی- برگرز که در رابطه (۲۸) ارائه شد، در توصیف بسیاری از پدیده‌ها مانند جریان مایعات حاوی حباب‌های گازی و نیز انتشار امواج در یک لوله الاستیک حاوی مایع لزج، کاربرد دارد.

تفسیر فیزیکی: جواب‌های تحلیلی و نتایج ارائه‌شده در این تحقیق که دینامیک جواب‌ها را با انتخاب پارامترهای مناسب مشخص می‌کند تفسیری فیزیکی از معادلات را به شرح زیر ارائه می‌دهند:

۱. شکل‌های ۳، ۴، ۷ و ۸ جواب‌های موج تراولینگ متناوب را نشان می‌دهند که دارای یک رفتار تکرار شونده هستند.

۲. شکل‌های ۱ و ۵ جواب‌های سالیوتونی را نشان می‌دهند. سالیوتون‌ها انواع خاصی از موج‌های سولیتاری بوده که در حین حرکت با سرعت ثابت شکل اولیه خود را حفظ نموده و همچنین ساختارهایی شبیه ذره دارند.

۳. شکل‌های ۲ و ۶ نیز جواب‌های موج پیچشی تکین را نمایش می‌دهند. این امواج نه طولی هستند و نه عرضی. به‌عنوان مثال، در موج آب در نزدیکی سطح آب تقریباً حرکت دایره‌ای دارند.

۷- مراجع

1. Kudryashov, N.A. and Sinelshchikoy, D. "Extended Models of Non-linear Waves in Liquid with Gas Bubbles", *Int. J. Non-lin. Mech.*, Vol. 63, pp. 31–38, 2014.
2. Jahangiri, A. and Biglari, M. "Thermo-Physical Investigation of the Explosive Rapid Boiling the Contact of a Single Water Drop with Liquid Methane", *The Inst. Mech. Eng., Part E. Vol. 229, No.4*, pp. 256–264, 2015.
3. Korteweg, D.J. and De Vries, G. "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves", *Philos. Mag.*, Vol. 39, No. 6, pp. 422–443, 1895.
4. Van, W.L. "On the Equations of Motion for Mixtures of Liquid and Gas Bubbles", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 33, No. 3, pp. 465–474, 1968.
5. Nakoryakov, V.E., Pokusaev, B.G., and Shraiber, I.R. "Wave Dynamics of Gas and Vapor-Liquid Media", *Energoatomizdat, Moscow, Russia*, 1990.

$$P_{1\theta} = -\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha} \left[\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \frac{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)}{c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2} \theta\right)} + \frac{m}{2} \right] + \frac{k}{\alpha} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(m^2 + 8n)}{6\alpha}; \quad m^2 - 4n > 0, \quad (53)$$

$$P_{2\theta} = -\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha} \left[\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \frac{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)}{c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right) + c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4n - m^2}}{2} \theta\right)} + \frac{m}{2} \right] + \frac{k}{\alpha} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(m^2 + 8n)}{6\alpha}; \quad m^2 - 4n < 0, \quad (54)$$

که در آن، c_1 و c_2 اعداد ثابت دلخواه هستند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، انتشار امواج غیرخطی در ترکیب مایع و حباب‌های گاز مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور، لزجت سیال و انتقال گرما نیز در محاسبات در نظر گرفته شد. سپس، معادله غیرخطی مرتبه چهارم برای توصیف فشار امواج در مایع حباب‌دار ارائه شده و جواب‌های دقیق چند معادله خاص به‌دست آمده که کاربرد بسیار زیادی در علوم مختلف و مهندسی دارند با استفاده از روش بسط $\frac{G'}{G}$ محاسبه گردید.

علاوه بر این، معادلات غیرخطی از مرتبه دوم و سوم برای شرح فشار امواج در یک مایع حاوی حباب‌های گازی از معادلات کلی به‌دست آمدند. این معادلات حالت‌های جدیدی از معادلات برگرز، کا دی وی و کا دی وی- برگرز می‌باشند. با استفاده از معادلات ارائه‌شده در این مقاله، امکان بررسی اثر لزجت و انتقال گرما بر روی مرز مایع و حباب میسر گردید.

به‌طور خاص، معادله برگرز که به‌صورت رابطه (۲۶) معرفی گردید، یکی از معادلات اساسی در مکانیک سیالات می‌باشد که به کمک آن می‌توان فرآیندهای انتشار و انتقال گرما را بررسی نمود. همچنین، معادله کا دی وی که در رابطه (۲۷) ارائه گردید، به مطالعه امواج در آب‌های کم

6. Oganyan, G.G. "Increase in the Compression Wave Amplitude in a Liquid with Dissolved Gas Bubbles", *J. Fluid. Dyn.* Vol. 40, No. 1, pp.95–102, 2005.
7. Nigmatulin, R.I. and Khabeev, N.S. "Heat Transfer of Gas Bubbles in Liquid", *J. Fluid. Dyn.*, Vol. 9, No. 2, pp. 759–769, 1974.
8. Aidagulov, R.R., Khabeev, N.S., and Shagapov, V.Sh. "Shock Wave Structure in a Liquid with Gas Bubbles with Allowance for Unsteady Interphase Heat Transfer", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* Vol. 18, No. 3, pp. 334-342. 1977.
9. Ryabov, P.N. "Exact Solutions of the Kudryashov–Sinelschchikov Equation", *Appl. Math. Comput.* Vol. 217, No. 3, pp. 3585–3590, 2010.
10. Kudryashov, N.A. and Sinelschchikov, D.I. "Non-linear Waves in Bubbly Liquids with Consideration for Viscosity and Heat Transfer", *Phys. Lett. A.*, Vol. 374, No. 19, pp. 2011-2016, 2010.
11. Kudryashov, N.A. and Sinelschchikov, D.I. "An Extended Equation for the Description of Non-linear Waves in a Liquid with Gas Bubbles", *Wave. Motion.* Vol. 50, No. 3, pp. 351-362, 2013.
12. Kudryashov, N.A. and Sinelschchikov, D.I. "Analytical Solutions of the Rayleigh Equation for Empty and Gas-Filled Bubble", *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol. 47, No. 40, pp. 52-58, 2014.
13. Klotz, A.R. "Bubble Dynamics in N-dimensions", *Phys. Fluids.* Vol. 25, No. 8, pp. 082-109, 2013.
14. Kudryashov, N.A. and Sinelschchikov, D.I. "Analytical Solutions for Problems of Bubble Dynamics", *Phys. Lett. A.* Vol. 379, No. 8, pp. 798-802, 2015.
15. Fuster, D. and Montel, F. "Mass Transfer Effects on Linear Wave Propagation in Diluted Bubbly Liquids", *J. Fluid. Mech.* Vol. 779, pp. 598-621, 2015.
16. Jafari, Y., Taebie Rahni, M., and Adamian, A. "Computational Modeling of Flow and Natural Convective Heat Transfer in Porous Media, Using LBM-Effects of Nano-Fluidicity and Domain Geometry", *Fluid. Mech. Aerodyn.*, Vol. 3, No. 4, pp. 17-30, 2015 (In Persian).
17. Nakoryakov, V.E., Sobolev, V.V., and Shreiber, I.R. "Long Wave Perturbation in a Gas–Liquid Medium", *Fluid. Dyn.* Vol. 7, No. 5, pp. 763–768, 1972.
18. Nigmatulin, R.I. "Dynamics of Multiphase Media, Part 2", Hemisphere, New York, United States, 1991.
19. Rayleigh, L. "On the Pressure Developed in a Liquid during the Collapse of a Spherical Void", *Philos. Mag.*, Vol. 34, No. 200, pp. 94–98, 1917.
20. Plesset, M.S., and Prosperetti, A. "Bubble Dynamics and Cavitation", *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, Vol. 9, pp. 145–185, 1977.
21. Wijngaarden, L.V. "One-dimensional Flow of Liquid Containing Small Gas Flow", *Annu. Rev. Fluid. Mech.* Vol. 4, No. 1, pp. 369–396, 1972.
22. Kudryashov, N.A. and Sinelschchikov, D.I. "Non-linear Evolution Equations for Describing Waves in Bubbly Liquids with Viscosity and Heat Transfer Consideration", *Appl. Math. Comput.* Vol. 217, No. 1, pp. 414-421, 2010.
23. Kudryashov, N.A. and Chernyavskii, I.L. "Non-linear Waves in Fluid Flow Through Viscoelastic Tube", *J. Fluid. Dyn.*, Vol. 41, No. 1, pp. 49–62, 2006.
24. Jafari, H., Kadkhoda, N., and Biswas, A. "The G'/G-Expansion Method for Solutions of Evolution Equations from Isothermal Magnetostatic Atmospheres", *J. King. Saud. Univ. Sci.* Vol. 25, No. 1, pp. 57–62, 2013.