

ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دوار مدرج تابعی تحت فشار با تقویت کننده حلقوی و محوری

سید علی موسوی^۱، سعید محبوب‌مقدس^۲ و محمود کفاش‌میرزارحیمی^۳

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۹)

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دوار با مواد مدرج تابعی، تحت فشار محوری و داخلی با تقویت کننده حلقوی و محوری و شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده بر اساس تئوری پوسته لاو بررسی شده است. پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت کننده حلقوی و محوری به صورت گسترده‌ای در سازه‌هایی از جمله موشک‌ها، زیر دریایی‌ها و مخازن سوخت هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرند. خصوصیات مکانیکی مواد مدرج تابعی پوسته استوانه‌ای دوار طبق تابع توانی در جهت شعاع به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. در این بررسی مواد مدرج تابعی به کار رفته از نیکل و فولاد ضد زنگ تشکیل شده است، که نیکل در سطح داخلی و فولاد ضد زنگ در سطح خارجی پوسته قرار دارد. معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای با استفاده از اصل همپلتون و روش انرژی استخراج می‌شود و تاثیر پارامترهای مختلف نظیر سرعت دورانی، تقویت کننده‌های حلقوی و محوری، بار محوری، فشار داخلی و خواص مواد مدرج تابعی بررسی شده است. صحت نتایج حاصل شده با مقایسه آنها با نتایج حاصل از پژوهش‌های قبلی مورد بررسی قرار گرفته و مطابقت خوبی بین کار حاضر و مطالعات پیشین دیده شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات، پوسته استوانه‌ای دوار، مواد مدرج تابعی، فشار محوری و داخلی، تقویت کننده حلقوی و محوری

Vibrations of a Rotating Functionally Graded Cylindrical Shell under Pressure with Ring and Stringer Stiffened

S. A. Mousavi, S. Mahjoub-Moghadas and M. Kaffash-Mirzarahimi

Mechanical Engineering Department

Imam Hosein University

(Received:25/November/2017 ; Accepted:30/December/2018)

ABSTRACT

In the investigation, the vibrations of a rotating functionally graded cylindrical shell under axial and internal pressure with ring and stringer stiffened and simply supported boundary condition based on Love's shell theory is studied. The cylindrical shell with ring and stringer stiffened widely used in structures such as rockets, submarines and fuel tank of aircraft. The material properties of the rotating functionally graded (FG) cylindrical shell vary continuously across the thickness according to the power law distribution. In this study considers functionally graded material composed of Nickel and stainless steel, in which FG cylindrical shell has Nickel on its inner surface and stainless steel on its outer surface. The governing equations of a cylindrical shell are derived using Hamilton's principle and energy method and the effect of various parameters such as angular speed, ring and stringer stiffened, axial load, internal pressure and the functionally graded material are investigated. The validity of the results by comparing them with the results of previous research is investigated, in which there is a very good agreement between the results of the present work and previous studies.

Keywords: Vibrations, Rotating cylindrical shell, Functionally graded material, Axial and internal pressure, Ring and stringer stiffened

۱- کارشناسی ارشد: amousavi@ihu.ac.ir

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): smahjoub@ihu.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری: m.kaffash.r@gmail.com

فهرست علائم و اختصارات

b_r	پهنای حلقوی ها، m
b_s	پهنای طولی ها، m
d_r	ارتفاع حلقوی ها، m
d_s	ارتفاع طولی ها، m
h	ضخامت پوسته استوانه‌ای، m
L	طول پوسته استوانه‌ای، m
N_a	بار استاتیکی محوری، N
P	فشار داخلی استوانه، bar
R	شعاع پوسته استوانه‌ای، m

علائم یونانی

Ω	سرعت دورانی پوسته، rad/s
----------	--------------------------

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای دوار یکی از پرکاربردترین اشکال هندسی به کار رفته در تجهیزات صنعتی می‌باشد. این پوسته‌ها در سازه‌های هوافضایی، هواپیماها، روتور توربین گاز، سانتریفیوژها و دیگر سیستم‌های دوار مورد استفاده قرار می‌گیرند. پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده ساخته شده از مواد مدرج تابعی در مهندسی مدرن، کاربردهایی گسترده از جمله زیر دریایی‌ها، پل‌ها، هواپیماها، ماهواره‌ها، کشتی‌ها و سازه‌های دریایی دارند. در سال‌های اخیر تحقیقات فراوانی بر پوسته‌های استوانه‌ای دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی بدون تقویت کننده‌های حلقوی و طولی به دلیل کاربرد آنها در هواپیماها، موشک‌ها، راکت‌ها و غیره انجام شده است. از جمله این مطالعات، لوی و همکاران [۱] به بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی پرداختند و اثرات توزیع حجمی و تنظیمات مواد تشکیل دهنده را مورد بررسی قرار دادند. در پژوهشی دیگر انصاری و درویش [۲] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته و در نظر گرفتن اینرسی چرخشی و فرض شکل مودها به صورت سری فوریه به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت پرداختند. ماتسیونگا [۳] با به کارگیری تئوری تغییر شکل مرتبه بالا به صورت دو بعدی، ارتعاش آزاد و نیز پایداری پوسته استوانه‌ای از جنس مدرج تابعی را تحلیل کرد. ابراهیمی و سپیانی [۴] ارتعاش آزاد و کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در معرض ترکیب نیروهای محوری

استاتیکی و پرئودیک بررسی نمودند و اثرات برش عرضی و اینرسی چرخشی را نیز در این تحلیل در نظر گرفتند. پاتل و همکاران [۵] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای بیضی شکل از جنس مواد مدرج تابعی پرداختند و جهت تحلیل از روش المان محدود استفاده نمودند. پرادهان و همکاران [۶] ارتعاش در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف بررسی کردند که در آن ماده مدرج تابعی از فولاد ضد زنگ و زیرکونیا تشکیل شده بود. سانتوز و همکاران [۷] با استفاده از نوعی مدل المان محدود نیمه تحلیلی، پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند^۱ را با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی مطالعه کردند. دای و راثو [۸] به بررسی ارتعاشات و پاسخ گذرای یک استوانه توخالی مدرج تابعی تحت بار دینامیکی شعاعی متقارن پرداختند. آنها معادلات حاکم بر استوانه مدرج تابعی تحت بارهای دینامیکی را با استفاده از روش تفاضل محدود و روش نیومارک حل نمودند. عسگری و اخلاقی [۹] فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند دو بعدی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی بررسی نمودند. یاس و عراق [۱۰] پاسخ‌های ارتعاشات آزاد یک استوانه هدفمند با شرایط مرزی ساده را، با معادلات سه بعدی الاستیسیته و به روش مربعات دیفرانسیلی ارائه دادند. لی و همکارانش [۱۱] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای سه لایه را که لایه میانی از آن مواد هدفمند بود با شرط مرزی ساده و براساس تئوری فلاگ بررسی کردند. یو و چیا [۱۲] با استفاده از تئوری پوسته دارای شعاع انحنای بزرگ و غیرخطی دونل، ارتعاشات آزاد و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای با لایه چینی متعامد غیرمتقارن با شرایط مرزی گیردار و ساده را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. در این تحقیق میدان جابه‌جایی تنها در جهت عرضی با بسطی متشکل از چند مود استفاده شده است. دستگاه معادلات غیرخطی حاکم تنها برای ارتعاشات آزاد به دست آمده و به روش تعادل هارمونیک حل شده است. تورنابن [۱۳] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هدفمند را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بررسی کرد. پرادیومنا و همکارش [۱۴]

1- Functionally Graded Material

ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده، با در نظر گرفتن خمیدگی، کشیدگی و پیچیدگی تقویت‌کننده‌ها استفاده کردند. عظیمی و همکاران [۲۱] نیز با در نظر گرفتن اثر فشار داخلی فرکانس‌های طبیعی یک پوسته نازک استوانه‌ای را با استفاده از روش ریلی ارائه نموده‌اند. طالبی و همکاران [۲۲] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی با تقویت‌کننده حلقوی و محوری پرداختند. نتایج این بررسی برای پارامتر مختلف برحسب فرکانس محیطی به‌دست آورده شد. از وجه تمایز پژوهش حاضر با بررسی طالبی و همکاران می‌توان به مطالعه اثرات فشار داخلی و نیروی‌های محوری بر پوسته‌ها اشاره کرد. دانشجو و همکاران [۲۳-۲۴] در مطالعاتی به بررسی دینامیکی و سرعت بحرانی پوسته مخروطی کامپوزیتی لایه‌ای با تقویت‌کننده‌های متقاطع با روش عددی مربعات دیفرانسیلی و تحت تاثیر نیروهای محوری و فشار پرداختند. نتایج حاصله را برحسب پارامترهای مختلف از جمله سرعت دوران، عمق و پهنای و تعداد تقویت‌کننده‌ها به‌دست آوردند. های بیچ و همکارانش [۲۵] براساس تئوری کلاسیک ورق و هندسه غیرخطی بار بحرانی دینامیک غیرخطی کمانش پنل‌های استوانه‌ای با بارگذاری محوری را مورد بررسی قرار داده‌اند.

پوسته‌های استوانه‌ای دوار در طیف گسترده‌ای از ساختارهای مهندسی دارای کاربرد فراوان می‌باشند. در بسیاری از این سازه‌ها، پوسته‌ها تحت بار فشاری می‌باشند و ممکن است تحت ناپایداری قرار گیرند. لذا بررسی ارتعاشات این ساختارها مورد نیاز مهندسان و طراحان است، با وجود این امر، بیشتر مطالعات در زمینه رفتار کمانش پوسته‌ها است، که از این جمله این تحقیقات؛ باروچ و سینگر تاثیر تقویت‌کننده‌ها را بر پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده تحت فشار هیدرواستاتیک بررسی کردند. نتایج این بررسی نشان داد که رفتار تقویت‌کننده‌ها به هندسه پوسته وابسته می‌باشد. لی و شن با استفاده از تئوری مرتبه بالای پوسته، رفتار پس کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای مرکب تحت فشار خارجی و فشار محوری در محیط حرارتی را با استفاده از روش اغتشاشات بررسی کردند. شن به تحلیل کمانش و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط حرارتی پرداختند.

ارتعاش آزاد یک پوسته استوانه‌ای هدفمند را به روش المان محدود بررسی نمودند. در پژوهش دیگر طالبی [۱۵] ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوسته مخروطی کامپوزیتی با در نظر گرفتن تئوری مرتبه سوم و با به‌کارگیری روش مربعات دیفرانسیلی و اصل همپلتون مطالعه شد. با به‌کارگیری روش مربعات دیفرانسیلی، ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی با مواد مدرج تابعی تحت نیروهای ترمومکانیکی با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول توسط طالبی و همکاران [۱۶-۱۷] بررسی گردید. از تفاوت پژوهش حاضر با این بررسی به استفاده از روش تحلیلی می‌توان اشاره کرد. دانشجو و همکاران [۱۸] با به‌کارگیری روش مربعات دیفرانسیلی به بررسی ارتعاشات آزاد و سرعت بحرانی پوسته مخروطی کامپوزیتی لایه‌ای جداره ضخیم با شرایط مرزی مختلف و با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پرداخته شد. در این مطالعه با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکمه و شرایط مرزی استخراج گردید. از نوآوری پژوهش حاضر با این بررسی، استفاده از مدل تابع توانی و روش تحلیلی در حل معادلات می‌باشد. براساس تئوری لاو، تینو و همکاران [۱۹] به مطالعه و بررسی فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی پوسته‌های استوانه‌ای با مواد مدرج تابعی با روش تحلیلی پرداختند. اثرات سرعت دورانی، اثرات ابعاد تقویت‌کننده طولی بر فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت. تمایز پژوهش حاضر با این مقاله می‌توان به بررسی اثرات نیروهای محوری و فشاری، اثرات تعداد تقویت‌کننده حلقوی و طولی اشاره کرد.

پوسته‌های استوانه‌ای در اکثر موارد تحت بارهای دینامیکی قرار دارند و ممکن است دچار ارتعاش و کمانش و خستگی و در نهایت شکست شوند، از این‌رو، نیاز است که خصوصیات این سازه‌ها به خوبی بررسی گردد و از طرفی نیز با توجه به نیاز روزافزون طراحی سازه‌های سبک و با استحکام بالا نیاز است تا این سازه‌ها تا حد امکان سبک و مقاوم باشند. از جمله راه‌های رسیدن به این هدف تقویت بهینه پوسته با تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی و همچنین استفاده از مواد مدرج تابعی می‌باشد. لذا توجه محققان به بررسی این امر معطوف گردید که از جمله این تحقیقات، مصطفی و علی [۲۰] از روش انرژی برای تحلیل

است، که نیکل در سطح داخلی و فولاد در سطح خارجی پوسته قرار دارد. برای استخراج معادلات حاکم برای پوسته استوانه‌ای از روش انرژی و اصل همپلتون استفاده می‌شود و تاثیر پارامترهای مختلف نظیر سرعت دورانی پوسته، تقویت‌کننده‌های حلقوی و محوری، بار محوری، فشار داخلی و خواص مواد مدرج تابعی بررسی شده است.

۲- مواد تابعی مدرج

خواص مکانیکی یک استوانه مدرج تابعی می‌تواند با هر تابعی در جهت ضخامت تغییر نماید. در این تحقیق ماده مدرج تابعی، به صورت ترکیبی از دو فاز در نظر گرفته شده است و خواص آن بر حسب قانون مخلوط‌ها که تابعی از کسرهای حجمی اجزای سازنده می‌باشد، به‌طور پیوسته تغییر می‌نماید. با توجه به قانون مخلوط‌ها هر خاصیت موثری از ماده مانند η به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹]:

$$\eta = \eta_{m_1} V_{m_1} + \eta_{m_2} V_{m_2} \quad (1)$$

$$V_{m_1} + V_{m_2} = 1 \quad (2)$$

که در روابط فوق، η و V به ترتیب خاصیت ماده و کسر حجمی را نشان می‌دهند و زیر نویس m_1 و m_2 به ترتیب نماینده ماده اول و دوم هستند. تاکنون توابع مختلفی برای توصیف تغییرات کسر حجمی اجزای سازنده مواد مدرج تابعی ارائه شده است، که یکی از متداول‌ترین آنها قانون توانی است. مزایای استفاده از این تابع توانی این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش کاهش پیدا می‌کند. برای یک پوسته استوانه‌ای به ضخامت h در صورتی که صفحه مرجع آن در مرکز سطح در نظر گرفته شود داریم:

$$V_m = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (3)$$

که در آن، k توان کسر حجمی، V_m کسر حجمی ماده و z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می‌باشد. در نتیجه خصوصیات مکانیکی موثر یک ماده‌ی مدرج تابعی مانند مدول یانگ E ضریب پواسون ν و چگالی ρ با جای‌گذاری

باقری‌زاده و همکاران کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بستر الاستیک پسترناک را بررسی کردند. تحلیل رفتار کمانشی غیرخطی پوسته‌های کم عمق و ورق‌های مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های همگن توسط بیچ و همکاران پرداختند. قاسمی و همکاران با استفاده از روش معادل‌سازی، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مشبک لوزی تحت بار محوری را بررسی کردند. کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های فلزی واقع بر بستر الاستیک تحت فشار خارجی توسط دانگ و نگا ارائه شد. شاطرزاده و فروتن به تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت بار فشاری خارجی و احاطه شده با بستر الاستیک پرداختند. تحلیل غیرخطی کمانش پوسته‌های حلقوی تقویت‌شده تحت بارگذاری پیچشی تحت محیط حرارتی و محیط الاستیک توسط نین و بیچ انجام شده است. تانگ و نگاین توا به تاثیر تقویت‌کننده بر کمانش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارگذاری فشاری پرداختند.

بر طبق آنچه بیان شد موضوع ارتعاشات پوسته‌های مدرج تابعی تحت فشار محوری و داخلی خیلی محدودند، ولی تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین با مطالعه و بررسی مطالعات گذشته مشخص است که این مطالعات بیشتر در حوزه ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده حلقوی و محوری می‌باشد. لذا با وجود کاربرد فراوان پوسته‌ها مدرج تابعی تحت فشار محوری و داخلی و تاثیر تقویت‌کننده حلقوی و محوری بر فرکانس آن، مطالعات اندکی در این زمینه وجود دارد. علاوه بر این ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دوار با مواد مدرج تابعی، تحت فشار محوری و داخلی با تقویت‌کننده حلقوی و محوری بر اساس تئوری پوسته لاو با روش تحلیلی تاکنون بررسی نشده است.

در این مقاله، تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دوار تقویت‌شده تحت اثر بار محوری و فشار داخلی، با شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتهای استوانه با استفاده از تئوری پوسته لاو مطالعه می‌شود. مواد مدرج تابعی به کاررفته از نیکل و فولاد ضد زنگ تشکیل شده

مطابق شکل (۱) تقویت‌کننده‌های مستطیل شکل پوسته دارای ارتفاع d_r و d_s و پهنای b_r و b_s می‌باشند. که زیر نویس r و s به ترتیب به تقویت‌کننده حلقوی و طولی مربوط است. برای پوسته استوانه‌ای جدار نازک با در نظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌ای، روابط کلی تنش- کرنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\sigma\} = [Q]\{e\} \quad (۵)$$

که در آن $\{\sigma\}$ ، $\{e\}$ و $[Q]$ عبارتند از ماتریس تنش-کرنش و سفتی کاهش یافته، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{x\theta}\} \quad (۶)$$

$$\{e\}^T = \{e_x \quad e_\theta \quad e_{x\theta}\} \quad (۷)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

اجزاء ماتریس سفتی کاهش یافته $[Q]$ هم برای یک ماده ایزوتروپیک Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{11} = Q_{22}, \quad Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \quad (۹)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

طبق تئوری پوسته لاو، اجزاء بردار کرنش $\{e\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$e_x = e_1 + z k_1, \quad e_\theta = e_2 + z k_2 \quad (۱۰)$$

$$e_{x\theta} = \gamma + 2z \tau$$

در رابطه (۱۰) e_1 ، e_2 و γ کرنش‌های صفحه مرجع و k_1 ، k_2 و τ نیز انحنای سطح می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۶]:

$$\{e_1, e_2, \gamma\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \quad (۱۱)$$

$$\{k_1, k_2, \tau\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}$$

معادله (۳) در معادله (۱) به صورت رابطه (۴) تعیین می‌شود [۱۹]:

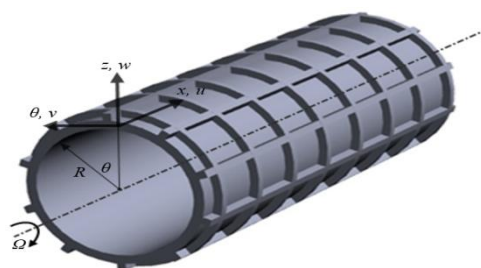
$$E(z) = E_{m1} + (E_{m2} - E_{m1}) \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k$$

$$\nu(z) = \nu_{m1} + (\nu_{m2} - \nu_{m1}) \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (۴)$$

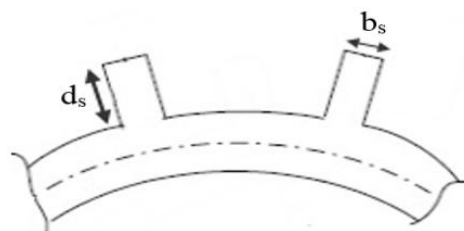
$$\rho(z) = \rho_{m1} + (\rho_{m2} - \rho_{m1}) \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k$$

۳- استخراج معادلات حاکم

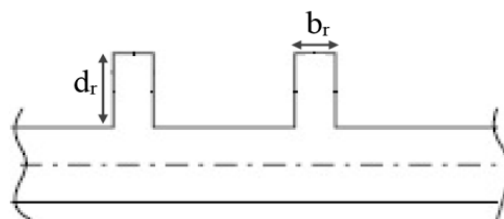
مطابق شکل (۱) پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی به طول L و ضخامت h با سرعت زاویه‌ای Ω به دور محور تقارن طولی در حال دوران است. این پوسته با n تقویت‌کننده حلقوی و m تقویت‌کننده طولی تقویت شده است. با در نظر گرفتن سامانه مختصات استوانه‌ای (z, θ, x) بر روی لایه میانی پوسته استوانه‌ای به عنوان سطح مرجع، جابه‌جایی‌های پوسته u ، v و w در جهت‌های x ، θ و z خواهند بود.



(الف) استوانه



(ب) طولیها



(ج) حلقوی‌ها

شکل (۱): شماتیک استوانه دورانی تقویت شده.

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$U_{\text{stringers}} = \frac{N_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[E_s A_s \varepsilon_s + \frac{G_s J_s}{R^2} \frac{\partial w^2}{\partial x \partial \theta} \right] dx d\theta \quad (16)$$

$$U_{\text{shell}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \{ \sigma \}^T \{ \varepsilon \} R dx d\theta \quad (12)$$

$$U_{\text{rings}} = \frac{N_R}{2L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[E_R A_R \varepsilon_R + \frac{G_R J_R}{R^2} \frac{\partial w^2}{\partial x \partial \theta} \right] R dx d\theta \quad (17)$$

بدین ترتیب با جای گذاری روابط (۵) - (۱۱) در رابطه (۱۲) انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای به صورت زیر در می‌آید [۲۷]:

در رابطه فوق، کرنش تقویت کننده‌ها در جهت محوری و در جهت حلقوی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$U_{\text{shell}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2A_{12}}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + 2B_{12} \left\{ \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} - \frac{2D_{12}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{A_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{2B_{22}}{R^3} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{D_{22}}{R^4} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{4B_{66}}{R^3} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \right\} + \frac{4D_{66}}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right\} R d\theta dx \quad (13)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (18)$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)$$

جهت محاسبه ممان اینرسی قطبی برای تقویت کننده‌های طولی و محوری از رابطه زیر استفاده می‌شود [۲۸]:

$$J = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192b}{\pi^5 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi d}{2b} \right] b^3 d \quad (19)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

انرژی جنبشی تقویت کننده‌های طولی و حلقوی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۸]:

در روابط فوق، A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} که به ترتیب عبارتند از سفتی کششی، سفتی پیچشی و سفتی خمشی و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۷]:

$$T_{\text{stringers}} = \frac{N_s A_s}{4\pi} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 + 2\Omega \left(v_s \frac{\partial w_s}{\partial t} - w_s \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) + \Omega^2 (v_s^2 + w_s^2) \right] dx d\theta \quad (20)$$

$$\{ A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} \} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{ 1, z, z^2 \} dz \quad (14)$$

و همچنین برای انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای دوار خواهیم داشت [۲۷]:

$$T_{\text{rings}} = \frac{N_R A_R}{2L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 + 2\Omega \left(v_s \frac{\partial w_s}{\partial t} - w_s \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) + \Omega^2 (v_s^2 + w_s^2) \right] R dx d\theta \quad (21)$$

$$T_{\text{shell}} = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2\Omega \left(v \frac{\partial w}{\partial t} - w \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \Omega^2 (v^2 + w^2) \right\} R dx d\theta \quad (15)$$

در روش تحلیلی حاضر فرض بر این است که فاصله تقویت کننده‌ها کم است و پوسته و تقویت کننده‌ها به صورت یک پارچه به یکدیگر متصل شده‌اند. براین اساس جابه‌جایی تقویت کننده‌ها در جهت x ، θ و z به صورت زیر با جابه‌جایی‌های پوسته در محل اتصال تعریف می‌شود [۲۷]:

در رابطه فوق ترم اول مربوط به انرژی جنبشی خود استوانه و دو ترم آخر مربوط به شتاب کوریولیس و جانب مرکز به علت دوران آن می‌باشد.

$$\{ u_s, v_s, w_s \} = \left\{ u - z \frac{\partial w}{\partial x}, v - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}, w \right\} \quad (22)$$

انرژی کرنشی تقویت کننده‌های طولی و حلقوی‌ها به صورت رابطه (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شود، که در این رابطه N_r ، N_s ، J_r ، J_s ، G_r ، G_s ، A_r ، A_s ، E_r ، E_s مدول الاستیسیته، مساحت سطح، مدول برشی، ممان

که در این رابطه، Ω سرعت دورانی پوسته استوانه‌ای می‌باشد، که در اثر چرخش پوسته نیروی گریز از مرکز در

در رابطه فوق U, V, W ضرایب ثابت نشان‌دهنده بزرگی ارتعاش و m و n اعداد موج محوری و موج محیطی می‌باشند و ω فرکانس طبیعی زاویه‌ای ارتعاش است.

با جای‌گذاری معادله (۲۷) در معادلات (۱۳) - (۱۸) و (۲۲)، (۲۳)، (۲۵) و همچنین با قرار دادن معادله (۲۲) در معادله پوسته (۲۰)، (۲۱)، (۲۴) و ترکیب آنها توابع انرژی جنبشی و پتانسیل کل سامانه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{shell}} + T_{\text{stringer}} + T_{\text{rings}} \\ U &= U_{\text{shell}} + U_{\text{stringers}} + U_{\text{rings}} + U_{\text{centrifugal}} + U_{\text{pressure}} \end{aligned} \quad (28)$$

حال جهت به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش رایلی ریتز، یک تابع انرژی Π ، به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi = T_{\text{max}} - U_{\text{max}} \quad (29)$$

که در آن T_{max} و U_{max} ماکزیمم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل پوسته می‌باشد، با استفاده از روش مینیمم کردن ریتز داریم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = \frac{\partial \Pi}{\partial V} = \frac{\partial \Pi}{\partial W} = 0 \quad (30)$$

در نهایت رابطه ماتریسی به‌صورت معادله زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

که ضرایب C_{11} ، C_{22} و ... عبارات‌های طولانی و پیچیده‌ای در ضرایب فرکانسی پوسته می‌باشند، که برای داشتن جواب بدیهی غیر صفر در مینیمم ماتریس ضرایب را باید مساوی صفر قرار دهیم یعنی:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

با بسط این دترمینان، معادله مشخصه درجه شش زیر حاصل می‌شود که جواب‌های آن فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای خواهد بود.

$$\begin{aligned} d_0 \omega^6 + d_1 \omega^5 + d_2 \omega^4 + d_3 \omega^3 \\ + d_4 \omega^2 + d_5 \omega^1 + d_6 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

با حل معادله فوق به‌وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب شش ریشه به‌دست می‌آید که سه تای آن مثبت و سه تای آن منفی است و از این میان آن دو عددی که قدر مطلق

پوسته ایجاد می‌شود که سبب ایجاد کشش حلقوی اولیه می‌شود. به دلیل هندسه تقویت‌کننده‌ها انرژی کرنشی به‌وجود آمده بر اثر نیروی گریز از مرکز تنها در تقویت‌کننده‌های حلقوی وجود دارد و مقدار این انرژی در تقویت‌کننده‌های طولی قابل نظر کردن است. بنابراین انرژی کرنشی در تقویت‌کننده‌های حلقوی در اثر کرنش حلقوی ناشی از دوران به‌صورت زیر بیان می‌شود: [۲۷]

$$\begin{aligned} U_{\text{Shell centrifugal}} &= \frac{\Omega^2 R}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right] dx d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{Ring centrifugal}} &= \frac{A_R \Omega^2 R}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_s}{\partial \theta} + w_s \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial \theta} - v_s \right)^2 \right] dx d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

در صورتی که پوسته استوانه‌ای تحت تأثیر فشار محوری ثابت P و فشار خارجی دارای تقارن محوری $q(x)$ باشد، انرژی پتانسیل که در پوسته به‌وجود می‌آید، معادل مقدار زیر است:

$$\begin{aligned} U_{\text{pressur}} &= - \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\frac{q(x)}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + w \right) w \right] dx d\theta \\ &\quad - \frac{P}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 R^2 dx d\theta \end{aligned} \quad (25)$$

۴- تحلیل ارتعاشی به روش ریتز

جهت به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی با در نظر گرفتن شرایط مرزی دوسر ترکیه‌گاه ساده در $x=0$ و $x=L$ شرایط زیر برقرار است:

$$v = w = N_x = M_x = 0 \quad (26)$$

که میدان جابه‌جایی زیر شرایط مرزی فوق را به‌طور کامل ارضا می‌کند [۲۸]:

$$\begin{aligned} u &= U \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v &= V \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ w &= W \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

طبیعی استوانه دوار و نیز صحت‌سنجی نتایج پرداخته می‌شود.

۵-۱- صحت‌سنجی نتایج

برای اطمینان از روش حل ارائه‌شده برای استوانه دورانی تقویت‌شده، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج سایر مقالات مقایسه شده است. این مقایسه در دو بخش انجام شده است، در بخش اول نتایج حاصل از این مطالعه با فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه دورانی بدون تقویت‌کننده در جدول ۱ مورد مقایسه قرار گرفته است و همچنین در بخش دوم جهت مقایسه بررسی صحت مدل‌سازی تقویت‌کننده‌ها، نتایج حاصل از تحلیل حاضر با نتایج مرجع برای یک پوسته استوانه تقویت‌شده با طولی مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی پوسته تقویت‌شده با طولی در جدول ۲ و مقایسه فرکانسی آن در جدول ۳ آورده شده است. مقایسه‌ها نشان می‌دهد که نتایج به‌دست‌آمده تطابق خوبی با سایر نتایج دارد و تفاوت در پاسخ‌ها ناچیز است.

آنها کوچکتر از دیگر ریشه‌ها می‌باشد فرکانس‌های اصلی استوانه می‌باشد. لازم به ذکر است فرکانس‌های اصلی برای استوانه دوار که سرعت دورانی آن مشخص و ثابت است برای هر مد ارتعاشی طولی و محیطی که از اندیس‌های m و n استفاده می‌گردد دو مقدار ویژه مثبت و منفی داریم. این دو مقدار ویژه به‌ترتیب مربوط به موج‌های پسرو (backward) و پیشرو (forward) می‌باشند، که در استوانه ثابت بدون سرعت دورانی این دو مقدار یکسان می‌باشند. هنگامی که استوانه شروع به دوران می‌کند. این دو مقدار متفاوت پدیدار می‌گردند که مقدار مثبت مربوط به موج پسرو است که در جهت مخالف چرخش استوانه بوده و مقدار منفی مربوط به موج پیشرو است که هم جهت چرخش استوانه می‌باشد.

۵- نتایج و بحث

در این بخش به بررسی پارامترهای مختلف بر فرکانس

جدول (۱): مقایسه فرکانس طبیعی برای استوانه دوار با شرایط مرزی دوسر گیردار به‌ازای

$$L/R=10, h/R=0.05, \nu=0.3, \Omega=5 \text{ rad/s.}$$

اختلاف	کار حاضر	پیشرو [۳۰]	اختلاف	کار حاضر	پسرو [۳۰]	n
.....	۰/۰۲۹۸	۰/۰۳۵۸	۱
۰/۰۲۰	۰/۰۵۳۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۱۷	۰/۰۶۱۰	۰/۰۶۲۱	۲
۰/۰۱۶	۰/۱۰۸۷	۰/۱۱۰۵	۰/۰۱۷	۰/۱۱۴۵	۰/۱۱۶۵	۳
۰/۰۰۲	۰/۲۰۹۶	۰/۲۱۰۱	۰/۰۰۲	۰/۲۱۴۲	۰/۲۱۴۸	۴
۰/۰۰۱	۰/۳۳۹۷	۰/۳۳۹۹	۰/۰۰۱	۰/۳۴۳۴	۰/۳۴۳۸	۵

جدول (۲): خصوصیات هندسی و مکانیکی تقویت‌کننده‌ها

E(GPa)	ν	پهنای طولی (m)	ارتفاع طولی (m)	L (m)	h (m)	R (m)	ρ (kg/m ³)
۶۸/۵	۰/۳	۰/۰۰۲۵۵	۰/۰۰۷۰۲	۰/۶۰۹۶	۰/۶۵×۱۰ ^{-۳}	۰/۲۴۲	۲۷۱۴

۵-۲- بررسی ضریب تابع توانی مواد مدرج تابعی

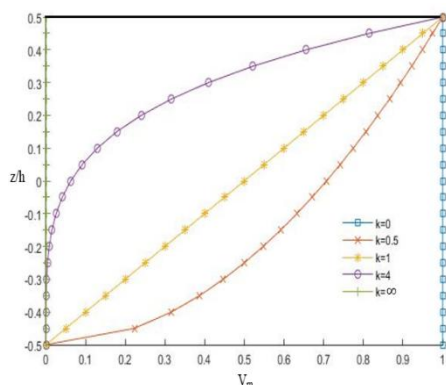
در این تحقیق ماده مدرج تابعی به‌صورت ترکیبی از فولاد و نیکل در نظر گرفته شده است که فولاد در روی سطح خارجی و نیکل در سطح داخلی قرار دارد و خواص این مواد در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول (۳): مقایسه فرکانس‌های پایه پوسته استوانه‌ای غیر

دوار با ۶۰ طولی

کار حاضر	مرجع [۸]	عدد موج محیطی (n)
۱۱۴۶/۸۶	۱۱۴۱	۱
۶۷۵/۶۵	۶۷۴	۲
۴۲۷/۸۶	۴۲۷	۳
۲۹۷/۳۰۹	۲۹۶	۴

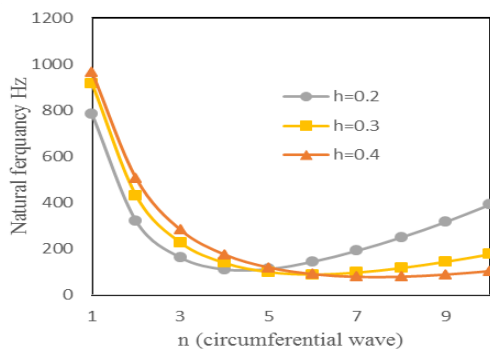
کاهش می‌یابد دلیل این امر این است که مطابق شکل ۲ و توضیحات بیان شده در مورد تاثیر ضریب تابع توانی در خواص ماده مدرج تابعی، افزایش ضریب تابع توانی باعث افزایش کسر حجمی نیکل در پوسته استوانه می‌شود و در نتیجه با توجه به اینکه نیکل دارای جرم بیشتر و مدول الاستیک کمتر، نسبت به فولاد است باعث کاهش سفتی و افزایش چگالی پوسته و در نهایت باعث کاهش فرکانس‌های پایه استوانه می‌گردد.



شکل (۲): تغییرات ضریب تابع توانی در طول ضخامت پوسته استوانه.

۵-۳- بررسی ضخامت بر روی فرکانس‌های محیطی

مطابق شکل (۳)، بررسی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت بی‌بعد شده (h/L) فرکانس‌های طبیعی محیطی از مود اول تا چهارم افزایش می‌یابند ولی از مود ششم به بعد کاهش می‌یابند که در این حالت فرکانس مود پنجم به عنوان واسط تغییر می‌چندانی نمی‌یابد. در مورد تغییرات فرکانس‌های مودهای طولی مطابق جدول ۶ افزایش ضخامت پوسته باعث افزایش فرکانس تمامی این مودها می‌شود اما تاثیر این پارامتر (ضخامت) بر روی فرکانس مودهای محیطی بسیار ناچیز می‌باشد.



شکل (۳): تغییرات فرکانس بر حسب شماره مود محیطی و نسبت ضخامت به طول پوسته استوانه‌ای.

جدول (۴): خواص تشکیل‌دهنده ماده مدرج تابعی

نوع ماده	ν	$\rho(\text{kg/m}^3)$	$E(\text{N/m}^2)$
فولاد	۰/۳۱۷۷	۸۱۶۶	$۲/۰۷۷۸۸ \times ۱۰^{۱۱}$
نیکل	۰/۳۱۰۰	۸۹۰۰	$۲/۰۵۰۹۸ \times ۱۰^{۱۱}$

مطابق رابطه (۴) هنگامی که ضریب تابع توانی صفر است پوسته استوانه به طور کامل از ماده شماره ۱ تشکیل می‌شود و با افزایش ضریب k خواص ماده دوم افزایش می‌یابد به طوری که مطابق شکل در $k=1$ خواص به صورت خطی تغییر می‌یابد و با ادامه روند (افزایش ضریب k) تا $k = \infty$ خواص به طور کامل متعلق به ماده شماره ۲ است. با توجه به توضیحات داده شده در جدول ۵ تاثیر ضریب تابع توانی بر روی فرکانس مودهای محیطی مورد بررسی قرار گرفته است. از نتایج اصلی این پژوهش نشان داده شد که افزایش ضریب تابع توانی ماده مدرج تابعی موجب کاهش فرکانس استوانه پایه می‌شود. این به این دلیل است که افزایش ضریب توانی موجب افزایش نرمی سامانه و بالطبع کاهش فرکانس می‌شود.

جدول (۵): تغییرات فرکانس مود محیطی در اثر تغییر

ضریب تابع توانی

$K = \infty$	$K = 4$	$K = 1$	$K = 0$	n
۱۳/۸۹۴۹	۱۳/۰۱۹۳	۱۳/۲۱۲۱	۱۳/۵۴۹۳	۱
۱۳/۱۹۶۰	۱۳/۳۳۱۴	۱۳/۵۱۹۶	۱۳/۸۶۵۵	۲
۳۵/۲۵۷۱	۳۵/۷۲۲۲	۳۶/۲۲۳۷	۳۷/۱۵۰۹	۳
۶۷/۶۲۵۶	۶۸/۳۲۴۱	۶۹/۲۸۳۳	۷۱/۰۵۶۷	۴
۱۰۹/۲۹۶۱	۱۱۰/۴۲۴۵	۱۱۱/۹۷۴۷	۱۱۴/۸۴۱۱	۵
۱۶۰/۲۸۶۱	۱۶۱/۹۴۱۱	۱۶۴/۲۱۴۴	۱۶۸/۴۱۸۳	۶
۲۲۰/۵۷۳۱	۲۲۲/۸۵۱	۲۲۵/۹۷۹۹	۲۳۱/۷۶۴۷	۷
۲۹۰/۱۵۱۴	۲۹۳/۱۴۵۹	۲۹۷/۲۶۰۸	۳۰۴/۸۷۱۶	۸
۳۶۹/۰۱۱۶	۳۷۲/۸۲۱۱	۳۷۸/۰۵۵۴	۳۸۷/۷۳۳۲	۹
۴۵۷/۱۵۵۱	۴۶۱/۸۷۵۷	۴۶۸/۳۵۹۶	۴۸۰/۳۴۹۲	۱۰

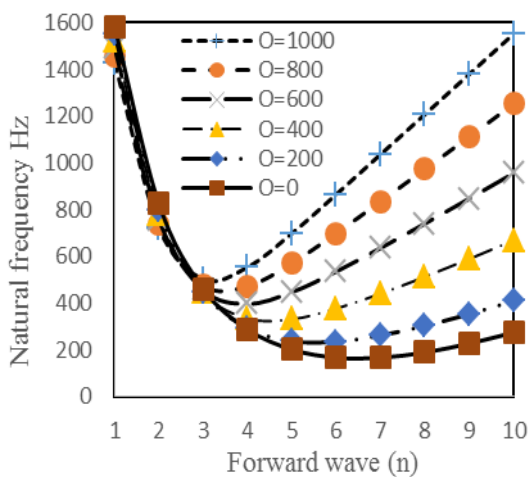
مطابق جدول ۵ دیده می‌شود که با افزایش ضریب تابع توانی، فرکانس پایه تمامی مودهای محیطی کاهش می‌یابد. دلیل این امر این است که مطابق شکل ۲ و توضیحات بیان شده در مورد تاثیر ضریب تابع توانی در خواص ماده مدرج تابعی، افزایش ضریب تابع توانی باعث افزایش کسر حجمی نیکل در پوسته استوانه می‌شود و در نتیجه با توجه به این که نیکل دارای جرم بیشتر و مدول الاستیک کمتر، نسبت به فولاد است باعث کاهش سفتی و افزایش چگالی پوسته و در نهایت باعث کاهش فرکانس‌های پایه استوانه می‌گردد. مطابق این جدول دیده می‌شود که با افزایش ضریب تابع توانی، فرکانس پایه تمامی مودهای محیطی

جدول (۶): مقایسه تغییرات فرکانس طولی با تغییر پارامتر (h/L)

m=۱۰	m=۹	m=۸	m=۷	m=۶	m=۵	m=۴	m=۳	m=۲	m=۱	10^{-2} h/L ×
۳۲۵۴/۲۰۷	۳۲۳۹/۵۴۷	۳۲۱۸/۷۵۳	۳۱۸۸/۲۶۸	۳۱۴۰/۶۴۵	۳۰۶۰/۱۸۴	۲۹۰۹/۷۳۲	۲۵۹۵/۴۴۹	۱۹۳۲/۲۲۸	۸۵۳/۲۸۷	$\cdot 2h/L =$
۳۲۵۴/۶۵۵	۳۲۳۹/۷۶۳	۳۲۱۸/۹۴۷	۳۱۸۸/۳۸۴	۳۱۴۰/۷۰۸	۳۰۶۰/۲۱۳	۲۹۰۹/۷۵۲	۲۵۹۵/۴۵۵	۱۹۳۲/۲۲۸	۸۵۳/۲۸۷	$\cdot 3h/L =$
۳۲۵۵/۲۹۱	۳۲۴۰/۱۷۸	۳۲۱۹/۲۰۸	۳۱۸۸/۵۴۵	۳۱۴۰/۷۹۲	۳۰۶۰/۲۵۸	۲۹۰۹/۷۷۸	۲۵۹۵/۴۶۱	۱۹۳۲/۲۱۸	۸۵۳/۲۸۷	$\cdot 4h/L =$

۴-۵- تاثیر سرعت دورانی

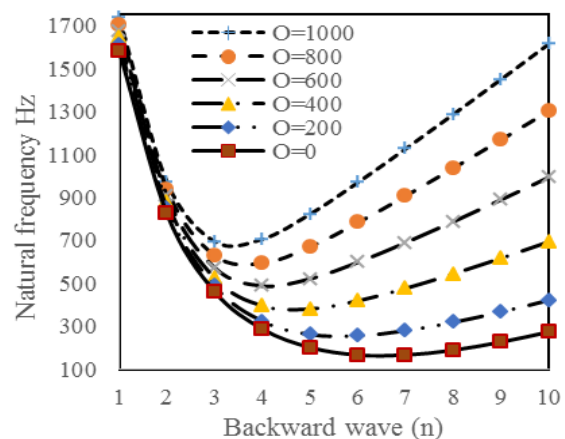
در شکل‌های ۴ و ۵ اثر سرعت دورانی بر مدهای محیطی پسرو و پیشرو نشان داده شده است و همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش سرعت دورانی از ۰ تا ۱۰۰۰ رادیان بر ثانیه تمامی فرکانس‌های مدهای محیطی پسرو افزایش می‌یابند ولی در مورد فرکانس‌های محیطی پیشرو با افزایش سرعت دورانی استوانه مود اول و دوم آن کاهش می‌یابد و از مود سوم به بعد فرکانس‌های محیطی افزایش می‌یابند و سیر صعودی به خود می‌گیرند.



شکل (۵): تغییرات فرکانس محیطی پیشرو در سرعت دورانی مختلف

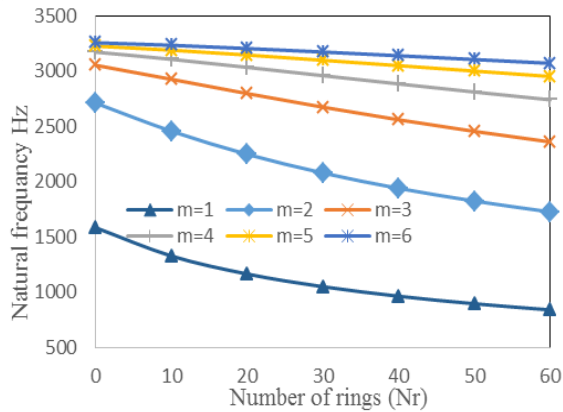
۵-۵- تاثیر تقویت‌کننده‌های حلقوی و محوری

شکل ۶ تا ۹ تاثیر تعداد طولیها و حلقوی‌ها را بر روی فرکانس طبیعی مدهای محیطی و محوری در حالت غیردوار استوانه تقویت‌شده نشان می‌دهد. درمورد طولیها مطابق شکل‌های ۶ و ۷ بررسی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش آنها فرکانس تمامی مدهای محوری به‌طور محسوسی کاهش می‌یابد و همچنین در مورد مدهای محیطی اول و تا سوم با افزایش تعداد طولیها فرکانس آنها نیز کاهش می‌یابد، ولی از مدهای چهارم به بعد با افزایش تعداد آنها مقدار فرکانس طبیعی سامانه افزایش می‌یابد.

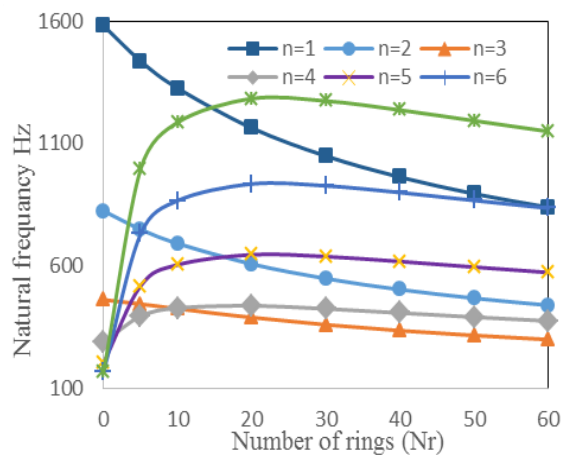


شکل (۴): تغییرات فرکانس محیطی پسرو در سرعت دورانی مختلف

روی افزایش فرکانس‌های مودهای محیطی چهارم به بعد استوانه به صورت محسوسی زیاد می‌باشد.



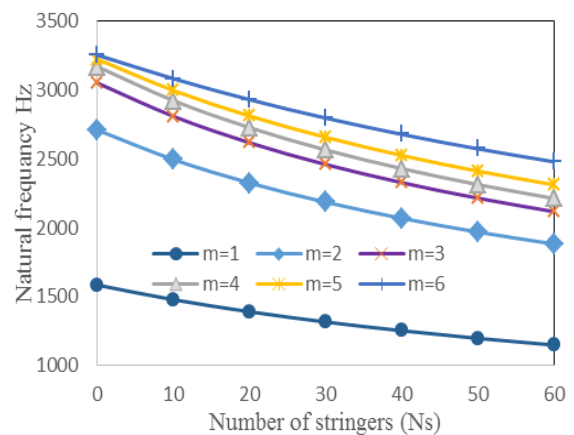
شکل (۸): تاثیر تعداد حلقوی‌ها بر روی فرکانس مودهای محوری



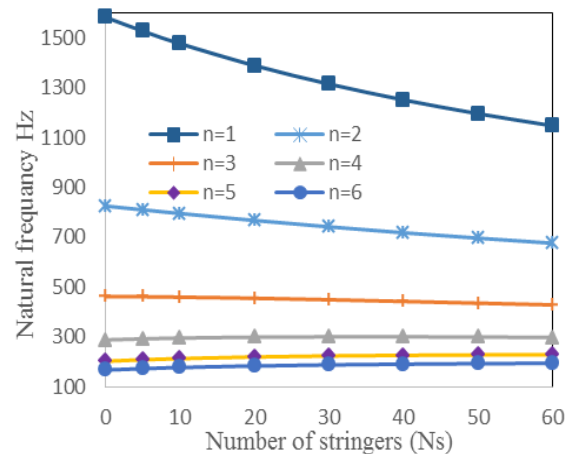
شکل (۹): تاثیر تعداد حلقوی‌ها بر روی فرکانس مودهای محیطی

۵-۶- تاثیر فشار داخلی

در شکل ۱۰ به بررسی تغییرات فشار داخلی استوانه بر روی فرکانس‌های طبیعی مودهای محیطی استوانه پرداخته شده است. با افزایش فشار داخلی استوانه مطابق شکل (۱۰) فرکانس‌های پایه استوانه از مود سوم افزایش می‌یابد و مودهای اول و دوم محیطی تقریباً بدون تغییر باقی می‌مانند و مطابق جدول ۷ فشار داخلی استوانه تغییری بر روی فرکانس‌های مودهای محوری ایجاد نمی‌کند و به عبارت دیگر فشار داخلی استوانه تاثیری بر روی مودهای محیطی آن ندارد.



شکل (۶): تاثیر تعداد طولی بر روی فرکانس مودهای محوری



شکل (۷): تاثیر تعداد طولی بر روی فرکانس مودهای محیطی

در مورد تقویت‌کننده‌های حلقوی (حلقوی‌ها) مطابق شکل‌های ۸ و ۹ بررسی‌ها نشان می‌دهد که همانند طولی‌ها با افزایش تعداد آنها فرکانس محوری تمامی مودهای ارتعاشی استوانه و همچنین مودهای اول تا سوم محیطی کاهش می‌یابد ولی فرکانس مودهای محیطی چهارم به بعد تا تعداد ۲۰ حلقوی افزایش و در ادامه مقدار فرکانس کمی کاهش می‌یابد.

در مقایسه تاثیر این دو نوع تقویت‌کننده بر روی فرکانس طبیعی استوانه دوار با مواد مدرج تابعی ملاحظه می‌شود که شیب کاهش فرکانس در طولی‌ها در مودهای محوری زیادتر است و همچنین تاثیر افزایش حلقوی‌ها بر

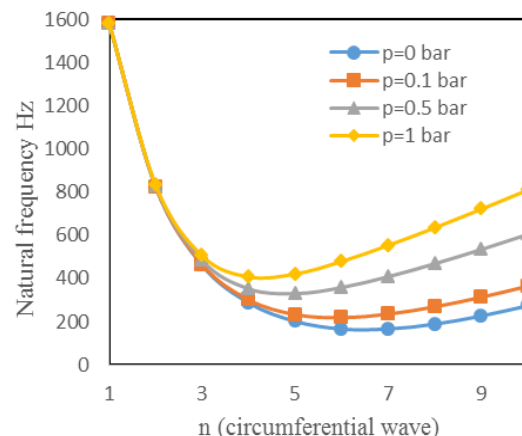
۶- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای دوار مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی تحت فشار داخلی و بار محوری بررسی شد و مطالعات نشان داد:

- افزایش سرعت دورانی موجب افزایش فرکانس‌های محیطی پسترو شده، ولی در حالت پیشرو فرکانس مود اول و دوم کاهش یافته و از مود سوم به بعد افزایش می‌یابند.
- افزایش ضریب تابع توانی ماده مدرج تابعی موجب کاهش فرکانس استوانه پایه می‌شود.
- افزایش ضخامت پوسته باعث افزایش فرکانس تمامی مودهای طولی می‌گردد و در مورد فرکانس‌های مودهای محیطی تا مود پنجم رابطه مستقیم داشته و بعد از آن رابطه عکس با ضخامت دارد.
- افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی رابطه عکسی با فرکانس پایه محوری دارد.
- اثرگذاری فشار داخلی فقط بر روی مودهای محیطی می‌باشد، درحالی‌که بار محوری تاثیر ناچیزی بر فرکانس‌های استوانه دارد.

۷- مراجع

1. Loy, C., Lam, K., and Reddy, J. "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 41, No. 3, pp. 309-324, 1999.
2. Ansari, R. and Darvizeh, M. "Prediction of Dynamic Behaviour of FGM Shells Under Arbitrary Boundary Conditions", Composite Structures, Vol. 85, No. 4, pp. 284-292, 2008.
3. Matsunaga, H. "Free vibration and stability of functionally Graded Circular Cylindrical Shells According to a 2D Higher-order Deformation Theory", Composite Structures, Vol. 88, No. 4, pp. 519-531, 2009.
4. Ebrahimi, F. and Sepiani, H. A. "An Investigation on the Influence of Transverse Shear and Rotary Inertia on Vibration and Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 17, No. 3, pp. 176-182, 2010.
5. Patel, B., Gupta, S., Loknath, M., and Kadu, C. "Free Vibration Analysis of functionally Graded



شکل (۱۰): بررسی تغییرات فشار داخلی استوانه بر روی فرکانس‌های طبیعی مودهای محیطی استوانه.

جدول (۷): بررسی تغییرات فشار داخلی استوانه بر روی فرکانس‌های طبیعی مودهای محوری استوانه.

P=۱ bar	P=۰/۵ bar	P=0	m
۱۵۸۲/۴۶۲	۱۵۸۲/۴۶۲	۱۵۸۲/۴۶۲	۱
۲۷۰۹/۶۹۱	۲۷۰۹/۶۹۱	۲۷۰۹/۶۹۱	۲
۳۰۵۱/۸۳۳	۳۰۵۱/۸۳۳	۳۰۵۱/۸۳۳	۳
۳۱۷۰/۸۲۹	۳۱۷۰/۸۲۹	۳۱۷۰/۸۲۹	۴
۳۲۲۵/۱۷۳	۳۲۲۵/۱۷۳	۳۲۲۵/۱۷۳	۵

۵-۷- تاثیر بار فشاری محوری

با توجه به رابطه به کار برده شده که برای حالت فشاری معتبر می‌باشد، با توجه به جدول ۸ و ۹ با افزایش فشار محوری بر روی استوانه، فرکانس‌های مودهای محیطی و محوری خیلی کم کاهش می‌یابد، در ضمن رفته رفته با افزایش عدد مود این تغییرات محسوس‌تر می‌شود.

جدول (۸): بررسی تغییرات نیروی محوری بر روی

فرکانس‌های طبیعی مودهای محوری استوانه

m=۵	m=۴	m=۳	m=۲	m=۱	P
۲۸۳۰/۷۰	۲۷۳۴/۵۹	۲۵۳۴/۹۷	۲۰۵۳/۷۵	۱۰۹۳/۱	Pa ۱۰ ^۶
۲۹۱۷/۹۵	۲۷۹۱/۶۶	۲۵۶۷/۷۱	۲۰۶۸/۶۳	۱۰۹۸/۱	Pa

جدول (۹): بررسی تغییرات نیروی محوری بر روی

فرکانس‌های طبیعی مودهای محیطی استوانه

n=۵	n=۴	n=۳	n=۲	n=۱	P
۵۸۹/۳۶	۴۰۴/۶۵	۳۷۹/۹۵	۵۹۳/۶۶	۱۰۹۳/۱	Pa ۱۰ ^۶
۶۰۵/۶۷	۴۲۷/۵۴	۴۰۳/۱۳	۶۰۷/۱	۱۰۹۸/۱	Pa

15. Talebitooti, M. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Rotating Laminated Conical Shells: Layerwise Differential Quadrature (LW-DQ) Method", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 5 pp. 1-17, 2013.
16. Talebitooti, M., Daneshjou, K., and Talebitooti, R. "Vibration and Critical Speed of Orthogonally Stiffened Rotating FG Cylindrical Shell Under Thermo-Mechanical Loads Using Differential Quadrature Method", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 36, No. 2, pp. 160-188, 2013.
17. Talebitooti, M. "Thermal Effect on Free Vibration of Ring-Stiffened Rotating Functionally Graded Conical Shell with Clamped Ends", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 25, No. 2, pp. 1-11, 2017.
18. Daneshjou, K., Talebitooti, M., and Talebitooti, R. "Free Vibration and Critical Speed of moderately Thick Rotating Laminated Composite Conical Shell Using Generalized Differential Quadrature Method", *Applied Mathematics & Mechanics*, Vol. 34, No. 4, 2013.
19. Minh Tu, T. and Van Loi, N. "Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, No.15, pp. 2952-2969, 2016.
20. Mustafa, B. and Ali, R. "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells", *Computers & structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 355-363, 1989.
21. Azimi, P., Mehrabani, M., and Jafari, A. "Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell", *Aerospace Mech. J*, Vol. 7, No. 1, pp. 81-90, 2011.
22. Talebitooti, M., Ghayour, M., Ziaei-Rad, S. and Talebitooti, R. "Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 3, pp. 201-215, 2010.
23. Daneshjou, K., Talebitooti, M., Talebitooti, R., and Googarchin, H. S. "Dynamic Analysis and Critical Speed of Rotating Laminated Conical Shells with Orthogonal Stiffeners Using Generalized Differential Quadrature Method", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, No. 2, pp. 349-390, 2013.
24. Daneshjou, K., Madoliat, R., and Talebitooti, M. "Three-dimensional Vibration Analysis and Critical Speed of Rotating Orthogonally Elliptical Cylindrical Shells Using Higher-order Theory", *Composite Structures*, Vol. 69, No. 3, pp. 259-270, 2005.
6. Pradhan, S., Loy, C., Lam, K., and Reddy, J. "Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions", *Applied Acoustics*, Vol. 61, No. 1, pp. 111-129, 2000.
7. Santos, H., Soares, C. M. M., Soares, C. A. M., and Reddy, J. "A semi-Analytical Finite Element Model for the Analysis of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Under Thermal Shock", *Composite Structures*, Vol. 86, No. 1, pp. 10-21, 2008.
8. Dai, H. L. and Rao, Y. N. "Vibration and Transient Response of a FGM Hollow Cylinder", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 21, No. 6, pp. 468-476, 2014.
9. Asgari, M. and Akhlaghi, M. "Natural Frequency Analysis of 2D-FGM Thick Hollow Cylinder Based on Three-dimensional Elasticity Equations", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 30, No. 2, pp. 72-81, 2011.
10. Yas, M. and Aragh, B. S. "Elasticity Solution for Free Vibration Analysis of Four-parameter Functionally Graded Fiber Orientation Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 30, No. 5, pp. 631-638, 2011.
11. Li, S. R., Fu, X. H., and Batra, R. "Free Vibration of Three-Layer Circular Cylindrical Shells with Functionally Graded Middle Layer", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, No. 6, pp. 577-580, 2010.
12. Iu, V. and Chia, C. "Non-linear Vibration and Postbuckling of Unsymmetric Cross-Ply Circular Cylindrical Shells", *International journal of solids and structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 195-210, 1988.
13. Tornabene, F. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power-Law Distribution", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 37, pp. 2911-2935, 2009.
14. Pradyumna, S. and Bandyopadhyay, J. "Free Vibration Analysis of functionally Graded Curved Panels Using a Higher-Order Finite Element Formulation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 1, pp. 176-192, 2008.

28. Daneshjou, K., Madoliat, R., and Talebitooti, M. "Three-dimensional Vibration Analysis and Critical Speed of Rotating Orthogonally Stiffened Laminated Cylindrical Shells Under Axial Load and Pressure", *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 94-80, 2012.
29. Lam, K. and Hua, L. "Vibration Analysis of a Rotating Truncated Circular Conical Shell", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 17, pp. 2183-2197, 1997.
30. Sun, S., Chu, S., and Cao, D. "Vibration Characteristics of Thin Rotating Cylindrical Shells With Various Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 18, pp. 4170-4186, 2012.
- Stiffened Laminated Cylindrical Shells Under Axial Load and Pressure", 2013.
25. Huy Bich, D., Van Dung, D., and Hoai Namb, V. "Nonlinear Dynamical Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Cylindrical Panels", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 8, pp. 2465-2473, 2012.
26. Mercan, K., Demir, Ç., and Civalek, Ö. "Vibration Analysis of FG Cylindrical Shells with Power-Law Index Using Discrete Singular Convolution Technique", *Curved and Layered Structures*, Vol. 3, No. 1, pp. 82-90, 2016.
27. Zhao, X., Liew, K., and Ng, T. "Vibrations of Rotating Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 2, pp. 529-545, 2002.