

رویکرد برنامه‌ریزی شده بهره تطبیقی به منظور کنترل مانور طولی

هواپیما

سید احسان رضوی^۱

گروه مهندسی برق، واحد مشهد

دانشگاه آزاد اسلامی

مشهد، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۶/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۲۳)

چکیده

ناپایداری، نایقینی مدل و اختلالات موجود در سامانه یک هواپیما که در حالت پرواز مداوم و مستقیم‌الخط قرار دارد و می‌خواهد یک مانور طولی را انجام دهد سبب می‌شود که انجام چنین مانوری بدون کمک یک کنترل‌کننده امکان‌پذیر نباشد. با توجه به آنکه معادلات دینامیکی هواپیما غیرخطی هستند، استفاده از یک کنترل‌کننده خطی که بر مبنای خطی‌سازی در یک نقطه کار طراحی شده باشد، کارآیی رضایت‌بخشی نخواهد داشت. به این ترتیب، لزوم استفاده از کنترل‌کننده‌های غیرخطی محرز می‌گردد. در این مقاله جهت طراحی کنترل‌کننده از روش برنامه‌ریزی شده بهره استفاده شده است. طراحی کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده بهره، شامل دو مرحله متمایز است: مرحله اول، طراحی کنترل‌کننده‌های خطی که اجزای کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده بهره می‌باشند. مرحله دوم، برنامه‌ریزی یعنی تعیین ضابطه‌ای که تحت آن، یکی از کنترل‌کننده‌های خطی در حلقه بسته قرار گیرند. کنترل‌کننده‌های خطی مورد نیاز از طریق روش‌های کنترل بهینه انتخاب گردیده‌اند و جهت تعیین تعداد و محل نقاط خطی‌سازی شده و تعیین معیاری برای استفاده از هر یک از کنترل‌کننده‌های خطی از مفاهیم حاشیه پایداری و متریک v -gap استفاده شده است. لازم به ذکر است در این تحقیق مانور طولی که به‌عنوان فرمان و یا سیگنال مبنا از هواپیما در حالت پرواز مداوم مستقیم‌الخط خواسته شده، مقدار ثابت چرخش برای زاویه پیچ است. نتایج نشان داد با ترکیب کنترل‌کننده غیرخطی برنامه‌ریزی شده بهره و سامانه غیرخطی در یک حلقه بسته، مانور طولی مورد نظر به نحو مطلوبی صورت پذیرفت.

واژه‌های کلیدی: مانور طولی، پرواز مداوم مستقیم‌الخط، برنامه‌ریزی شده بهره، حاشیه پایداری، معیار اندازه‌گیری عدم قطعیت

Adaptive Gain Scheduling Strategies for Aircraft Longitudinal Maneuvers Control

S. E. Razavi

Department of Electrical Engineering,
Mashhad Branch, Islamic Azad University,
Mashhad, Iran,

(Received: 09/September/2018 ; Accepted: 12/February/2019)

ABSTRACT

In an aircraft system that is in the rectilinear steady flight state ready for a longitudinal maneuver, instability, model uncertainty, and disturbances could make the maneuver impossible without the help of a controller. Considering that the dynamical equations of the aircraft are nonlinear, using a linear controller designated based on linearization at the equilibrium of the point may not be entirely efficient. Therefore, using non-linear controllers is of utmost importance. The present study aimed to design a controller using the gain scheduling method. Designing the gain scheduling-based controller was performed in two stages. Initially, linear controllers were developed, which were the controlling components of gain scheduling. The second stage involved planning in order to determine the criteria based on which one of the linear controllers was in the closed loop. The required linear controllers were selected through optimal control methods. In order to verify the number and location of the linearized points and criteria for using the linear controllers, the concepts of stability margin and v -gap metric were applied. Furthermore, longitudinal maneuver, which is requested as a command or a base signal in the rectilinear steady flight state, was considered as the rotational constant value for the Pitch angle. According to the results, combining the nonlinear gain scheduling controller and a nonlinear system in a closed loop could contribute to the desired longitudinal maneuver.

Keywords: Longitudinal manoeuvring, steady State Rectilinear Flight, Gain-Scheduling, Stability Margin, v -gap metric

۱- مقدمه

طراحی فقط یک کنترل کننده، معادلات غیرخطی در چند نقطه کار خطی سازی شوند و چند الگوی خطی نامتغیر با زمان به دست آید و چند کنترل کننده طراحی شود (البته، همه این محاسبات قبلا و به صورت برون خطی^۱ انجام می شود). سپس در عمل، در هر لحظه از زمان، بسته به اینکه کدام یک از نقاط کار خطی سازی به شرایط پلنت غیرخطی نزدیک تر باشد، کنترل کننده خطی متناظر با آن نقطه کار خطی سازی در حلقه بسته قرار داده می شود. در حقیقت این راه حل، یکی از روش های متداول در کنترل غیرخطی برای طراحی کنترل کننده است که به برنامه ریزی شده بهره شهرت دارد. روش مورد استفاده در این مقاله نیز طراحی برای کنترل کننده غیرخطی، برنامه ریزی بهره است.

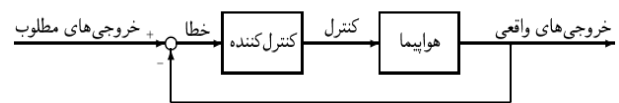
مرجع [۳-۱] ضمن استفاده از روش برنامه ریزی شده بهره جهت طراحی کنترل پرواز یک نقل فضایی بی خلبان به نام HOPE-X، نکات و شیوه های بنیادی ارزنده ای را عنوان می نماید که می توانند در مسائلی به غیر از نقل فضایی نیز مفید باشند. این مرجع، مفاهیمی مانند سامانه های خطی با پارامتر متغیر، نابرابری های ماتریسی خطی، حاشیه پایداری، و متریک v -gap از مرجع [۴-۷] را در هم آمیخته، و با تثبیت نقاط کار خطی سازی، محل آن نقاط را از طریق کمینه سازی عددی محاسبه و به این طریق روشی برای پیاده سازی برنامه ریزی بهره ارائه می نماید.

دو پرسش اساسی در برنامه ریزی بهره عبارتند از:

- (۱) چگونگی انتخاب نقاط کار خطی سازی
- (۲) چگونگی سوئیچ یا برنامه ریزی کنترل کننده های خطی در حلقه بسته شامل پلنت غیرخطی

همانگونه که گفته شد، رویکرد مرجع [۳-۱] این است که نخست تعداد نقاط کار خطی سازی تثبیت شوند، و سپس خود آن نقاط محاسبه گردند. رویکردی که در این مقاله اتخاذ می گردد بدین صورت است که بدون آنکه قیدی بر تعداد نقاط خطی سازی اعمال شود، از ابتدا خود آن نقاط به دست آیند. جهت این امر از مفاهیم حاشیه پایداری و معیار اندازه گیری عدم قطعیت یعنی متریک v -gap و ارتباط بین آن ها استفاده می شود [۴ و ۸-۹].

هواپیمایی که در حالت پرواز مداوم و مستقیم الخط قرار دارد، می خواهد مانور طولی را انجام دهد. به دلایلی مانند ناپایداری، نایقینی مدل و اختلالات انجام چنین مانوری بدون کمک یک کنترل کننده (جبران کننده) و فقط با تنظیم مستقیم ورودی هایی مانند زوایای شهپر و سکان و بالابر ممکن نیست. بنابراین، لازم است تا کنترل کننده ای در یک حلقه بسته، خطای بین ورودی های مبنا (خروجی های مطلوب) و خروجی های پلنت (خروجی های واقعی) را که هواپیما باشد را مورد پردازش قرار داده و ورودی های مناسبی برای پلنت تولید و به آن اعمال نماید. به عبارت دیگر، ساختار سامانه کنترلی کل، همان حلقه بسته استاندارد در کنترل کلاسیک است که در شکل ۱ نمایش داده شده و هواپیما در آن نقش سامانه تحت کنترل و یا به اصطلاح پلنت را ایفا می نماید.



شکل (۱): حلقه بسته برای کنترل هواپیما

در کنترل کلاسیک، معمولا طراحی و ساختار نهایی کنترل کننده، مبتنی بر الگوها یا مدل هایی برای رفتار دینامیکی پلنت، نایقینی و یا اختلالات می باشد. در حوزه زمان پیوسته، رفتار دینامیکی پلنت توسط معادلات دیفرانسیل معمولی الگو می شود. در مورد هواپیما، این معادلات در بسیاری از شرایط پروازی، غیر خطی و نامتغیر با زمان هستند. خطی سازی این معادلات در یک نقطه کار که منجر به یک الگوی خطی نامتغیر با زمان می شود، و طراحی کنترل کننده برای این الگوی خطی نامتغیر با زمان البته بلامانع است. اما وقتی که این کنترل کننده خطی در یک حلقه بسته همراه با پلنت غیرخطی قرار می گیرد، اگر شرایط کاری پلنت دور از نقطه کار متناظر با کنترل کننده باشد، تضمینی برای عملکرد رضایت بخش وجود نخواهد داشت.

یک راه حل این مشکل، که شاید طبیعی ترین هم باشد، این است که ابتدا به جای خطی سازی در فقط یک نقطه کار و به دست آوردن فقط یک الگوی خطی نامتغیر با زمان و

$$\int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \rho_A dv = M_A + M_T \quad (2)$$

که در آن ρ_A چگالی هواپیما، و v حجم هواپیما می‌باشد. فاصله هر جزء هواپیما از مرکز جرم آن است و به خاطر آنکه فرض شده هواپیما صلب می‌باشد در به‌دست آوردن رابطه بالا فرض کرده‌ایم $\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = 0$.

آخرین تغییری که در روابط برداری (۱) و (۲) داده می‌شود، عبارت است از نوشتن این روابط برداری بر حسب مولفه‌های تشکیل‌دهنده آن. برای این کار لازم است ابتدا مولفه‌های هر بردار در دستگاه بدنه تعریف گردد که i و j و k محورها این دستگاه هستند. جدول ۱ بیانگر تعریف هر یک از این بردارها می‌باشد.

جدول (۱): تعاریف مولفه‌های بردارهای معادلات حرکت.

تعریف برداری	بردار
$\vec{F}_A = iF_{Ax} + jF_{Ay} + kF_{Az}$	نیروی آیرودینامیک
$\vec{F}_T = iF_{Tx} + jF_{Ty} + kF_{Tz}$	نیروی رانشی
$\vec{g} = ig_x + jg_y + kg_z$	شتاب جاذبه
$\vec{M}_A = iL_A + jM_A + kN_A$	گشتاور آیرودینامیکی
$\vec{M}_T = iL_T + jM_T + kN_T$	گشتاورهای رانش
$\vec{\omega} = iP + jQ + kR$	سرعت زاویه‌ای
$\vec{V}_p = iU + jV + kW$	سرعت خطی
$\vec{r} = ix + jy + kz$	موقعیت

حال کافی است با استفاده از رابطه زیر مولفه‌های g را در دستگاه بدنه به‌دست آوریم [۱۰].

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن ψ زاویه سمت (البته در این ماتریس نیامده است)، θ زاویه پیچ و ϕ زاویه غلت هستند این زوایا، زوایای اولر نام دارند و هر کدام از این زوایا نشانگر یک

در ادامه، ابتدا با معادلات حرکت هواپیما آشنا شده [۱۰] و سپس معادلات غیرخطی و خطی‌سازی شده هواپیما در شکل مطلوب برای طراحی کنترل‌کننده، ارائه خواهند شد. سپس مطالب مورد نیاز برای طراحی نوع پیراسته‌ای از کنترل‌کننده خطی رگولاتورهای خطی درجه دوم^۱ برای حالتی که ورودی مبنا ناصفر باشد مرور، و بعد از آن کنترل‌کننده‌های خطی متناظر با سامانه‌های خطی‌سازی شده تعیین می‌شوند. سپس به مساله برنامه‌ریزی این کنترل‌کننده‌های خطی پرداخته می‌شود. اینجاست که مفاهیمی مانند حاشیه پایداری و متریک v -gap به‌کار گرفته خواهند شد. در نهایت، شبیه‌سازی و آزمون نتایج ارائه خواهد شد. حلقه بسته مانند آنچه در شکل ۱ نشان داده شده است، تشکیل شده و عملکرد آن توسط نرم‌افزار متلب مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- ارائه معادلات حرکت هواپیما جهت استفاده در طراحی کنترل‌کننده

هواپیما یک جسم صلب و نسبت به صفحه طولی عمودی آن متقارن در نظر گرفته می‌شود. از تغییرات جرم یا وزن آن صرف نظر خواهد شد زیرا در فاصله زمانی یک مانور طولی، مقدار سوخت مصرفی قابل توجه نخواهد بود. طبق قانون دوم نیوتن جمع نیروهای وارد بر یک جسم صلب برابر است با نرخ تغییرات ممتموم آن در واحد زمان. بیان این قانون برای نیروها (اندازه حرکت خطی) به‌صورت زیر خواهد بود [۱۰]:

$$m \frac{d}{dt} \vec{V}_p = m \left(\frac{\partial \vec{V}_p}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V}_p \right) \quad (1)$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{V}_p = m (\dot{\vec{V}}_p + \vec{\omega} \times \vec{V}_p) = m \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T$$

که در آن \vec{g} شتاب گرانشی، ω بیانگر وضعیت بردار سرعت زاویه‌ای هواپیما و یا دستگاه بدنه نسبت به دستگاه زمینی بوده و مستقل از انتگرال روی حجم است. V_p سرعت خطی هواپیما، m جرم هواپیما و r فاصله هر جزء هواپیما از مرکز جرم آن است. به‌طور مشابه رابطه اندازه حرکت زاویه‌ای به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد [۱۰]:

2- Yaw
3- Pitch
4- Roll

1- Linear Quadratic Regulator (LQR)

۱-۲- پرواز حالت مداوم

بر طبق تعریف، پرواز حالت مداوم عبارت است از پروازی که در آن کلیه پارامترهای پرواز در دستگاه مختصات بدنه نسبت به زمان ثابت باقی بمانند. این تعریف را به زبان ریاضی می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۱۰]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= 0 \\ \dot{\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

پروازهای حالت مداوم بر اساس تعریفی که ارائه گردید، نمی‌توانند بی‌شمار باشند. یک نمونه از آنها، پرواز حالت مداوم مستقیم‌الخط است.

در یک پرواز حالت مداوم، معمولا کلیه متغیرهای پرواز در معادلات حرکت را با حروف بزرگ و اندیس ۱ مشخص می‌نمایند. خصوصیات یک پرواز حالت مداوم مستقیم‌الخط به زبان ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$\dot{\omega} = \dot{U} = \dot{V} = \dot{W} = 0 \quad (8)$$

$$P = Q = R = 0 \quad (9)$$

با قرار دادن رابطه (۸) و (۹) در روابط (۴) و (۵)، معادلات پرواز حالت مداوم مستقیم‌الخط حاصل می‌گردد. حالت ماندگار مانوری که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود نیز از این نوع می‌باشد. به علاوه آنکه فرض می‌شود سرعت خطی حالت ماندگار فقط در راستای دماغه هواپیما یعنی در راستای محور X بدنه می‌باشد. همچنین فرض می‌گردد زاویه پیچ در حالت ماندگار صفر است، یعنی سرعت در راستای محور Z نیز صفر می‌باشد.

$$V_1 = W_1 = \Phi_1 = \Theta_1 = 0$$

۲-۲- پرواز اغتشاشی یا مختل شده

برای تشریح یک پرواز اغتشاشی، تصور کنید هواپیما در یک پرواز حالت مداوم قرار دارد. حال اگر به هر دلیلی هواپیما از این حالت پروازی خارج گردد، می‌توان چنین تصور نمود که هر یک از متغیرهای پرواز از دو جزء تشکیل شده باشند: یک مقدار اولیه که در حالت پرواز مداوم داشته‌اند به اضافه یک مقدار اغتشاشی. مقدار حالت مداوم همواره با حرف بزرگ و اندیس ۱ و مقدار اغتشاشی با حرف کوچک نشان داده می‌شوند. در حالت کلی هر پروازی که حالت مداوم

مولفه چرخش دستگاه مختصات بدنه نسبت به دستگاه زمین هستند، برای توضیح بیشتر در مورد این زوایا می‌توان به مرجع [۱۰] مراجعه نمود.

با قرار دادن رابطه (۳) و همچنین مؤلفه‌های بردارهای معادلات حرکت در (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - VR + WQ) &= mg \sin \theta + F_{Ax} + F_{Tx} \\ m(\dot{V} + UR - WP) &= mg \cos \theta \sin \phi + F_{Ay} + F_{Ty} \\ m(\dot{W} - UQ + VP) &= mg \cos \theta \cos \phi + F_{Az} + F_{Tz} \end{aligned} \quad (4)$$

به لحاظ وجود انتگرال حجمی در رابطه (۲) بسط رابطه مزبور شکل پیچیده‌تری به خود می‌گیرد. در اینجا فقط به ذکر نتایج اکتفا می‌گردد:

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{P} - I_{xz} \dot{R} - I_{xz} PQ + (I_{zz} - I_{yy}) RQ &= L_A + L_T \\ I_{yy} \dot{Q} + (I_{zz} - I_{zz}) PR + I_{xz} (P^2 - R^2) &= M_A + M_T \\ I_{zz} \dot{R} - I_{xz} \dot{P} + (I_{yy} - I_{zz}) PQ + I_{xz} QR &= N_A + N_T \end{aligned} \quad (5)$$

ذکر این نکته ضروری است که در به دست آوردن این روابط از تعاریف گشتاورهای اینرسی ($I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}$) و نیز فرض تقارن هواپیما نسبت به صفحه XZ استفاده گردیده است.

معادلات سمت‌یابی فضایی نیز به قرار زیر می‌باشند [۱۰]:

$$\begin{aligned} P &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ Q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ R &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \quad (6)$$

حال اگر وضعیت و چگونگی نیروها و گشتاورهای وارد بر هواپیما معین باشند، در آن صورت حل همزمان معادلات (۴) و (۵) که معادلات حرکت را تشکیل می‌دهند، به همراه معادلات سمت‌یابی فضایی (۶)، این امکان را میسر می‌سازد که مسیر حرکت هواپیما را در فضا بازسازی نموده و تغییرات هر یک از متغیرهای پرواز را با زمان به دست آورد.

معادلات فوق کلی هستند. و از آن‌ها دو نوع معادله دیگر استخراج می‌شود که در عمل حائز اهمیت هستند و هر کدام می‌توانند انواع دیگر داشته باشند:

۱- پرواز حالت مداوم یا تعادل

۲- پرواز مختل شده یا پرواز اغتشاشی

۳- کلیه مقادیر اغتشاشی به اندازه‌ای کوچک فرض گردیدند که بتوان از حاصل ضرب و توان دوم آنها در مقایسه با توان یکم آنها صرف‌نظر نمود.

در این صورت معادلات اغتشاشی خطی‌سازی شده برابر خواهند بود با :

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= -mg\theta + f_{Ax} + f_{Tx} \\ m\dot{v} &= mg\phi + f_{Ay} + f_{Ty} \\ m\dot{w} &= f_{Az} + f_{Tz} \\ I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} &= l_A + l_T \\ I_{yy}\dot{q} &= m_A + m_T \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} &= n_A + n_T \\ p &= \dot{\phi}, q = \dot{\theta}, r = \dot{\psi} \end{aligned} \quad (15)$$

در رابطه (۱۳) و (۱۵) در طرف راست معادلات نیروها و گشتاورها برابر خواهند بود با معادلات (۱۶) و (۱۷) در صفحه بعد [۱۰]، که در آن فشار دینامیکی، S سطح بال، \bar{c} میانگین آیرودینامیکی وتر، b دهانه بال، α زاویه حمله و برابر است با $\alpha = wU_1^{-1}$ ، β زاویه سرش جانبی و برابر است با $\beta = vU_1^{-1}$ ، δ_A زاویه شهپر، δ_R زاویه سکان عمودی و δ_E زاویه سکان افقی است. ماتریس‌های اول در طرف راست معادلات، ماتریس‌های مشتقات پایداری و کنترل و یا ماتریس‌های ضرایب آیرودینامیکی هواپیما می‌باشند و تعاریف هر یک از آنها در مراجع [۱۳-۱۰] آمده است. این ضرایب به‌طور کلی به شکل هندسی، سرعت و ارتفاع هواپیما بستگی دارند، که تغییر سرعت در هواپیما باعث تغییر در این ضرایب و در نتیجه تغییر در معادلات حرکت می‌گردد.

اما معادلات مذکور، یعنی معادلات اغتشاشی غیرخطی (۱۳) و اغتشاشی خطی‌سازی شده (۱۵)، شکل مناسبی نداشته و نمی‌توان برای مقاصد کنترلی، یعنی طراحی کنترل‌کننده، از آنها استفاده نمود. بنابراین، در این مقاله ضمن قرار دادن عبارات نیروها و گشتاورها یعنی معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادلات اغتشاشی غیرخطی و خطی، این معادلات را به فرم استاندارد و مطلوب از دیدگاه مهندسی کنترل یعنی فرم تبدیل نموده‌ایم تا بتوان از آنها برای طراحی کنترل‌کننده استفاده نمود.

نباشد می‌تواند اغتشاشی تصور شود. بر طبق دیدگاهی که از پرواز اغتشاشی ارائه گردید، هر یک از متغیرهای پرواز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۱۰]:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= F_{Ax1} + f_{Ax} & F_{Tx} &= F_{Tx1} + f_{Tx} \\ F_{Ay} &= F_{Ay1} + f_{Ay} & F_{Ty} &= F_{Ty1} + f_{Ty} \\ F_{Az} &= F_{Az1} + f_{Az} & F_{Tz} &= F_{Tz1} + f_{Tz} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U &= U_1 + u & V &= V_1 + v & W &= W_1 + w \\ P &= P_1 + p & Q &= Q_1 + q & R &= R_1 + r \\ \Psi &= \Psi_1 + \psi & \Theta &= \Theta_1 + \theta & \Phi &= \Phi_1 + \phi \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L_T &= L_{T1} + l_T & L_A &= L_{A1} + l_A \\ M_T &= M_{T1} + m_T \\ M_A &= M_{A1} + m_A \\ N_T &= N_{T1} + n_T & N_A &= N_{A1} + n_A \end{aligned} \quad (12)$$

با قرار دادن این روابط در معادلات (۴) و (۵)، و همچنین اعمال فرضیات اضافه‌شده درباره مانور موردنظر، معادلات غیرخطی حرکت هواپیما به‌دست خواهند آمد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m\left[\dot{u} - vr + wq\right] &= -mg \sin \theta + f_{Ax} + f_{Tx} \\ m\left[\dot{v} + ur + U_1 r - wp\right] &= mg \sin \phi \cos \theta + f_{Ay} + f_{Ty} \\ m\left[\dot{w} - uq - U_1 q + vp\right] &= mg \cos \phi \cos \theta + f_{Az} + f_{Tz} - mg \\ I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} - I_{xz}pq + (I_{zz} - I_{yy})rq &= l_A + l_T \\ I_{yy}\dot{q} - (I_{xx} - I_{zz})pr + I_{xz}(p^2 - r^2) &= m_A + m_T \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}qr &= n_A + n_T \\ p &= \dot{\phi}, q = \dot{\theta}, r = \dot{\psi} \end{aligned} \quad (13)$$

برای آنکه بتوان معادلات خطی حرکت را به‌دست آورد، معمولاً از تعدادی فرضیات ساده‌کننده در رابطه با مقادیر اغتشاشی به شرح زیر استفاده می‌شود.

- ۱- هر یک از متغیرهای پروازی با استفاده از بخش خطی بسط تیلور معرفی می‌گردند.
- ۲- مقادیر اغتشاشی زوایای پیچ و غلت، کمتر از ۱۵ درجه در نظر گرفته می‌شوند، تا داشته باشیم :

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 & \sin \theta &\approx \theta \\ \cos \phi &\approx 1 & \sin \phi &= \phi \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{A_x} + f_{T_x}}{\bar{q}S} \\ \frac{f_{A_z} + f_{T_z}}{\bar{q}S} \\ \frac{m_A + m_T}{\bar{q}S\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{T_{x_u}} + 2C_{T_{x_1}}) - (C_{D_a} + 2C_{D_1}) & (-C_{D_a} + C_{L_1}) & -C_{D_a} & -C_{D_\beta} & -C_{D_E} \\ (C_{T_{z_a}} + 2C_{T_{z_1}}) - (C_{L_a} + 2C_{L_1}) & (-C_{L_a} - C_{D_1}) & -C_{L_a} & -C_{L_\beta} & -C_{L_E} \\ (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}}) - (C_{m_a} + 2C_{m_1}) & C_{m_a} + C_{m_{T_a}} & C_{m_a} & C_{m_\beta} & C_{m_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \\ \frac{2U_1}{\bar{q}\bar{c}} \\ \frac{2U_1}{\delta_E} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{A_y} + f_{T_y}}{\bar{q}S} \\ \frac{l_A + l_T}{\bar{q}Sb} \\ \frac{n_A + n_T}{\bar{q}Sb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{y_\beta} & C_{y_\beta} & C_{y_p} & C_{y_r} & C_{y_{\delta_A}} & C_{y_{\delta_R}} \\ C_{l_\beta} & C_{l_\beta} & C_{l_p} & C_{l_r} & C_{l_{\delta_A}} & C_{l_{\delta_R}} \\ C_{n_\beta} + C_{n_{y\beta}} & C_{n_\beta} & C_{n_p} & C_{n_r} & C_{n_{\delta_A}} & C_{n_{\delta_R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ \frac{2U_1}{pb} \\ \frac{2U_1}{rb} \\ \frac{2U_1}{\delta_A} \\ \delta_R \end{bmatrix} \quad (17)$$

به شکل زیر :

که در این روابط تقریباً داریم [۱۰]:

$$C_{D_\alpha} \approx C_{D_q} \approx (C_{L_u} + 2C_{L_1}) \approx C_{y_\beta} \approx C_{l_\beta} \approx C_{n_\beta} \approx 0 \quad (18)$$

حال با قرار دادن مقادیر نیروها و گشتاورها از معادلات (۱۶) و

(۱۷) در معادلات (۱۳) و همچنین انتخاب متغیرهای حالت

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \beta \\ \dot{\beta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

معادلات حالت غیرخطی به دست خواهند آمد.

$$\dot{x}_1 = U_1 x_3 x_6 - U_1 x_2 x_4 - g \sin x_3 + (X_u + X_{T_u})x_1 + X_\alpha x_2 + X_{\delta_E} \delta_E$$

$$\dot{x}_2 = \frac{U_1 x_4 + x_1 x_4}{U_1 - Z_\alpha} - \frac{U_1 x_5 x_8}{U_1 - Z_\alpha} + \frac{g \cos x_7 \cos x_3}{U_1 - Z_\alpha} + \frac{Z_u}{U_1 - Z_\alpha} x_1 + \frac{Z_\alpha}{U_1 - Z_\alpha} x_2 + \frac{Z_q}{U_1 - Z_\alpha} x_4 + \frac{Z_{\delta_E}}{U_1 - Z_\alpha} \delta_E$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} x_6 x_8 + \frac{I_{xz}}{I_{yy}} (x_6^2 - x_8^2) + \left(M_u + M_{T_u} + \frac{Z_u M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} \right) x_1 + \left(M_\alpha + M_{T_\alpha} + \frac{Z_\alpha M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} \right) x_2 + \\ & \frac{M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} (U_1 x_4 + x_1 x_4) - \frac{M_\alpha}{(U_1 - Z_\alpha)} (x_8 x_5) + \frac{M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} g \cos x_7 \cos x_3 + \left(M_q + \frac{Z_q M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} \right) x_4 \\ & \left(M_{\delta_E} + \frac{Z_{\delta_E} M_\alpha}{U_1 (U_1 - Z_\alpha)} \right) \delta_E \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{x_6 (x_1 + U_1)}{U_1} + x_2 x_8 + \frac{g \sin x_7 \cos x_3}{U_1} + \frac{Y_p x_8}{U_1} + \frac{Y_r x_6}{U_1} + \frac{Y_{\delta_A} \delta_A}{U_1} + \frac{Y_{\delta_R} \delta_R}{U_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & \frac{1}{A_1 B_1 - 1} \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} - A_1 B_1 \right) x_8 x_4 + \frac{1}{A_1 B_1 - 1} \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} B_1 + B_1 \right) x_6 x_4 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (B_1 L_\beta + N_\beta + N_{T_\beta}) x_5 \\ & + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (B_1 L_p + N_p) x_8 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (B_1 L_r + N_r) x_6 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (B_1 L_{\delta_A} + N_{\delta_A}) \delta_A + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (B_1 L_{\delta_R} + N_{\delta_R}) \delta_R \end{aligned}$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_8 = & \frac{1}{A_1 B_1 - 1} \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} A_1 + A_1 \right) x_8 x_4 + \frac{1}{A_1 B_1 - 1} \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} + A_1 B_1 \right) x_6 x_4 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (A_1 N_\beta + A_1 N_{T_\beta} + L_\beta) x_5 \\ & + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (A_1 N_p + L_p) x_8 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (A_1 N_r + L_r) x_6 + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (A_1 N_{\delta_A} + L_{\delta_A}) \delta_A + \frac{1}{1 - A_1 B_1} (A_1 N_{\delta_R} + L_{\delta_R}) \delta_R \end{aligned}$$

$$\ddot{\theta} = M_u u + M_{T_u} u + M_\alpha \alpha + M_\alpha \dot{\alpha} + M_q \dot{\theta} + M_{\delta_E} \delta_E$$

معادلات حالت سمتی جانبی :

$$U_1 \dot{\beta} + U_1 \dot{\psi} = g\phi + Y_\beta \beta + Y_p \dot{\phi} + Y_r \dot{\psi} + Y_{\delta_A} \delta_A + Y_{\delta_R} \delta_R$$

$$\ddot{\phi} - A_1 \ddot{\psi} = L_\beta \beta + L_p \dot{\phi} + L_r \dot{\psi} + L_{\delta_A} \delta_A + L_{\delta_R} \delta_R \quad (24)$$

$$\ddot{\psi} - B_1 \ddot{\phi} = N_\beta \beta + N_{T_\beta} \dot{\beta} + N_p \dot{\phi} + N_r \dot{\psi} + N_{\delta_A} \delta_A + N_{\delta_R} \delta_R$$

با توجه به آنکه مانور در نظر گرفته‌شده در این مقاله، مانوری طولی می‌باشد، در نتیجه برای طراحی کنترل‌کننده از قسمت اول معادلات حرکت خطی‌شده یعنی معادلات حرکت طولی استفاده خواهیم کرد. بنابراین، با انتخاب ورودی و متغیرهای حالت به شکل زیر این معادلات را در غالب معادلات حالت مرتب می‌نماییم:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} u & \alpha & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

$$u = \delta_E \quad (25)$$

معادلات حالت خطی حرکت طولی :

$$\dot{x}_1 = (X_u + X_{T_u})x_1 + X_\alpha x_2 - g x_3 + X_{\delta_E} u$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{Z_u}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_1 + \left(\frac{U_1 + Z_q}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_4 + \left(\frac{Z_\alpha}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_2 + \left(\frac{Z_{\delta_E}}{U_1 - Z_\alpha} \right) \delta_R$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (26)$$

$$\dot{x}_4 = \left(M_u + M_{T_u} + \frac{M_\alpha Z_u}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_1 + \left(M_\alpha + M_{T_\alpha} + \frac{M_\alpha Z_\alpha}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_2 + \left(M_q + \frac{M_\alpha (U_1 + Z_q)}{U_1 - Z_\alpha} \right) x_4 + \left(M_{\delta_E} + \frac{M_\alpha Z_{\delta_E}}{U_1 - Z_\alpha} \right) u$$

این معادلات برای طراحی کنترل‌کننده خطی استفاده می‌شود ولی در نهایت برای شبیه‌سازی، سامانه حلقه بسته شامل معادلات حرکت غیرخطی و کنترل‌کننده برنامه‌ریزی‌شده بهره را تشکیل می‌دهیم.

۳- طراحی کنترل‌کننده

در بخش دوم مقاله دیده شد که معادلات دینامیکی هواپیما، غیرخطی هستند و معلوم است که وقتی محدوده عملیاتی هواپیما وسیع باشد، استفاده از یک کنترل‌کننده خطی که بر مبنای خطی‌سازی در یک نقطه کار طراحی شده باشد کارایی رضایت‌بخشی نخواهد داشت. به این ترتیب، لزوم استفاده از کنترل‌کننده‌های غیرخطی محرز می‌گردد. یکی از رویکردهای متداول در هوافضا و امور مربوط به کنترل هواپیما، استفاده از کنترل‌کننده‌ای است

که در آن، $A_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}}$ و $B_1 = \frac{I_{xz}}{I_{zz}}$ و مشتقات پایداری

به‌صورت جدول (پ.۲) و جدول (پ.۳) می‌باشند. برای به‌دست آوردن معادلات حالت خطی، به‌طور کلی برای حرکت هواپیما دو حرکت کاملاً مجزا و متفاوت قابل تصور می‌باشد، یکی حرکت طولی و دیگری حرکت سمتی جانبی است. حرکت طولی، حرکت در راستای محور x دستگاه مختصات بدنه است که دوران حول محور y را شامل می‌شود و از حالت‌ها و ورودی زیر تشکیل می‌شود:

$$\bar{x} = [u \quad \alpha \quad \theta]^T \quad (21)$$

$$U_{input} = \delta_E$$

از دیدگاه هندسی تمام این متغیرها، در صفحه xz دستگاه مختصات بدنه قرار دارند.

حرکت سمتی جانبی، نیز عبارت است از دوران حول محور x یا z که به ترتیب به نام زاویه غلت و زاویه سمت شناخته می‌شوند. همان‌طور که از نام آن پیداست، این حرکت برای گردش هواپیما استفاده می‌شود و از حالت‌ها و ورودی‌های زیر تشکیل شده است:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \beta & \dot{\psi} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$U_{input} = [\delta_A \quad \delta_R]^T$$

علت آنکه حرکت هواپیما را به این دو نوع حرکت طولی و سمتی جانبی تقسیم‌بندی کرده‌اند این است که اگر مدل غیرخطی هواپیما حول نقطه کار خود خطی شود، ناوابستگی روشنی بین حالت‌های اشاره‌شده در (۲۱) و (۲۲) مشاهده خواهد شد. به همین دلیل است که در هنگام طراحی کنترل‌کننده، برای هواپیما عموماً فرض بر آن است که هواپیما در یکی از این دو حالت قرار دارد و در این صورت کنترل‌کننده را برای حالت طولی و یا سمتی جانبی به‌صورت مستقل طراحی می‌کنند. حال می‌توان با قرار دادن معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادلات (۱۵) و انتخاب متغیرهای حالت و ورودی‌های بیان‌شده در (۲۱) معادلات حالت طولی و با انتخاب متغیرهای حالت و ورودی‌های بیان‌شده در (۲۲) معادلات حالت سمتی جانبی را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

معادلات حالت طولی :

$$\dot{u} = -g\theta + X_u u + X_{T_u} u + X_\alpha \alpha + X_{\delta_E} \delta_E$$

$$U_1 \dot{\alpha} - U_1 \theta = Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_\alpha \dot{\alpha} + Z_q \dot{\theta} + Z_{\delta_E} \delta_E \quad (23)$$

که در آن $I(t)$ مقدار مینا یا مطلوب بردار حالت می‌باشد. زمان نهایی t_f ثابت اما $x(t_f)$ آزاد می‌باشد. همچنین حالتها و مقادیر تلاش کنترلی محدود و یا کراندار نیستند. W و Q ماتریس‌های مثبت، نیمه‌معین و متقارن و R مثبت معین و متقارن می‌باشند.

تعبیر فیزیکی که برای این معیار کارآیی در نظر گرفته می‌شود بدین صورت است که مطلوب می‌باشد تا حالت‌های سامانه بدون آن‌که تلاش کنترلی زیادی هزینه گردد نزدیک به مقدار مینا نگهداری شوند.

قانون کنترلی بهینه برای این مساله به فرم زیر می‌باشد [۱۴] - [۱۵]:

$$u(t) = F(t)x(t) + v(t) \quad (۲۹)$$

که در آن

$$F(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (۳۰)$$

$$v(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)s(t)$$

که در آن $K(t)$ و $s(t)$ نیز جواب‌های معادلات زیر هستند:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & -[A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]s(t) \\ & + Q(t)r(t) \end{aligned} \quad (۳۲)$$

$\dot{s}(t) = -[A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)]s(t) + Q(t)r(t)$
 $F(t)$ ماتریس بهره فیدبک و $v(t)$ سیگنال دستور^۱ می‌باشد. توجه شود که $v(t)$ به پارامترهای سامانه و سیگنال مینا بستگی دارد. به علاوه، اندازه‌گیری تمامی متغیرهای حالت برای پیاده‌سازی قانون کنترلی بهینه لازم است.

در مرجع [۱۴] نشان داده شده است که اگر (۱) سامانه کاملاً کنترلی پذیر باشد، (۲) W برابر صفر باشد و (۳) A ، B ، R و Q ماتریس‌هایی ثابت باشند، با میل کردن t_f به سمت بی‌نهایت $K(t)$ به سمت K (ماتریس ثابت) میل خواهد کرد. اگر فرضیات بالا برقرار شوند، قانون کنترلی بهینه برای آن پروسه زمان نامحدود ثابت می‌گردد.

در این حالت ماتریس K از حل معادله ریکاتی زیر حاصل می‌گردد:

$$-KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (۳۳)$$

که یک ترجمه واژه به واژه ممکن برای اسم آن کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده بهره است.

در روش برنامه‌ریزی شده بهره، خطی‌سازی در چند نقطه کار انجام و چند کنترل‌کننده خطی طراحی می‌شود. لذا کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده بهره، یک کنترل‌کننده غیرخطی است که از چند کنترل‌کننده خطی تشکیل شده و به‌ازای شرایط کاری هواپیما، هر یک از کنترل‌کننده‌های خطی در زمان‌های مختلف وارد عمل می‌شود. بنابراین، برای طراحی کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده بهره، دو مرحله متمایز می‌توان قائل شد. مرحله اول، طراحی کنترل‌کننده‌های خطی است که اجزای کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده می‌باشند. مرحله دوم، برنامه‌ریزی یعنی تعیین ضابطه‌ای که در آن، یکی از کنترل‌کننده‌های خطی در حلقه بسته قرار گیرند. هر یک از این دو مرحله را به صورت‌های گوناگون می‌توان انجام داد، در واقع تنوع در مبحث برنامه‌ریزی بهره نیز ناشی از همین امکانات مختلف است.

۳-۱- انتخاب اجزای خطی کنترل‌کننده برنامه‌ریزی شده

کنترل‌کننده‌های خطی مورد نیاز از طریق روش‌های کنترل بهینه انتخاب و کنترل‌کننده‌های منتخب نامیده شدند. کنترل‌کننده‌های منتخب، خویشاوندان نزدیک خانواده مشهوری موسوم به رگولاتورهای خطی درجه دوم هستند. تفاوت بین کنترل‌کننده‌های منتخب با رگولاتورهای درجه دوم خطی در این است که ورودی مینا به حلقه بسته کنترلی، لزوماً برابر با صفر نیست بلکه برابر با تابع معلوم $r(t)$ می‌باشد [۱۴-۱۵].

سامانه را با معادلات حالت زیر توصیف می‌کنیم:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (۲۷)$$

تابع هزینه و یا معیار کارآیی که باید مینیمم شود برابر است با [۱۰ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۵]:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} [x(t_f) - r(t_f)]^T W [x(t_f) - r(t_f)] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ [x(t) - r(t)]^T Q(t) [x(t) - r(t)] + u^T(t) R(t) u(t) \} dt \quad (۲۸) \\ = & \frac{1}{2} \|x(t_f) - r(t_f)\|_W^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \} dt \end{aligned}$$

جفت $[P, C]$ پایدار نباشد، حاشیه پایداری برابر با صفر می‌باشد.

۳-۲-۲- متریک v-gap^۱

برای ماتریسهای ثابت $X, Y \in \mathbb{C}^{p \times q}$ تعریف می‌شود:

$$\kappa(X, Y) = \sigma \left[(I + YY^*)^{-\frac{1}{2}} (X - Y) (I + YY^*)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (38)$$

حال اگر P_1, P_2 دو تابع تبدیل ماتریسی برای دو مدل مختلف باشند، متریک v-gap را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۷-۱۶]:

$$\delta_v(P_1, P_2) = \sup_{\omega} \kappa(P_1(j\omega), P_2(j\omega)) \quad (39)$$

معیار کارآیی یعنی حاشیه پایداری و معیار اندازه‌گیری عدم قطعیت یعنی متریک v-gap توسط نابرابری زیر با یکدیگر مرتبط اند:

$$b_{P_2, C} \geq b_{P_1, C} - \delta_v(P_1, P_2) \quad (40)$$

که در آن C کنترل‌کننده طراحی شده برای مدل P_1 می‌باشد.

کاربردهای این نابرابری در جایی که تنها مساله پایداری مقاوم اهمیت دارد می‌تواند به دو صورت زیر مطرح شود: فرض کنید مدل نامی $P_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}$ و کنترل‌کننده C و عدد β داده شده باشند، آنگاه:

جفت $[P_2, C]$ برای تمام P_2 هایی که $\delta_v(P_1, P_2) \leq \beta$ پایدار است، اگر و تنها اگر:

$$b_{P_1, C} > \beta$$

فرض کنید مدل نامی $P_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}$ و مدل انحراف یافته $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times q}$ و عدد $\beta < b_{opt}(P_1)$ داده شده باشند، آنگاه: جفت $[P_2, C]$ برای تمام کنترل‌کننده‌هایی که $b_{P_1, C} > \beta$ می‌باشند پایدار است، اگر و تنها اگر:

$$\delta_v(P_1, P_2) \leq \beta$$

که در آن $b_{opt}(P) = \sup_C b_{P, C}$

بنابراین، هر مدلی در فاصله‌ای کمتر از β با مدل نامی توسط تمام کنترل‌کننده‌هایی که مدل نامی را با حداقل حاشیه پایداری β پایدار می‌کنند، پایدار خواهد شد. علاوه بر آن، هر مدلی در فاصله‌ای بزرگتر از β با مدل نامی

که این معادله از برابر صفر قرار دادن $\dot{K}(t)$ در رابطه (۳۱) به‌دست می‌آید. همچنین با برابر صفر قرار دادن $\dot{s}(t)$ در (۳۲) و از آنجا که $r(t)$ مقدار ثابت غیر صفری برابر r است، داریم:

$$s = [A^T - KBR^{-1}B^T]^{-1} Qr \quad (34)$$

در نتیجه قانون کنترلی بهینه برابر خواهد بود با:

$$u(t) = Fx(t) + v \quad (35)$$

$$= -R^{-1}B^T K x(t) - R^{-1}B^T s$$

۳-۲-۲- برنامه‌ریزی کنترل‌کننده‌های خطی

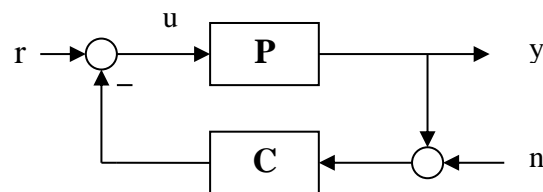
در این بخش قبل از آنکه به اصل مطلب، یعنی تعیین ضابطه‌ای برای برنامه‌ریزی کنترل‌کننده‌های خطی پرداخته‌شود، ابتدا مفاهیم حاشیه پایداری، متریک v-gap و رابطه بین آنها معرفی می‌گردد [۴-۷ و ۱۶]؛ سپس با استفاده از این مفاهیم، برنامه‌ریزی کنترل‌کننده‌های خطی انجام می‌گیرد.

۳-۲-۱- حاشیه پایداری

جفت $[P, C]$ پایدار است اگر

$$\begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - CP)^{-1} \begin{bmatrix} -C & I \end{bmatrix} \in H_{\infty} \quad (36)$$

که این تابع تبدیل ماتریسی، تابع تبدیل حلقه بسته از نویز اندازه‌گیری و سیگنال مبنا به خروجی سامانه و ورودی سامانه در بلوک دیاگرام فیدبک استاندارد مطابق شکل ۲ می‌باشد [۴ و ۱۶-۱۷]:



شکل (۲): بلوک دیاگرام فیدبکی استاندارد

اگر جفت $[P, C]$ پایدار باشد، حاشیه پایداری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_{P, C} = \left(\left\| \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - CP)^{-1} \begin{bmatrix} -C & I \end{bmatrix} \right\| \right)^{-1} \quad (37)$$

که حاصل آن عددی در بازه صفر تا یک می‌باشد، یعنی هر چه این مقدار به عدد یک نزدیک‌تر باشد به معنای حاشیه پایداری بزرگتر و بالعکس هر چه این به عدد صفر نزدیک‌تر باشد به معنای حاشیه پایداری کوچکتر است. در صورتی که

۸- کنترل کننده‌ای به نام K برای مدل خطی در نقطه θ طراحی می‌شود.

۹- حاشیه پایداری مدل خطی در نقطه θ ، $b_{P_\theta, K}$ ، محاسبه می‌شود.

۱۰- اختلاف بین دو مدل خطی در دو نقطه θ و s توسط معیار متریک v -gap، $\delta_v(P_\theta, P_s)$ ، اندازه‌گیری می‌شود.

۱۱- اگر $b_{P_\theta, K} > \delta_v(P_\theta, P_s)$ قرار داده می‌شود:
 $Q = \theta$

۱۲- اگر $b_{P_\theta, K} > \delta_v(P_\theta, P_s)$

الف- Q به‌عنوان یک نقطه کار در نظر گرفته می‌شود و در ماتریس نقاط کار ذخیره می‌شود.

ب- $j = 0$

ج- $z = Q + j$

د- اگر $key = 0$

د-۱- مدل خطی در نقطه Q حساب می‌شود.

د-۲- کنترل کننده‌ای به نام K_Q برای مدل خطی در نقطه Q طراحی می‌شود.

د-۳- مدل خطی در نقطه z حساب می‌شود.

د-۴- اختلاف بین دو مدل بدست آمده در (د-۱) و (د-۳) یعنی $\delta_v(P_Q, P_z)$ محاسبه می‌شود.

د-۵- حاشیه پایداری مدل خطی در نقطه Q ، b_{P_Q, K_Q} ، محاسبه می‌شود.

د-۶- اگر $b_{P_Q, K_Q} < \delta_v(P_Q, P_z)$

د-۶-۱- $s = z$

د-۶-۲- $d = z - \theta - 1$

د-۶-۳- $key = 1$

د-۶-۵- $j = j + 1$

و- اگر $Q + j \leq 250$ به مرحله ج بازمی‌گردد.

د-۶-۱۳- $i = i + 1$

د-۶-۱۴- اگر $\theta + i \leq 250$ به مرحله ۴ باز می‌گردد.

د-۶-۱۵- ماتریس نقاط کار ذخیره‌شده به‌عنوان مجموعه تمام نقاط کار به نمایش در می‌آید.

د-۶-۱۶- پایان.

مشاهده می‌شود که در این روش مساله تعیین محل نقاط کار به‌گونه‌ای بررسی می‌گردد که به‌صورت خودکار تعداد نقاط نیز حاصل می‌شود به‌طوری‌که حاشیه پایداری نقاط کار تمام بازه تغییرات پارامتر θ را پوشش می‌دهد (یعنی حتما اختلاف بین مدل هر نقطه نمونه از این بازه و مدل

بوسیله تعدادی از کنترل کننده‌هایی که مدل نامی را با حاشیه پایداری β پایدار می‌کنند، ناپایدار می‌گردد.

حال با استفاده از این مفاهیم به تعیین ضابطه برای برنامه‌ریزی کنترل کننده‌های خطی پرداخته می‌شود. سامانه غیرخطی وابسته به پارامتر زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta(t)) \quad (41)$$

این سامانه را می‌توان خطی‌سازی نموده و یک مدل خطی وابسته به پارامتر به‌دست آورد:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (42)$$

این مدل خطی با توجه به تغییرات پارامتر θ در حال تغییر است. به این ترتیب متناظر با هر مقدار θ در زمانی مانند t ، کنترل کننده‌ای خطی وجود خواهد داشت که در آن نقطه و همسایگی مشخصی از آن نقطه کارآیی قابل قبولی دارد، ولی تضمینی برای کارآیی آن در نقاط دور وجود ندارد. لذا باید سعی کرد تا در هر زمان از کنترل کننده متناظر با پارامتر θ در آن زمان و یا همسایگی از آن استفاده کرد.

یک روش انتخاب تعداد محدودی نقاط کار برای خطی‌سازی سامانه غیرخطی و در نتیجه طراحی کنترل کننده خطی برای آن نقاط می‌باشد. طراحی کنترل کننده خطی برای نقاط کار به‌صورت برون‌خط^۱ انجام شده و برای بقیه مقادیر پارامتر θ ، ضرایب کنترل کننده بنا بر ضابطه‌ای بر حسب ضرایب کنترل کننده‌های نقاط کار منتخب تعیین می‌شود.

۳-۳- انتخاب نقاط کار

الگوریتم طراحی شده برای تعیین تعداد و محل نقاط کار به‌صورت زیر می‌باشد:

۱- محدوده تغییرات پارامتر θ به $n-1$ زیربازه تقسیم‌بندی می‌گردد. تعداد n نقطه تقسیم به‌دست می‌آید:

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$$

۲- پارامترهای زیر مقداردهی می‌گردند:

$$s = \theta_1, d = 0, \theta = \theta_1$$

۳- پارامتر i برابر صفر می‌باشد.

$$\theta = \theta + i \quad (4)$$

۴- قرار داده می‌شود:

$$key = 0, \theta = \theta + d \quad (5)$$

۶ و ۷- مدل خطی در نقطه s و θ حساب می‌شود.

۳-۵- حاشیه پایداری در درایه i ام ماتریس W ،
بوسیله مدل به‌دست‌آمده از ۳-۱ و
کنترل‌کننده ۳-۳ محاسبه می‌شود.

$$۳-۶- \text{اگر } \delta_v(P_{W(i)}, P_\theta) > b_{P_{W(i)}, K_{W(i)}}$$

۳-۶-۱- کنترل‌کننده درایه i ام ماتریس W برای استفاده
در نقطه نمونه θ مناسب می‌باشد. این کنترل‌کننده ذخیره
می‌شود.

$$۳-۶-۲- E = 1$$

$$۴- i = i + 1$$

۵- اگر $i \leq m$ به مرحله ۳ باز می‌گردد.

۶- ضرایب ذخیره‌شده به‌عنوان ضرایب کنترل‌کننده نقطه
نمونه θ به نمایش در می‌آید.

۷- پایان.

مشاهده می‌شود که تمامی مراحل طراحی کنترل‌کننده
برنامه‌ریزی‌شده بهره انجام گرفته و می‌توان ضرایب
کنترل‌کننده را در هر لحظه تنها با اندازه‌گیری پارامتر θ
تعیین نمود.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش سعی بر آن است تا نتایج بخش‌های گذشته
بررسی شوند. هدف، کنترل هواپیما در مانوری طولی
می‌باشد. مانور طولی که در اینجا به‌عنوان فرمان و یا
سیگنال مبنا از هواپیما درخواست می‌شود، مقدار ثابتی
چرخش برای زاویه پیچ^۱ در هنگام پرواز مداوم مستقیم‌الخط
می‌باشد، که به‌شکل پله به آن وارد می‌گردد.

مشقتات پایداری از پارامترهایی تشکیل شده‌اند، که
شامل پارامترهای شرایط پروازی، پارامترهای هندسی،
ضرایب حالت ماندگار و مشقتات کنترلی و پایداری
می‌باشند. مقادیر این پارامترها و در صورت وجود رابطه آنها
با سرعت، تقریبی ولی معقول می‌باشند که از درون‌یابی
داده‌های موجود هواپیمایی از نوع بوئینگ ۷۴۷ از مرجع
[۱۰] حاصل شده‌اند. این نکته دوباره یادآوری می‌شود که

یکی از نقاط کار از حاشیه پایداری آن نقطه کار کمتر
است.

۴-۳- تعیین ضرایب کنترل‌کننده در هر نقطه از بازه تغییرات پارامتر θ

تنها مساله باقی‌مانده تعیین ضرایب کنترل‌کننده، با توجه
به نقاط کار، برای هر نقطه در بازه تغییرات θ می‌باشد. در
اینجا با استفاده از خواص به‌دست‌آمده از الگوریتم ارائه‌شده
و معیار یا رابطه‌ای که بین حاشیه پایداری و متریک v-gap
ارائه شد، ضرایب کنترل‌کننده در هر نقطه به‌گونه‌ای تعیین
می‌گردد تا برابر با ضرایب کنترل‌کننده یکی از نقاط کار
همجوار با آن باشد.

فرض می‌شود ماتریس نقاط کار به‌دست‌آمده از الگوریتم
انتخاب نقاط کار، ماتریس W نام دارد و دارای بعد m
می‌باشد. حال باید برای تعیین ضرایب کنترل‌کننده نقطه
نمونه θ سعی در پیدا کردن نقطه کاری از ماتریس W
باشد به‌طوری‌که حاشیه پایداری در آن نقطه کاری از
اختلاف بین مدل خطی نقطه نمونه و مدل خطی آن نقطه
کار بزرگتر باشد. در نتیجه طبق معیار بیان‌شده بین حاشیه
پایداری و متریک v-gap و کاربردهای آن می‌توان از ضرایب
کنترل‌کننده آن نقطه کار به‌عنوان ضرایب کنترل‌کننده آن
نقطه نمونه استفاده نمود.

این کار را با استفاده از الگوریتم ساده زیر می‌توان انجام داد:

$$۱-۲- i = 0 ; E = 0$$

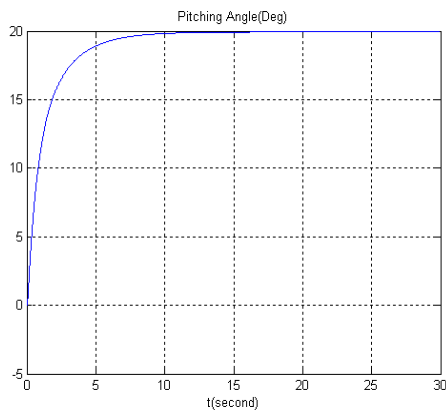
$$۳- \text{اگر } E = 0$$

۳-۱- مدل خطی درایه i ام ماتریس W محاسبه می‌شود،
 $P_{W(i)}$.

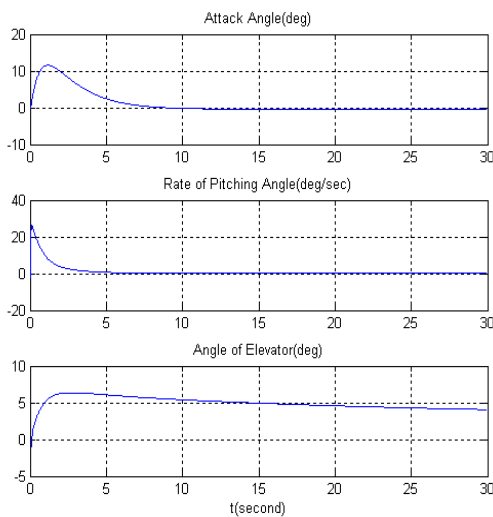
۳-۲- مدل خطی در نقطه نمونه θ محاسبه می‌شود، P_θ .

۳-۳- برای مدل خطی درایه i ام ماتریس W کنترل‌کننده
طراحی می‌شود، $K_{W(i)}$.

۳-۴- اختلاف بین دو مدل به‌دست‌آمده از ۳-۱ و ۳-۲
توسط متریک v-gap اندازه‌گیری می‌شود، $\delta_v(P_{W(i)}, P_\theta)$.

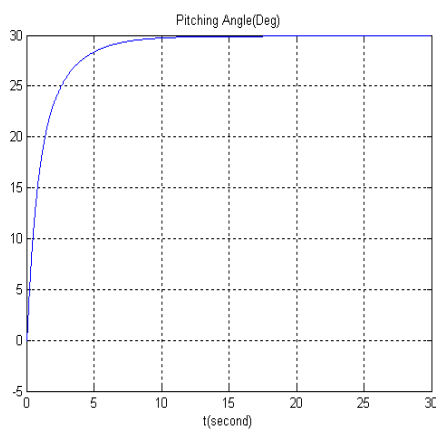


شکل (۵): زاویه پیچ بر حسب درجه



شکل (۶): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه سکان افقی

۳- سرعت هواپیما برابر با 250 m/s و زاویه پیچ خواسته شده برابر با 30° می باشد :



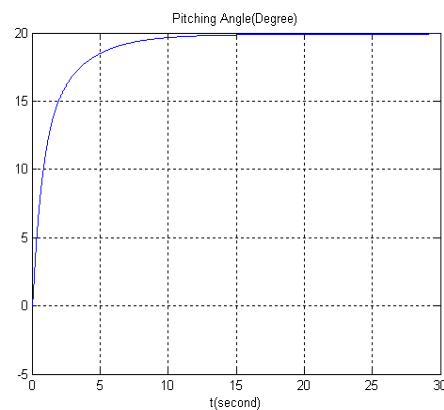
شکل (۷): زاویه پیچ بر حسب درجه

- 1- Attack Angle
- 2- Elevator

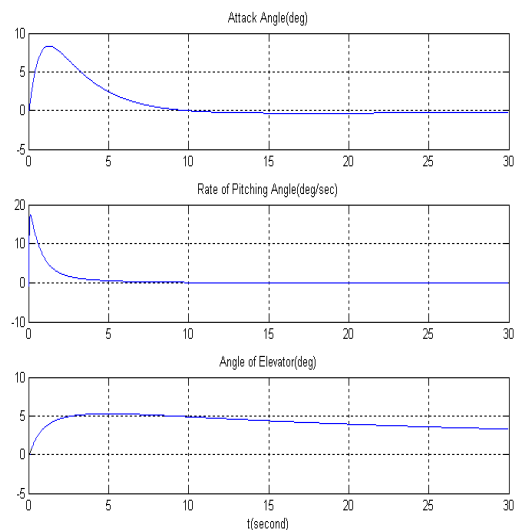
هواپیما در صفحه‌ای افقی در حال مانور می‌باشد، که به معنی ثابت بودن ارتفاع آن است.

در ابتدا به منظور اطمینان از مناسب بودن طراحی، سامانه حلقه بسته‌ای شامل مدل خطی و کنترل کننده خطی طراحی شده تشکیل می‌گردد و سیگنال فرمانی به آن وارد می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی این حلقه بسته برای دو سرعت متفاوت (200 m/s و 250 m/s) و دو فرمان متفاوت (زاویه پیچ 20° و 30°) در شکل های ۳ تا ۸ آورده شده است.

۱- سرعت هواپیما برابر 200 m/s و زاویه پیچ خواسته شده برابر با 20° درجه می‌باشد:



شکل (۳): زاویه پیچ بر حسب درجه.

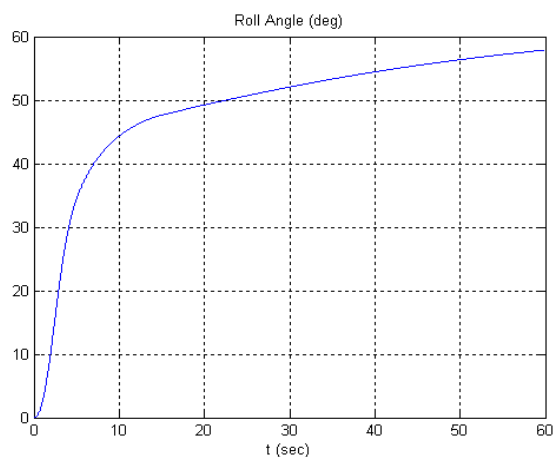


شکل (۴): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه سکان افقی

۲- سرعت هواپیما برابر با 250 m/s و زاویه پیچ خواسته شده برابر با 20° می‌باشد :

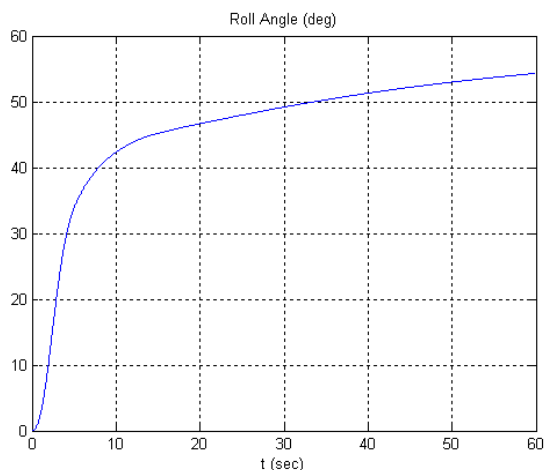
مدل غیرخطی و کنترل کننده‌های رگولاتورهای خطی درجه دوم^۱ طراحی شده در سرعت ثابت تشکیل شده و زاویه پیچ برابر با 30° به عنوان فرمان به حلقه اعمال می‌شود. نتایج حاصل از شبیه سازی در شکل های ۹ تا ۱۱ آورده شده است.

۱- کنترل کننده طراحی شده برای مدل خطی در سرعت 200 m/s و زاویه پیچ مطلوب 30° .



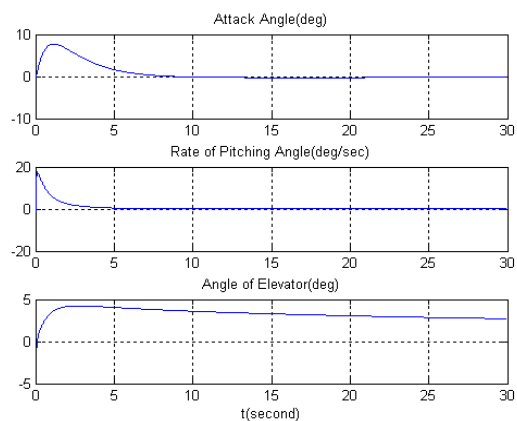
شکل (۸): زاویه حمل بر حسب درجه.

۲- کنترل کننده رگولاتورهای خطی درجه دوم طراحی شده برای مدل خطی در سرعت 250 m/s و زاویه پیچ مطلوب 30° .



شکل (۹): زاویه پیچ بر حسب درجه.

۳- کنترل کننده رگولاتورهای خطی درجه دوم طراحی شده برای مدل خطی در سرعت 300 m/s و زاویه پیچ مطلوب 30° .



شکل (۱۰): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه سکان افقی.

همانطور که مشاهده می‌شود در هر سه حالت زاویه پیچ سیگنال مبنا را به شکل مناسبی دنبال کرده و بر آن منطبق می‌شود. در این ضمن دیده می‌شود که زاویه حمله به میزان بسیار اندکی دچار نوسان شده ولی به سرعت به مقدار صفر برمی‌گردد. در نهایت می‌توان دید که ورودی سامانه یعنی زاویه سکان افقی مقادیر معقولی را دارند یعنی بیش از حد زیاد نیستند و در نتیجه در عمل به اشباع نمی‌روند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که کنترل کننده خطی در سامانه حلقه بسته شامل این کنترل کننده و مدل خطی به-طور مناسبی طراحی شده است.

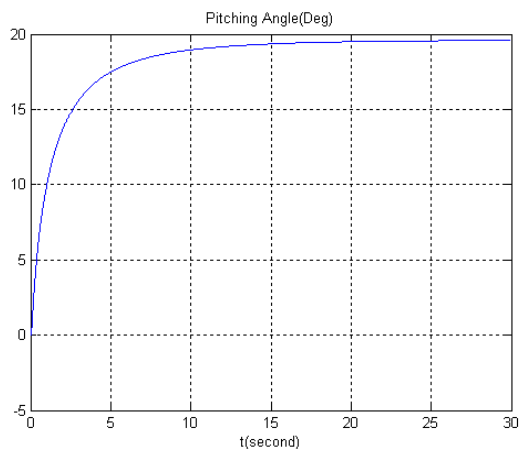
حال می‌توان یک قدم فراتر رفت و دید که این کنترل کننده خطی ثابت با زمان طراحی شده برای مدل خطی در سامانه حلقه بسته شامل این کنترل کننده و مدل غیرخطی در حالی که سرعت هواپیما نیز متغیر است، چگونه عمل می‌کنند. آیا در این حالت نیز سیگنال مبنا به خوبی دنبال می‌شود؟

قابل ذکر است که در این مقاله فرض شده است که بازه تغییرات سرعت هواپیمای نمونه که به طور تقریبی بوئینگ ۷۴۷ در نظر گرفته شده است، بین 200 m/s تا 300 m/s با 720 km/h تا 1080 km/h خواهد بود، که در عمل نیز بازه ذکر شده، بازه تغییرات سرعت این هواپیما را در حالت پروازی مستقیم الخط پوشش می‌دهد. در نتیجه ضمن آنکه در حین مانور سرعت هواپیما از 200 m/s به 300 m/s افزایش پیدا می‌کند؛ سامانه حلقه بسته شامل

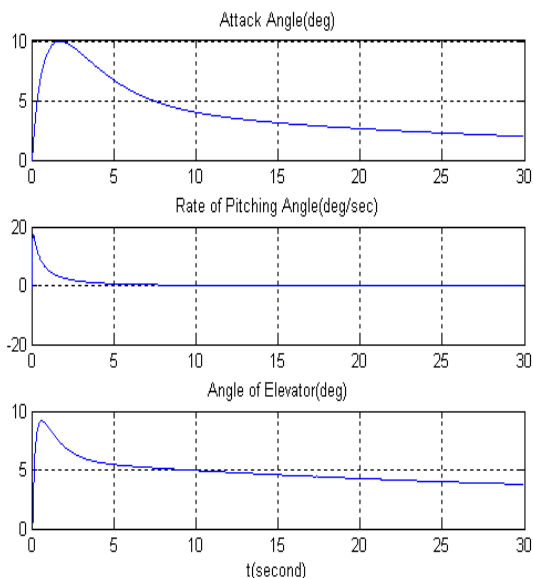
1- Linear Quadratic Regulator (LQR)

حال می‌توان حلقه بسته شامل مدل غیرخطی و کنترل کننده برنامه‌ریزی شده را در حالتی که سرعت هواپیما در حین مانور از 200 m/s تا 300 m/s تغییر می‌کند، تشکیل داد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی این حلقه بسته در مقادیر مختلف زاویه پیچ مطلوب در شکل‌های ۱۲ تا ۱۷ آورده شده است.

۱- مقدار زاویه پیچ مطلوب برابر است با 20° .

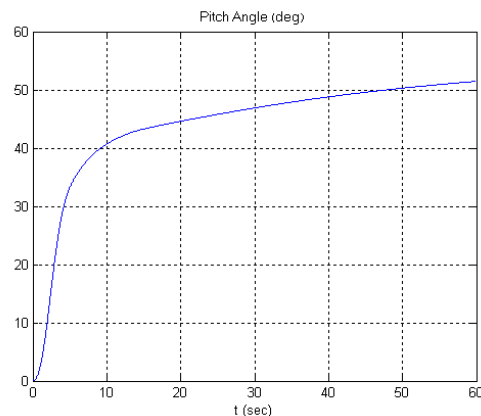


شکل (۱۲): زاویه پیچ بر حسب درجه.



شکل (۱۳): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه اسکان افقی.

۲- مقدار زاویه پیچ مطلوب برابر است با 25° .

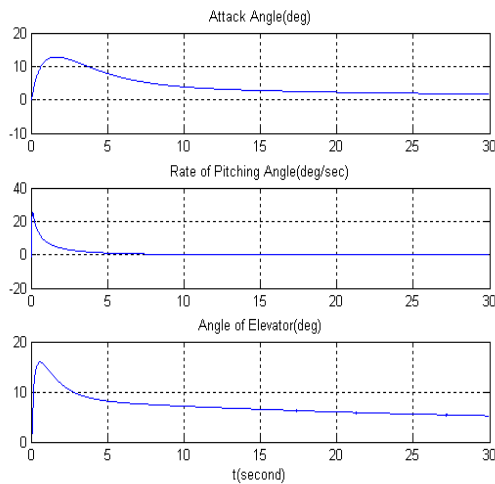


شکل (۱۱): زاویه پیچ بر حسب درجه.

همانطور که از اشکال ۹ و ۱۰ و ۱۱ برداشت می‌شود هیچ‌کدام از دو کنترل کننده خطی ثابت با زمان نمی‌توانند مناسب باشند زیرا در هر دو حالت زاویه پیچ واگرا شده و نمی‌تواند به مقدار 30° همگرا شود. بنابراین، برای حصول همگرایی و به دست آوردن زاویه پیچ مطلوب باید از کنترل کننده برنامه‌ریزی شده بهره استفاده شود. اما برای استفاده از این نوع کنترل کننده همانطور که پیش‌تر نیز گفته شد با توجه به آنکه سرعت در بازه 200 m/s تا 300 m/s تغییر می‌کند، باید نقاط کار مناسب از این بازه انتخاب گردند، که این کار با توجه به الگوریتم ارائه شده انجام گرفته است. نقاط کار انتخاب شده از پیاده‌سازی این الگوریتم با استفاده از نرم‌افزار متلب در جدول ۲ آورده شده است:

جدول (۲): نقاط کار تعیین شده.

نقطه کار	سرعت (متر بر ثانیه)	سرعت (کیلومتر بر ساعت)
۱	۲۰۹	۷۵۲/۴
۲	۲۱۸	۷۸۴/۸
۳	۲۳۱	۸۳۱/۶
۴	۲۴۵	۸۸۲
۵	۲۵۶	۹۲۱/۶
۶	۲۶۷	۹۶۱/۲
۷	۲۷۵	۹۹۰/۰
۸	۲۸۶	۱۰۲۹/۶
۹	۲۹۵	۱۰۶۲/۰

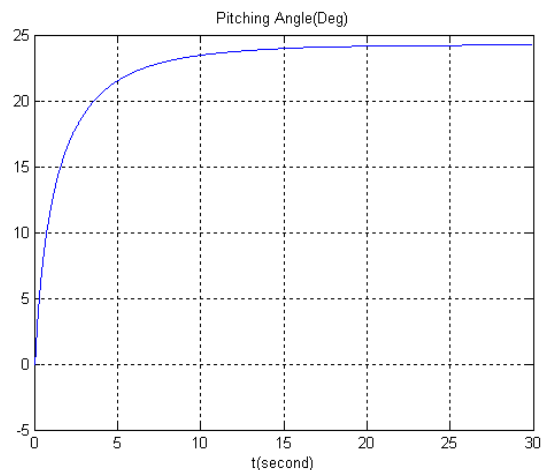


شکل (۱۷): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه اسکان افقی.

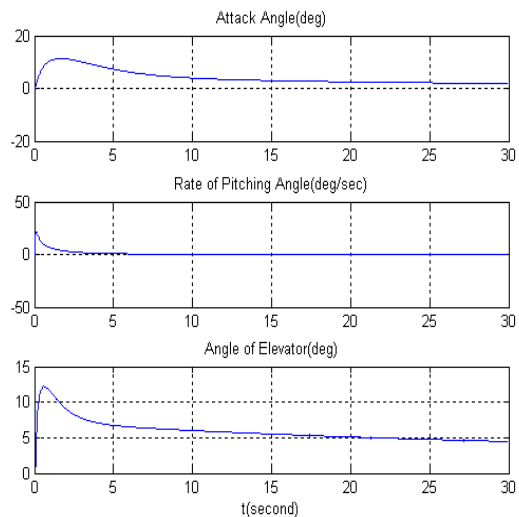
همانطور که مشاهده می‌شود زاویه پیچ، سیگنال فرمان را با خطای حالت ماندگار ۲ درصد دنبال می‌کند که قابل قبول می‌باشد. همچنین دیگر متغیرهای حالت نیز همان مقادیر منطقی را اتخاذ می‌کنند. زاویه اسکان افقی نیز مقدار مجازی دارد بدین معنا که در عمل به هنگام پیاده‌سازی به اشباع نمی‌رود و می‌توان این مقدار ورودی را برای حصول زاویه پیچ مطلوب به سامانه اعمال کرد.

۵- نتیجه‌گیری

برای آنکه هواپیمایی که در حال پرواز مداوم مستقیم‌الخط است به انجام مانور طولی مطلوبی وادار گردد، کنترل‌کننده‌ای خطی براساس مدل خطی طولی هواپیما طراحی شد، سپس این کنترل‌کننده در سامانه حلقه بسته شامل کنترل‌کننده خطی و مدل خطی به ازای سه سرعت مختلف و یک زاویه پیچ قرار داده شد و ملاحظه گردید در هر سه حالت زاویه پیچ سیگنال مبنا را به شکل مناسبی دنبال کرده و بر آن منطبق می‌شود. در ضمن دیده می‌شود که زاویه حمله به میزان بسیار اندکی دچار نوسان شده ولی به سرعت به مقدار صفر برمی‌گردد. در نهایت می‌توان دید که ورودی سامانه یعنی زاویه اسکان افقی مقادیر معقولی را دارند یعنی بیش از حد زیاد نیستند و در نتیجه در عمل به اشباع نمی‌روند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که کنترل‌کننده خطی در سامانه حلقه بسته شامل این کنترل‌کننده و مدل خطی به‌طور مناسبی طراحی شده است. سپس این کنترل‌کننده

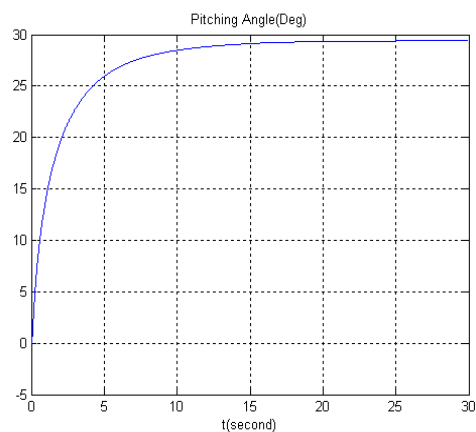


شکل (۱۴): زاویه پیچ بر حسب درجه.



شکل (۱۵): زاویه حمله، نرخ تغییرات زاویه پیچ، و ورودی وارد بر هواپیما یعنی زاویه اسکان افقی.

۳- مقدار زاویه پیچ مطلوب برابر است با 30° .



شکل (۱۶): زاویه پیچ بر حسب درجه.

- Transactions on Automatic Control, Vol. 30, No. 3, pp. 240-247, 1985.
8. Fujimori, A., Terui, F., and Nikiforuk, P. "Flight Control Designs Using v-Gap Metric and Local Multi-Objective Gain-Scheduling", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf, Austin, Texas, 2003.
 9. Haj Salah, A.A., Garna, T., Ragot, J., and Hassani, M. "Transition and Control of Nonlinear Systems by Combining the Loop Shaping Design Procedure and the Gap Metric Theory", transactions of the Institute of Measurement and Control covers applications in instrumentation and control. pp.1-17, 2015.
 10. Roskam, J. "Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Control", Published by: Roskam Aviation and Engineering Corporation, ISBN-10: 1884885179, 1979.
 11. Kirk, D. E. "Optimal Control Theory: An Introduction", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
 12. Roskam, J. "Methods of Estimating Stability and Control Derivatives of Conventional Subsonic Airplane", ID Numbers: OL4584346M, 1977.
 13. Hoak, D.E. and Finck, R. D. "USAF Stability and Control Datcom Flight Control Division", Air Force Flight Dynamics Laboratory, Irvine, CA: Global Engineering Documents, 1978.
 14. Kalman, R. E. "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations", Defense Technical Information Center, Vol. 61, No. 3 of RIAS technical report, 1960
 15. Kalman, R. E. "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 1, No. 2, pp.152-192, 2006.
 16. Zhou, K. and Doyle, J. C. "Essentials of Robust Control", Prentice-Hall, ISBN 0-13-525833-2, 1998.
 17. Kalman, R. E. "Contributions to The Theory of Optimal Control", Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, Vol. 5, No. 2, pp. 102-119, 1960.

خطی ثابت با زمان طراحی شده برای مدل خطی در سامانه حلقه بسته شامل این کنترل کننده و مدل غیرخطی در حالی که سرعت هواپیما نیز متغیر است، قرار داده شد تا ببینیم آیا در این حالت نیز سیگنال مبنا به خوبی دنبال می شود؟ به دلیل وابستگی دینامیک غیرخطی هواپیما به سرعت و نیز ثابت نبودن سرعت حین مانور، کنترل کننده خطی ثابت کارآیی رضایت بخشی از خود نشان نداد. بنابراین، برای حصول همگرایی و به دست آوردن زاویه پیچ مطلوب باید از کنترل کننده ای استفاده کرد به طوری که ضرایب آن بتوانند با توجه به تغییرات مدل در نتیجه تغییرات سرعت، تغییر کنند. بدین منظور از کنترل کننده برنامه ریزی شده بهره که در مقاله معرفی گردید استفاده می شود. با استفاده از ۹ نقطه از بازه تغییرات سرعت که از الگوریتم ارائه شده به دست آمد، برنامه ریزی بهره برای کنترل کننده های خطی صورت گرفت. با ترکیب کنترل کننده غیرخطی برنامه ریزی شده و سامانه غیرخطی در یک حلقه بسته، مانور طولی مورد نظر به نحو مطلوبی انجام شد.

۶- مراجع

1. Kodhanda, A., Kolhe, J. P., Zeru, T., and Talole, SE. "Robust Aircraft Control Based on UDE Theory", J. Aerospace ENG., Vol. 231, No. 4, pp. 728-742, 2017.
2. Licitra, G., Bürger, A., Williams, P., Ruiterkamp, R., and Diehl, M. "Optimal Input Design for Autonomous Aircraft", J. Control ENC Practice, Vol. 77, pp.15-27, 2018.
3. Fujimori, A., Terui, F., and Nikiforuk, P. N. "Fight Control Design of an Unmanned Space Vehicle Using Gain Scheduling", J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 28, No. 1, pp. 96-105, 2005.
4. Vinnicombe, G. "Uncertainty and Feedback, H_{∞} Loop-Shaping and The v-Gap Metric", Imperial College Press, London, ISBN: 1-86094-163-X, 316pp, 2001.
5. Christen, Urs. "Is the V-Gap Metric Useful for Industrial Applications", Proc. European Control Conf (ECC), Cambridge, UK, 2003.
6. Georgiou, T.T. "Optimal Robustness in the Gap Metric", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 6, pp. 673-686, 1990.
7. El-Sakkary, A. "The Gap Metric: Robustness of Stabilization of Feedback Systems", IEEE

پیوست :

جدول (پ.۱): اسامی مولفه‌های بردارهای معادلات حرکت

نیروی آیرودینامیکی در راستای محور X	F_{Ax}
نیروی آیرودینامیکی در راستای محور Y	F_{Ay}
نیروی آیرودینامیکی در راستای محور Z	F_{Az}
نیروی رانش در راستای محور X	F_{Tx}
نیروی رانش در راستای محور Y	F_{Ty}
نیروی رانش در راستای محور Z	F_{Tz}
گشتاور غلطشی	L_A
گشتاور آیرودینامیکی	M_A
گشتاور گردشی	N_A
گشتاور رانشی حول محور طولی	L_T
گشتاور رانشی حول محور عرضی	M_T
گشتاور رانشی حول محور عمودی	N_T
یکی از مولفه‌های سرعت خطی هواپیما	U
یکی از مولفه‌های سرعت خطی هواپیما	V
یکی از مولفه‌های سرعت خطی هواپیما	W
مولفه سرعت زاویه‌ای هواپیما در راستای محور طولی	P
مولفه سرعت زاویه‌ای هواپیما در راستای محور عرضی	Q
مولفه سرعت زاویه‌ای هواپیما در راستای محور عمودی	R

$Z_{\alpha} = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{L_{\alpha}} + 2C_{D_{\alpha}})}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$M_{T_{\alpha}} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c}^2 C_{m_{\alpha}}}{2I_{yy} U_1} (\text{sec}^{-1})$
$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{L_{\dot{\alpha}}}}{2mU_1} (ft \text{ sec}^{-1})$	$M_q = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c}^2 C_{m_q}}{2I_{yy} U_1} (\text{sec}^{-1})$
$Z_{\ddot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{L_{\ddot{\alpha}}}}{2mU_1} (ft \text{ sec}^{-1})$	$M_{T_{\ddot{\alpha}}} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_{\ddot{\alpha}}}}{I_{yy}} (\text{sec}^{-2})$

جدول (پ.۳): مشتقات پایداری سمتی جانبی بعددار

$Y_{\beta} = \frac{\bar{q}_1 s C_{y_{\beta}}}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$L_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{l_{\delta_A}}}{I_{xx}} (\text{sec}^{-2})$
$Y_p = \frac{\bar{q}_1 s b C_{y_p}}{2mU_1} (ft \text{ sec}^{-1})$	$L_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{l_{\delta_r}}}{I_{xx}} (\text{sec}^{-2})$
$Y_r = \frac{\bar{q}_1 s b C_{y_r}}{2mU_1} (ft \text{ sec}^{-1})$	$N_{\beta} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{n_{\beta}}}{I_{zz}} (\text{sec}^{-2})$
$Y_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s C_{y_{\delta_A}}}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$N_{T_{\beta}} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{n_{T_{\beta}}}}{I_{zz}} (\text{sec}^{-2})$
$Y_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 s C_{y_{\delta_r}}}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$N_p = \frac{\bar{q}_1 s b^2 C_{n_p}}{2I_{zz} U_1} (\text{sec}^{-1})$
$L_{\beta} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{l_{\beta}}}{I_{xx}} (\text{sec}^{-2})$	$N_r = \frac{\bar{q}_1 s b^2 C_{n_r}}{2I_{zz} U_1} (\text{sec}^{-1})$
$L_p = \frac{\bar{q}_1 s b^2 C_{l_p}}{2I_{xx} U_1} (\text{sec}^{-1})$	$N_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{n_{\delta_A}}}{I_{zz}} (\text{sec}^{-2})$
$L_r = \frac{\bar{q}_1 s b^2 C_{l_r}}{2I_{xx} U_1} (\text{sec}^{-1})$	$N_{\delta_r} = \frac{\bar{q}_1 s b C_{n_{\delta_r}}}{I_{zz}} (\text{sec}^{-2})$

جدول (پ.۴): مشخصات و مشتقات پایداری و کنترلی

تقریبی هواپیمای جت مسافربری پهن‌پیکر

شرایط پروازی	
ارتفاع (km)	۶/۰۷
جرم مخصوص هوا (kg/m ³)	۰/۱۶۵۳۵

مشخصات هندسی و اینرسی

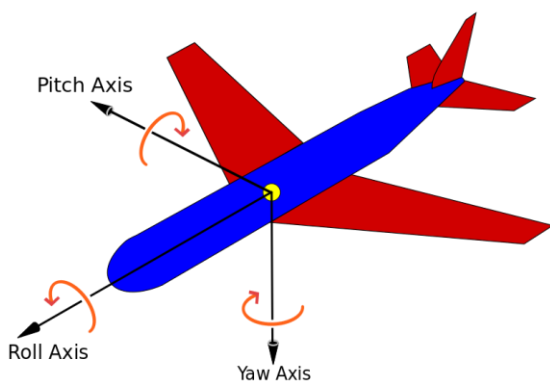
مساحت بال (m ²)	۵۱۰/۹۷
دهانه بال (m)	۵۹/۷۴
وتر هندسی متوسط بال (m)	۸/۳۲
وزن (kg)	۲۸۸۷۲۳/۸۱

جدول (پ.۲): مشتقات پایداری طولی بعددار

$X_u = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{D_u} + 2C_{D_{\alpha}})}{mU_1} (\text{sec}^{-1})$	$Z_{\delta_E} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{L_{\delta_E}}}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$
$X_{T_{\alpha}} = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{T_{\alpha}} + 2C_{T_{\beta}})}{mU_1} (\text{sec}^{-1})$	$M_u = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} (C_{m_u} + 2C_{m_{\dot{\alpha}}})}{I_{yy} U_1} (ft^{-1} \text{ sec}^{-1})$
$X_{\alpha} = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{D_{\alpha}} + 2C_{L_{\alpha}})}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$M_{T_{\alpha}} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} (C_{m_{\alpha}} + 2C_{m_{\dot{\alpha}}})}{I_{yy} U_1} (ft^{-1} \text{ sec}^{-1})$
$X_{\delta_E} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{\delta_E}}{m} (ft \text{ sec}^{-2})$	$M_{\alpha} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_{\alpha}}}{I_{yy}} (\text{sec}^{-2})$
$Z_u = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{L_u} + 2C_{L_{\alpha}})}{mU_1} (\text{sec}^{-1})$	$M_{T_{\alpha}} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_{T_{\alpha}}}}{I_{yy}} (\text{sec}^{-2})$

$C_{l_\beta} = 2 \times 10^{-5} v^2 - 0.0037 v - 0.1067$
$C_{l_p} = -4 \times 10^{-6} v^2 + 0.0023 v - 0.64$
$C_{l_r} = 8 \times 10^{-6} v^2 - 0.0027 v + 0.34$
$C_{l_{\delta\alpha}} = 2 \times 10^{-6} v^2 - 0.0007 v + 0.094$
$C_{l_{\delta\alpha}} = 7 \times 10^{-8} v^2 + 2 \times 10^{-5} v - 0.0015$
$C_{n_\beta} = 5 \times 10^{-6} v^2 - 0.0016 v + 0.2657$
$C_{n_p} = -3 \times 10^{-6} v^2 + 0.0023 v - 0.3634$
$C_{n_r} = -7 \times 10^{-6} v^2 + 0.0025 v - 0.4974$
$C_{n_{\delta\alpha}} = 3 \times 10^{-7} v^2 - 0.0001 v + 0.0154$
$C_{n_{\delta\alpha}} = -6 \times 10^{-8} v^2 + 0.0001 v - 0.12$
$C_{y_\beta} = 6 \times 10^{-5} v^2 - 0.015 v - 0.323$
$C_{y_p} = 0$
$C_{y_r} = 0$
$C_{y_{\delta\alpha}} = 0$
$C_{y_{\delta\alpha}} = -3 \times 10^{-6} v^2 + 0.0004 v + 0.1684$

شکل (پ.۱): زوایای مختلف هواپیما



$۲۴/۶۸ \times ۱۰^۶$	$I_{xx}(\text{kgm}^2)$
$۴۴/۸۸ \times ۱۰^۶$	$I_{yy}(\text{kgm}^2)$
$۶۷/۳۸ \times ۱۰^۶$	$I_{zz}(\text{kgm}^2)$
$۱/۳۲ \times ۱۰^۶$	$I_{xz}(\text{kgm}^2)$

ضرایب حالت دائم	
$C_{L_1} = 6 \times 10^{-5} v^2 - 0.0262 v + 3.2521$	
$C_{D_1} = 2 \times 10^{-5} v^2 - 0.0005 v + 0.0507$	
$C_{T_1} = 2 \times 10^{-5} v^2 - 0.0005 v + 0.0507$	
$C_{m_1} = 0$	
$C_{mT_1} = 0$	

مشتقات طولی	
$C_{m_u} = -6 \times 10^{-6} v^2 + 0.0013 v + 0.0097$	
$C_{m_{u\alpha}} = -7 \times 10^{-5} v^2 + 0.0214 v - 2.5914$	
$C_{m_{u\alpha}} = -0.0004 v^2 + 0.1019 v - 8.3817$	
$C_{m_{uq}} = -0.0005 v^2 + 0.1295 v - 28.74$	
$C_{mT_u} = 0$	
$C_{mT_{u\alpha}} = 0$	
$C_{L_u} = -2 \times 10^{-5} v^2 + 0.0085 v - 0.692$	
$C_{L_{u\alpha}} = 0.0001 v^2 - 0.047 v + 8.2$	
$C_{L_{u\alpha}} = 7 \times 10^{-5} v^2 - 0.0176 v + 7.58$	
$C_{L_{uq}} = 7 \times 10^{-5} v^2 - 0.011 v + 6.09$	
$C_{D_{u\alpha}} = 6 \times 10^{-5} v^2 - 0.023 v + 2.40$	
$C_{D_{uq}} = 2 \times 10^{-5} v^2 - 0.005 v + 0.25$	
$C_{T_{u\alpha}} = 0$	
$C_{L_{\delta\alpha}} = -0.0003 v + 0.3806$	
$C_{D_{\delta\alpha}} = 0$	
$C_{m_{\delta\alpha}} = 5 \times 10^{-6} v^2 - 0.0006 v - 1.384$	

مشتقات عرضی سمتی
