

((یادداشت مهندسی))

## بررسی مدار انتقال LEO به GEO با استفاده از نقاط لاگرانژی سیستم

### زمین - خورشید در حضور اغتشاشات

رضا زردشتی<sup>۱</sup>، ابراهیم صبوری دارابی<sup>۲</sup>، حسین کردجزی<sup>۳</sup>

مجتمع دانشگاهی هوافضا

دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۷)

#### چکیده

در این مقاله، انتقال از مدار LEO به مدار GEO با استفاده از دینامیک مسئله سه جسم محدود و نقاط تعادلی لاگرانژی مبتنی بر سیستم زمین-خورشید در حضور اغتشاشات بررسی شده است. پس از پرتاب فضاپیما به LEO، زاویه میل آن حداقل برابر با عرض جغرافیایی محل پرتاب می‌باشد، بنابراین، برای انتقال آن به GEO می‌بایست با صرف انرژی زیادی، زاویه میل مدار فضاپیما را به صفر رساند. در اینجا با استفاده از دینامیک نقاط لاگرانژی روشی ارائه می‌گردد که انرژی ناشی از تغییر زاویه میل را حداقل نماید. برای این منظور، مسئله سه بخش تقسیم می‌شود. در مرحله نخست، شرایط اولیه مناسب در GEO به دست می‌آید که پس از مدت‌زمان مشخص به مجاورت نقطه  $L_1$  سیستم مزبور می‌رسد. مرحله دوم مشابه مرحله اول می‌باشد، با این تفاوت که این بار شرایط اولیه در LEO و به صورت انتقال رو به جلو از  $L_1$  به دست می‌آید. در نهایت از ویژگی مدارهای هاله حول  $L_1$ ، برای اتصال دو مسیر استفاده می‌شود تا مسیر یکپارچه موردنظر حاصل شود. به منظور رسیدن به شرایط واقعی مسئله، مدل اغتشاشات نیز به معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود اضافه می‌گردند تا تأثیر آن در نتایج حاصله مورد بررسی قرار گیرد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که ایمپالس مورد نیاز با روش مزبور برای زوایای میل بالاتر از ۲۹ درجه، حتی در حضور اغتشاشات نیز بهتر از روش هوهمان به دست می‌آید.

**واژه‌های کلیدی:** مدار GEO، مسئله سه جسم محدود، نقاط لاگرانژی سیستم زمین-خورشید، اغتشاشات کیهانی

## Investigation of the LEO Transfer Orbit to GEO Using Lagrangian Points of the Earth-Sun System in the Presence of Perturbations

R. Zardashti, E. SabooriDarabi, H. Kordjazi

Aerospace Engineering Department

MalekAshtar University of Technology

(Received: 17/February/2018; Accepted: 08/December/2018)

#### ABSTRACT

In this paper, a LEO to GEO transfer orbit is presented using the invariant dynamics of the Restricted Three Body Problem (RTBP) and the Lagrangian equilibrium points of the Earth-Sun system in the presence of disturbances. After launching the spacecraft to the LEO, its incidence angle is at least equal to the latitude of the launch site, so to transfer it to the GEO, it should be able to bring the spacecraft circle to zero with a large amount of energy. Here, with the help of the dynamics of the Lagrangian points, a method is proposed that minimizes the energy generated by the change in the incidence angle. For that purpose, the problem is divided into three parts. In the first stage, the appropriate initial conditions are obtained in GEO, which reaches the  $L_1$  point after the set time. The second phase is similar to the first one, with the difference that the initial conditions in the LEO are obtained in the form of forward transfer from  $L_1$ . Finally, the Halo orbit around  $L_1$  is used to connect two trajectories to achieve the integrated transfer orbit. In the following, the disturbances model is also added to the motion equations of the problem of three finite objects, in order to evaluate its effect on the results. The simulation results show that the impulse required by this method for inclination orbit greater than 29 degrees, even in the presence of disturbances, is better than the Hohmann transfer method.

**Keywords:** Geostationary Orbit, Three Body Problem, Lagrangian Points of Sun-Earth System, Celestial Perturbation.

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): rezazardashti@dena.kntu.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: ebrahim.saboory@gmail.com

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد: hossein\_kordjazi@yahoo.com

## ۱- مقدمه

یک نقطه پایدار لاگرانژ وجود دارد که به آن نیروی جاذبه وارد نمی‌شود، بنابراین، فضاپیما با حرکت در نزدیکی نقطه لاگرانژ، یک مسیر تکراری را طی می‌کند [۲]. به دلیل دارا بودن ویژگی‌های تعادلی، استفاده از نقاط لاگرانژ در انجام مأموریت‌های فضایی مورد توجه قرار گرفته است که می‌توان به قرارگیری فضاپیماهای سوهور<sup>۱</sup>، جنسیس<sup>۲</sup>، پلانک<sup>۳</sup> و تلسکوپ فضایی جیمز وب<sup>۴</sup> در این نقاط اشاره نمود. همچنین ارزان و آسان بودن مأموریت‌های فضایی با استفاده از این نقاط، از دیگر مزایای نقاط تعادلی لاگرانژ می‌باشد. به‌طور کلی برای انتقال به GEO<sup>۵</sup> از مانور هوهمان استفاده می‌شود. با استفاده از این انتقال،  $\Delta v$  کل مورد نیاز جهت انتقال از LEO<sup>۶</sup> به GEO با توجه به زوایای میل مدار اولیه در حدود 3.9 km/s تا 4.7 km/s می‌باشد. هدف از این مقاله پیدا نمودن مسیرهای انتقالی کم‌هزینه جهت پرواز از LEO به GEO با استفاده از نقاط لاگرانژ مسئله سه جسم محدود می‌باشد.

تاکنون برای پیدا نمودن مسیرهای کم‌هزینه جهت انتقال از LEO به GEO، تحقیقات و پژوهش‌های زیادی انجام گرفته است. در سال ۲۰۱۶ بارابس و همکاران [۳] با استفاده از ارتباط مانیفولدهای پایدار و مدارهای پریرودیک حول نقاط لاگرانژ، دسته‌ای از مسیرهای پروازی جهت انتقال از LEO به GEO پیدا نموده‌اند. در این مقاله که ارتفاعات مختلف LEO را برای شروع انتقال در نظر گرفته است، مسیرهای پروازی رو به جلو<sup>۷</sup> و رو به عقب<sup>۸</sup> تا مجاورت نقطه L<sub>1</sub> به‌دست آورده می‌شود و سپس مسیرهایی که ثابت ژاکوبی آن‌ها برابر باشد با استفاده از دو مانور کوچک به یکدیگر متصل می‌گردند. در پایان مقاله به این مطلب اشاره شده است که  $\Delta v$  مورد نیاز جهت این انتقال برابر با ۴/۳۴ km/s می‌باشد که از مانور هوهمان کمتر است، اما اشاره‌ای به زاویه میل LEO نموده که طبق تمامی پژوهش‌های دیگر تأثیر بسزایی در نتیجه  $\Delta v$  مورد نیاز دارد.

نقاط لاگرانژی نقاطی در فضا هستند که برآیند نیروهای گرانشی دو جرم بزرگ مانند زمین و خورشید یا زمین و ماه با نیروی گریز از مرکز جرم سوم و بسیار کوچک‌تری مانند فضاپیماها برابری می‌کند. این برهم‌کنش نیروها نقاط ثابت و پایداری را ایجاد می‌کنند که فضاپیما می‌تواند در آنجا قرار گیرد و مأموریت مشاهده را انجام دهد.

بر اساس مسئله سه جرم محدود در سیستم زمین-خورشید، پنج نقطه لاگرانژی در اطراف آن وجود دارد (مطابق شکل ۱). اولین نقطه لاگرانژ موسوم به L<sub>1</sub> میان زمین و خورشید واقع است و در فاصله یک میلیون مایلی (یک و نیم میلیون کیلومتر) از زمین قرار دارد. از آنجا که این نقطه دید مناسبی نسبت به خورشید ارائه می‌دهد از آن برای مطالعه خورشید و مشاهدات جوی اعماق فضا استفاده می‌گردد. L<sub>2</sub> نیز در فاصله یک میلیون مایلی (یک و نیم میلیون کیلومتر) زمین اما در جهت مخالف خورشید قرار دارد. در این نقطه که پشت به زمین قرار دارد فضاپیما قادر خواهد بود مشاهدات مناسبی از اعماق فضا انجام دهد. L<sub>3</sub> در پشت خورشید و در مقابل زمین قرار دارد. در حال حاضر مطالعات علمی، استفاده‌ای برای این نقطه نیافته است، گرچه در داستان‌های علمی کاربرد فراوانی دارد. L<sub>4</sub> و L<sub>5</sub> طبق تعبیر آژانس فضایی اروپا مانند توپیی در یک قذح بزرگ پایدار هستند. این نقاط با زاویه شصت درجه نسبت به خط واصل زمین و خورشید و میان آن‌ها قرار دارند. به خاطر پایداری در این نقاط، سیارک‌ها و اشیاء فضایی تمایل زیادی برای رسیدن به این مکان‌ها دارند. در شکل ۱ موقعیت نقاط لاگرانژ نشان داده شده است. L<sub>1</sub>، L<sub>2</sub> و L<sub>3</sub> همگی ناپایدارند و اگر برای فضاپیمایی که در این نقاط قرار می‌گیرد، مانور تصحیح انجام نشود هر اغتشاش کوچکی با گذشت زمان، انحراف زیادی ایجاد می‌کند. همچنین نقاط L<sub>4</sub> و L<sub>5</sub> در تمامی جهات پایدارند [۱]. مدارهایی که حول نقاط لاگرانژ تشکیل می‌گردند را مدار هاله می‌نامند. مدار هاله یک مدار پریرودیک و سه‌بعدی در مجاورت نقاط لاگرانژ L<sub>1</sub>، L<sub>2</sub> و L<sub>3</sub> در مبحث مسئله سه جسم محدود می‌باشد. این مدار نتیجه برهم‌کنش پیچیده جاذبه‌های دو سیاره و نیروی کوریولیس و گریز از مرکز بر روی یک فضاپیماست. گرچه فضاپیما در یک مدار هاله به‌صورت مسیر دایروی حول نقطه لاگرانژ حرکت می‌کند اما از لحاظ تئوری فقط

1- SOHO

2- Genesis

3- Plank

4- JWST

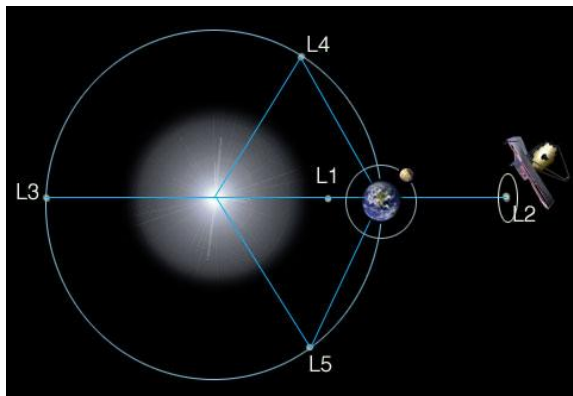
5- Geostationary Orbit

6- Low Earth Orbit

7- Forward

8- Backward

همان‌طور که در سایر پژوهش‌ها اشاره شده است، به دلیل آن که زمان کل انتقال تقریباً طولانی می‌باشد لذا فضاپیما در معرض اغتشاشات زیادی قرار می‌گیرد و بنابراین، می‌بایست برای دقیق‌تر شدن نتایج، ترم‌های اغتشاشی را نیز لحاظ نمود. در انتها، نتایج مقایسه و جمع‌بندی شده است.

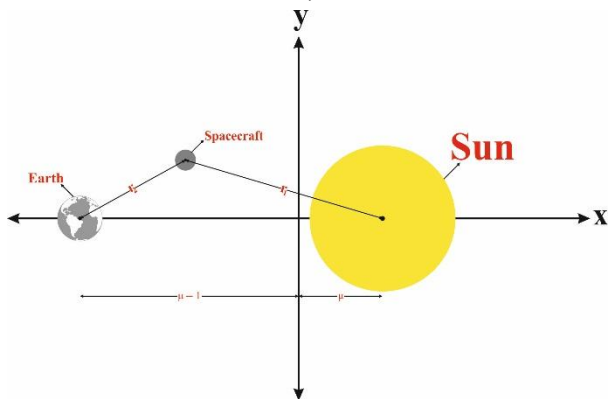


شکل (۱): نقاط لاگرانژی سیستم زمین-خورشید

## ۲- مسئله سه جسم محدود

در این مسئله جسم اصلی بزرگ با جرم  $\mu$  - ۱ در مکان  $(\mu, 0)$  و جسم اصلی کوچک با جرم  $\mu$  در مکان  $(\mu - 1; 0)$  قرار دارند. شکل ۲ گویای این مسئله می‌باشد. پارامتر  $\mu$  که پارامتر جاذبه نامیده می‌شود برای سیستم زمین-خورشید برابر است با:

$$\mu = 3.040423398 \times 10^{-6}$$



شکل (۲): مسئله سه جسم محدود

در این صورت معادلات مسئله سه جسم محدود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

در مقاله [۱۱] به مسئله مسیر انتقال با استفاده از سیستم زمین-خورشید پرداخته شده و اثبات شده که استفاده از مینیولدهای نقطه لاگرانژی  $L_1$ ، مسیر انتقال با مصرف سوخت کمتر و زمان پروازی کوتاهتری را به نسبت نقطه  $L_2$  ارائه می‌نماید.

پژوهشی مشابه با مقاله بارابس در سال ۲۰۰۸ توسط هررا [۴] انجام گرفته است. در این پژوهش مسیرهای انتقالی با استفاده از مدارهای لیپانف حول نقاط لاگرانژی مسئله سه جسم محدود به یکدیگر متصل می‌گردند که با استفاده از این روش،  $\Delta v$  مورد نیاز جهت انتقال از LEO و GEO به مجاورت نقطه لاگرانژی به ترتیب برابر با  $1.9 \text{ km/s}$  و  $2.1 \text{ km/s}$  به دست آمده است که در حالت دوم، مسیرهای پروازی رو به عقب هستند. در این روش مدت‌زمان کل انتقال بین شش تا هشت ماه در نظر گرفته شده است. هرچند که وجود اغتشاشات در تحقیق مزبور نادیده گرفته شده است.

وجه تمایز اساسی این مقاله با سایر مقالات مشابه، در نظر گرفتن اغتشاشات کیهانی می‌باشد که می‌تواند تأثیر قابل ملاحظه‌ای در حرکت ماهواره داشته باشد. به عنوان نمونه، در سال ۲۰۱۳ آقای عدنان و دوستان ایشان [۱۰]، در مقاله‌ای به مطالعه تأثیر اغتشاشات اعم از جاذبه خورشید و ماه و همچنین اثر پخی زمین، درگ و... بر روی ماهواره با استفاده از روش کوئل<sup>۱</sup> پرداخته‌اند، نتیجه حاصل از این مقاله نشان می‌دهد که اغتشاشات به دست آمده برای زمان یک ساعت حرکت در مدار مقدار قابل توجهی بوده و برای انجام محاسبات دقیق، قابل صرف نظر کردن نیست.

مقاله حاضر شامل چندین بخش اصلی می‌باشد، در بخش نخست به معرفی مسئله سه جسم محدود و معرفی نقاط لاگرانژی پرداخته شده است. پس از آن با استفاده از دینامیک نقاط لاگرانژی و معادلات به دست آمده از مرحله قبل، مسیرهای انتقالی رو به جلو و رو به عقب و همچنین مدارهای هاله حول نقطه  $L_1$  محاسبه می‌گردند. در مرحله آخر شبیه‌سازی مسیرهای انتقالی قابل قبول توسط مدار هاله به یکدیگر متصل خواهند شد. سرانجام نوبت به اضافه نمودن پارامترهای اغتشاشی به معادلات مسئله می‌باشد.

$$L_4: \left( \frac{r_{12}(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2)}; \frac{\sqrt{3}}{2} r_{12} \right) \quad (14)$$

$$L_5: \left( \frac{r_{12}(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2)}; -\frac{\sqrt{3}}{2} r_{12} \right) \quad (15)$$

در این روابط  $m_1$  جرم زمین و  $m_2$  جرم ماه می‌باشد. با انجام محاسبات فوق محل پنج نقطه لاگرانژ در سیستم زمین-خورشید به دست خواهد آمد.

#### ۴- اصول شبیه‌سازی

برای انجام شبیه‌سازی، مسئله را به سه مرحله تقسیم می‌نماییم. در مرحله اول با حل معادلات مسئله سه جسم محدود یا RTBP، شرایط اولیه قابل قبول در GEO را پیدا می‌نماییم که فضاییما قادر است به ازای آن‌ها پس از مدت‌زمان مشخص به صورت رو به عقب به مجاورت نقطه  $L_1$  برسد. در مرحله دوم همان مرحله قبل را تکرار می‌نماییم با این تفاوت که این بار شرایط اولیه را در مدار LEO و به صورت رو به جلو پیدا می‌کنیم. در آخرین مرحله نیز با استفاده از مدار هاله مسیر پروازی‌های به دست آمده از دو مرحله قبل را به یکدیگر متصل می‌نماییم.

#### ۴-۱- حل معادلات حرکت از GEO به سمت نقطه $L_1$

همان‌طور که گفته شد در مرحله اول می‌خواهیم با حل رو به عقب معادلات حرکت در مختصات RTBP، شرایط اولیه مناسب را جهت انتقال از GEO به مجاورت نقطه  $L_1$  به ازای  $\Delta v$  های مختلف پیدا نماییم. در این مرحله حل معادلات را به صورت رو به عقب انجام می‌دهیم چرا که می‌خواهیم مسیر پروازی‌هایی را پیدا نماییم که از مجاورت نقطه  $L_1$  به سمت مدار GEO می‌آیند.

برای مشخص نمودن موقعیت فضاییما در یک مدار دایروی حول زمین (در اینجا GEO) یا به عبارت دیگر پیدا نمودن شرایط اولیه در GEO تنها کافی است شعاع یا پریود مدار به همراه سه زاویه موجود باشد. این زوایا عبارت‌اند از: شیب مدار نسبت به صفحه دایره البروج  $i$ ، زاویه بین جهت مثبت محور  $X$  تا خط گره صعودی مدار در صفحه دایره البروج  $(Z=0)\Omega$  و در نهایت زاویه پاد ساعت‌گرد بین خط گره صعودی تا بردار موقعیت ماهواره (طول جغرافیایی حقیقی یا  $\omega$ ).

برای پیدا نمودن شرایط اولیه در مختصات RTBP ابتدا می‌بایست تبدیل مختصات را بین دستگاه مداری و

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3)$$

که در آن،  $\Phi$  پتانسیل گرانشی و برابر است با:

$$\Phi(x; y; z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (4)$$

و همچنین:

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad (5)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2} \quad (6)$$

به این شکل از مسئله سه جسم محدود، مدل RTBP می‌گویند [۷]. در این مدل همه پارامترها اعم از فاصله، سرعت و زمان می‌بایست بی‌بعد باشند. برای بی‌بعد کردن پارامترهای مذکور از روابط زیر استفاده می‌شود [۲]:

$$d' = Ld \quad (7)$$

$$s' = Vs \quad (8)$$

$$t' = \frac{T}{2\pi} t \quad (9)$$

$L$  فاصله بین مرکز جرم خورشید و زمین می‌باشد که برابر با 1 AU یا  $1.496 \times 10^8$  کیلومتر است.  $V$  سرعت مداری جسم بزرگ‌تر یعنی خورشید و برابر با 29,784 کیلومتر بر ثانیه،  $T$  پریود مدار اجسام اصلی در مسئله سه جسم محدود می‌باشد که برابر است با  $3.147 \times 10^7$  ثانیه.

#### ۳- نقاط لاگرانژ

گرچه معادلات حرکت مسئله سه جسم حل تحلیلی ندارند، اما می‌توان از آن‌ها برای تعیین موقعیت نقاط تعادلی استفاده کرد. نقاط تعادلی لاگرانژ با شرایط زیر تعریف می‌گردند [۵]:

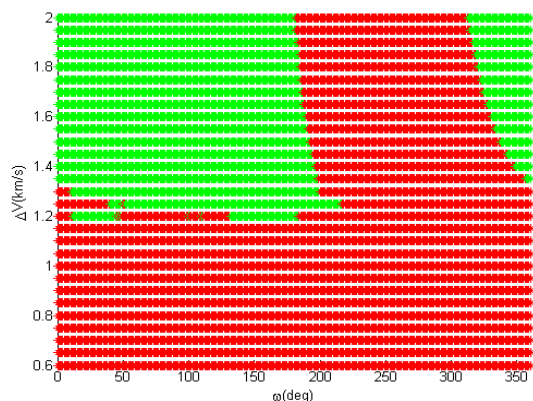
$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad \& \quad \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \quad (10)$$

بنابراین، با حل معادلات ۱ تا ۳ و با در نظر گرفتن معادله ۱۰، پنج نقطه تعادلی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$L_1: \left( r_{12} \left[ 1 - \left( \frac{m_2}{3(m_1 + m_2)} \right)^{\frac{1}{3}} \right]; 0 \right) \quad (11)$$

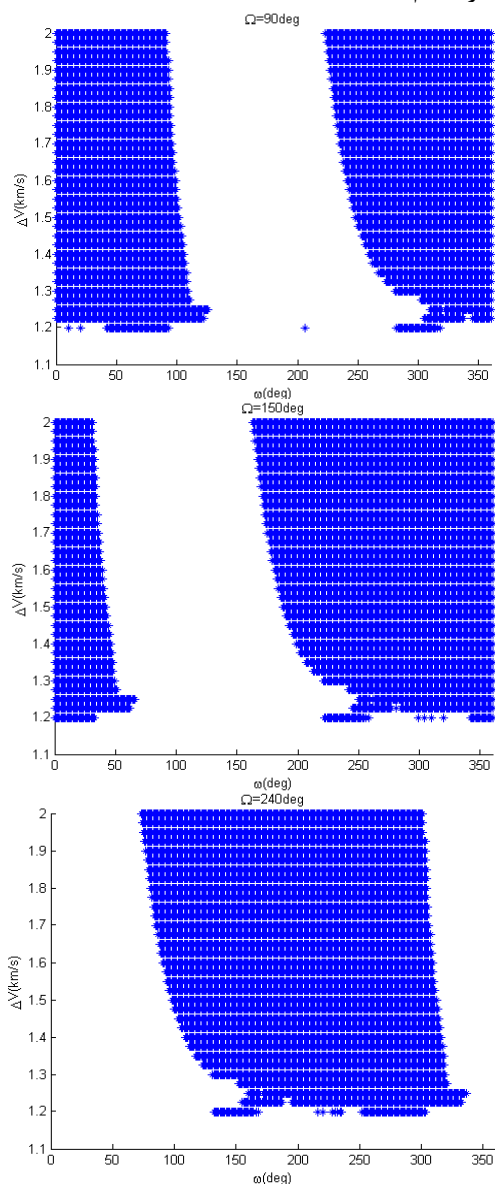
$$L_2: \left( r_{12} \left[ 1 + \left( \frac{m_2}{3(m_1 + m_2)} \right)^{\frac{1}{3}} \right]; 0 \right) \quad (12)$$

$$L_3: \left( -r_{12} \left[ 1 + \frac{5}{12} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \right]; 0 \right) \quad (13)$$



شکل (۳): زوج  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega = 0$

حال مطابق شکل ۴ می‌توان همین محاسبات را برای دیگر  $\Omega$ ها نیز انجام داد.



شکل (۴): زوج  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega$ های مختلف.

زمین مرکز و سپس از زمین مرکز به RTBP انجام شود [۶]. سرانجام برای انتقال به دستگاه RTBP کافی است مقدار  $\mu - 1$  به مؤلفه  $x$  اضافه شود.

حال شرایط اولیه برای حل معادلات مسئله سه جسم محدود در اختیار می‌باشد. در ادامه می‌توان معادلات حرکت را تا نزدیکی  $L_1$  حل کرد. برای این کار از ایمپالس  $\Delta v$  و حداکثر زمان ۱۵۰ روزه استفاده می‌گردد. برای اطمینان از اینکه فضاپیما به مجاورت نقطه لاگرانژ رسیده باشد، از ناحیه مرزی نقطه مزبور موسوم به ناحیه پوانکاره<sup>۱</sup> استفاده می‌شود و لذا حل معادلات تا جایی ادامه می‌یابد که فضاپیما به این محدوده برسد. این محاسبات در نقاط مختلف مدار GEO انجام می‌شود یعنی همه  $\omega$ های مختلف را در نظر گرفته و در همه این نقاط،  $\Delta v$ های متفاوت را اعمال می‌نماییم. سپس زوج  $(\omega; \Delta v)$ هایی که فضاپیما به ازای آن‌ها طی کمتر از ۱۵۰ روز به محدوده پوانکاره می‌رسد انتخاب می‌گردد. محاسبات مزبور ابتدا برای  $\Omega = 0$  و سپس برای سایر  $\Omega$ ها انجام می‌شود.

نقطه  $L_1$  سیستم زمین-خورشید در مدل RTBP در مکان  $(0; -0.98998598)$  واقع است. ناحیه پوانکاره را در فاصله ۴۰۰۰۰۰ کیلومتری سمت چپ نقطه  $L_1$  در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از مدل RTBP معادله محدوده پوانکاره به صورت زیر خواهد بود:

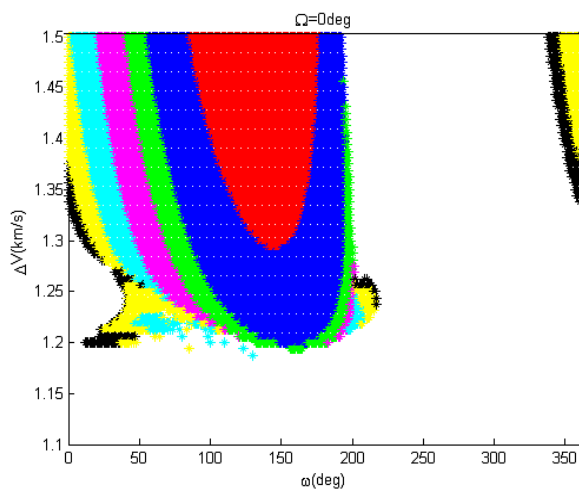
$$x = -0.99265981 \quad (21)$$

با حل معادلات حرکت در مسئله سه جسم محدود می‌توان زوج  $(\omega; \Delta v)$  که به وسیله آن‌ها در کمتر از ۱۵۰ روز به محدوده پوانکاره رسید را رسم نمود.  $\omega$  بین صفر تا ۳۶۰ درجه و  $\Delta v$  بین صفر تا ۲ کیلومتر بر ثانیه لحاظ می‌شود.

در شکل ۳ زوج  $(\omega; \Delta v)$ هایی که فضاپیما می‌تواند به ازای آن‌ها در کمتر از ۱۵۰ روز به محدوده پوانکاره برسد برای  $\Omega = 0$  رسم شده است. نقاط سبز رنگ معرف  $(\omega; \Delta v)$ هایی است که به ازای آن‌ها می‌توان در مدت زمان مشخص شده به محدوده پوانکاره رسید و نقاط قرمز متعلق به  $(\omega; \Delta v)$ هایی است که اصلاً به محدوده پوانکاره نمی‌رسند یا برای رسیدن به این محدوده به بیش از ۱۵۰ روز زمان نیاز دارند.

<sup>۱</sup>Poincare Section

در شکل ۶ زمان رسیدن فضاپیما به محدوده پوانکاره به ازای  $(\omega; \Delta v)$  های قابل قبول برای حالت  $\Omega = 0$  نشان داده شده است. در نقاط قرمز رنگ فضاپیما کمتر از ده روز، در نقاط آبی بین ده تا پانزده روز، در نقاط سبز بین بیست تا سی روز، در نقاط بنفش بین سی تا پنجاه روز، در نقاط فیروزه‌ای بین پنجاه تا هشتاد روز، در نقاط زرد بین هشتاد تا صد و بیست روز و در نقاط سیاه در مدت بیش از صد و بیست روز به محدوده پوانکاره می‌رسد.



شکل (۶): نمودار زمانی  $(\omega; \Delta v)$ .

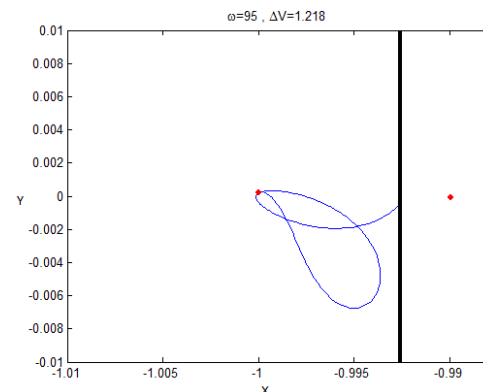
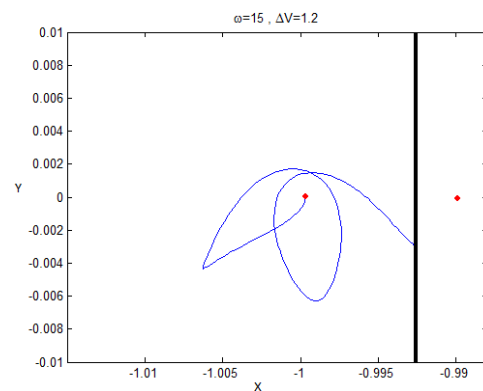
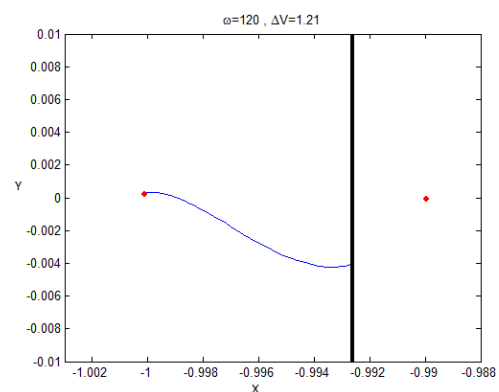
پس از این که شرایط اولیه قابل قبول برای فضاپیما جهت حرکت رو به عقب از GEO به مجاورت نقطه  $L_1$  پیدا شد، می‌بایست زوج  $(\omega; \Delta v)$  هایی انتخاب شود که فضاپیما به ازای آن‌ها مدتی را در مجاورت نقطه  $L_1$  می‌ماند. برای آن که بدانیم فضاپیما در محدوده نقطه  $L_1$  است از یک ناحیه پوانکاره دیگر استفاده می‌شود. این ناحیه در  $400000$  کیلومتری سمت راست نقطه  $L_1$  در نظر گرفته می‌شود که در مختصات RTBP به صورت زیر خواهد بود:

$$x = -0.98731214 \quad (22)$$

بار دیگر معادلات حرکت را حل می‌نماییم و محاسبات را تا جایی ادامه می‌دهیم که فضاپیما به محدوده پوانکاره برسد. سپس شرایط اولیه مناسب برای این که فضاپیما مدت زمانی در این ناحیه باقی بماند را بر می‌گزینیم. در شکل ۷ محدوده‌های پوانکاره در مسئله سه جسم نشان داده شده است.

با مشاهده نمودارهای بالا می‌توان نتیجه گرفت رفتار  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega$  های مختلف تقریباً مشابه همدیگر است و تنها به اندازه  $\Omega$  جا به جا می‌شوند. با این حال به راحتی می‌توان دید کمینه  $\Delta v$  برای رسیدن فضاپیما در مدت کمتر از ۱۵۰ روز به محدوده پوانکاره، تقریباً برابر است با ۱/۲ کیلومتر بر ثانیه.

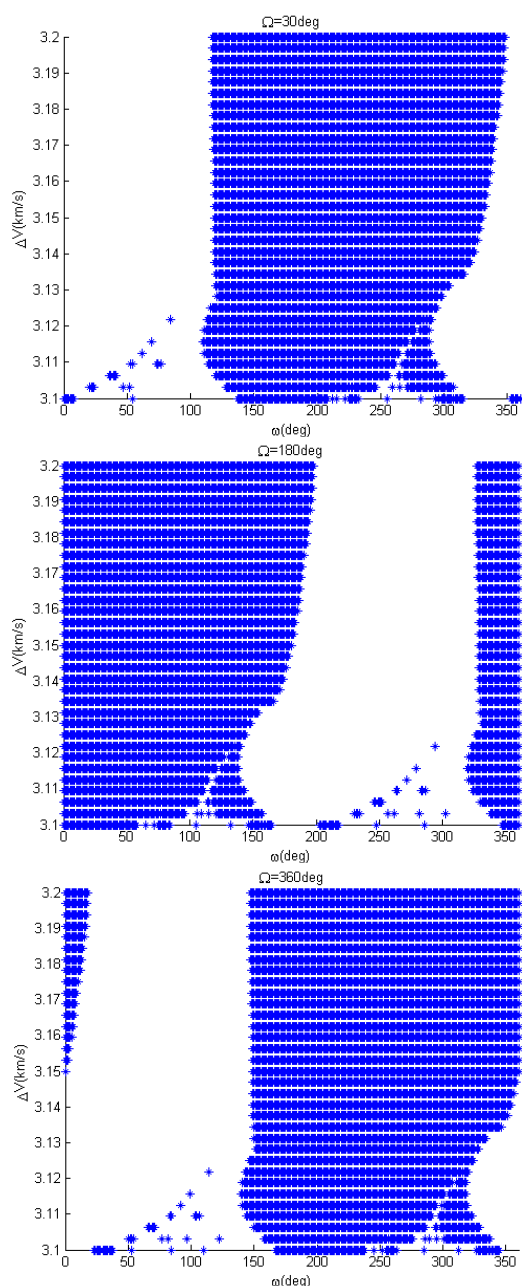
در شکل ۵ نمونه‌ای از مسیر پروازی‌هایی که فضاپیما در کمتر از ۱۵۰ روز به محدوده پوانکاره می‌رسد رسم شده است.



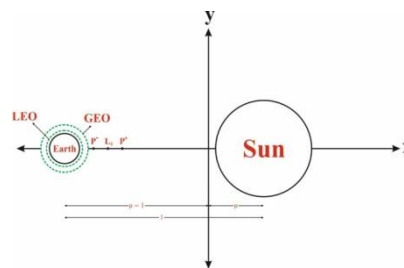
شکل (۵): مسیر پروازی‌های مختلف با شرایط اولیه متفاوت در حالت حل رو به عقب.

همانند روش بخش قبل به دست می‌آید. برای آنکه بدانیم فضاپیما چه هنگام به مجاورت نقطه تعادلی  $L_1$  رسیده است ناحیه پوانکاره در مختصات RTBP همچون مرحله قبل با معادله  $x = -0.99265981$  در نظر گرفته می‌شود. محدوده  $\omega$  بین صفر و  $360^\circ$  درجه و هم‌چنین محدوده  $\Delta v$  را بین صفر تا  $3.5$  کیلومتر بر ثانیه لحاظ می‌گردد. این محاسبات برای  $i = 23.442 \text{ deg}$  انجام می‌شود.

در شکل ۹ زوج  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega$ های متفاوت رسم شده است که فضاپیما قادر است به ازای  $(\omega; \Delta v)$ های مشخص در کمتر از ۲۰۰ روز به محدوده پوانکاره برسد.

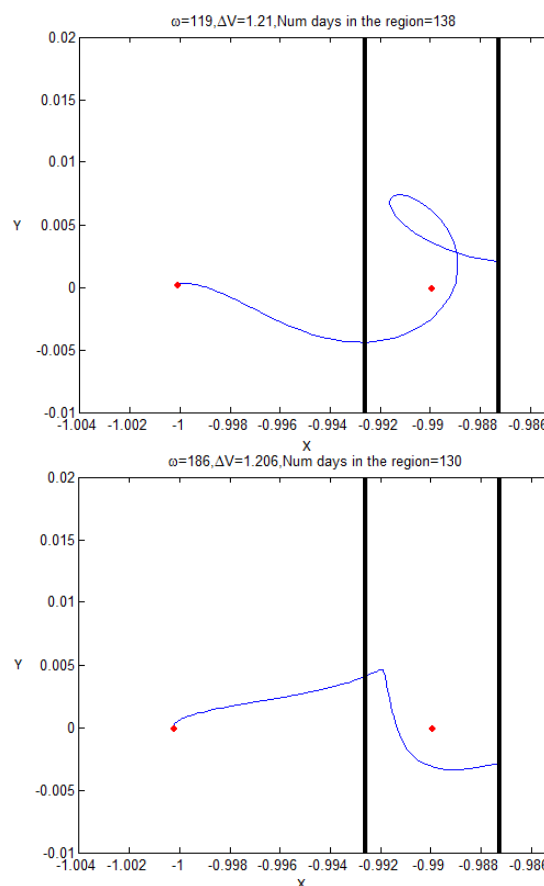


شکل (۹): زوج  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega$ های مختلف.



شکل (۷): موقعیت نواحی مرزی در مسئله سه جسم محدود.

حال می‌توان مطابق شکل ۸ نمونه‌ای از مسیر پروازی‌های متفاوت به ازای  $(\omega; \Delta v)$ های مختلف که مدت‌زمانی مشخص در مجاورت نقطه  $L_1$  باقی می‌مانند را رسم نمود.

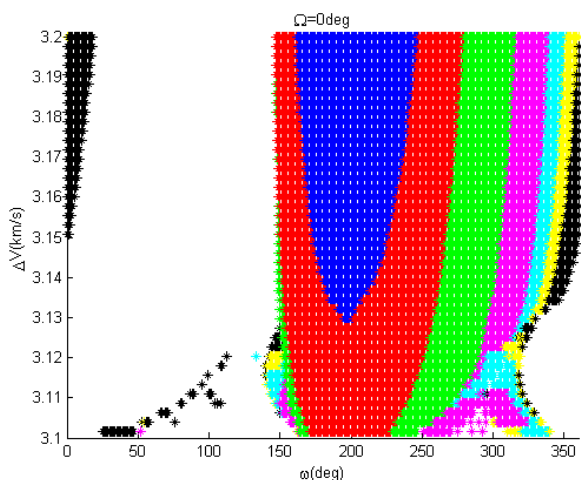


شکل (۸): باقی ماندن مسیر پروازی‌های متفاوت با شرایط اولیه مختلف در محدوده پوانکاره.

#### ۴-۲- حل معادلات حرکت از LEO به سمت نقطه $L_1$

در مرحله دوم شبیه‌سازی، معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود را به صورت رو به جلو و از مدار LEO حل می‌نماییم. هدف، رسیدن به مجاورت نقطه  $L_1$  در مدت حداکثر ۲۰۰ روز می‌باشد. مدار LEO را در  $185$  کیلومتری از سطح زمین و با زوایای میل متفاوت در نظر می‌گیریم و شرایط اولیه آن

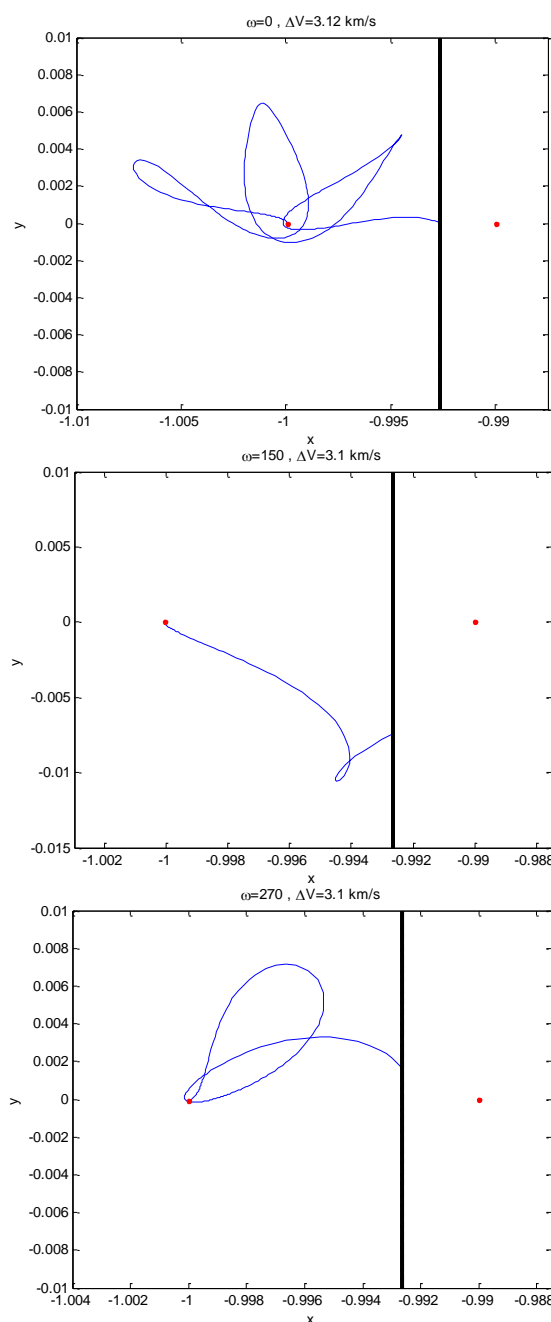
در شکل ۱۱ زمان رسیدن فضاپیما به محدوده پوانکاره به ازای  $(\omega; \Delta v)$  های قابل قبول برای حالت  $\Omega = 0$  نشان داده شده است. در نقاط آبی رنگ فضاپیما کمتر از ده روز، در نقاط قرمز بین ده تا بیست روز، در نقاط سبز بین بیست تا پنجاه روز، در نقاط بنفش بین پنجاه تا نود روز، در نقاط فیروزه‌ای بین نود تا صد و بیست روز، در نقاط زرد بین صد و بیست تا صد و پنجاه روز و در نقاط سیاه در مدت بیش از صد و پنجاه روز به محدوده پوانکاره می‌رسد.



شکل (۱۱): نمودار زمانی  $(\omega; \Delta v)$ .

همانند مرحله قبل برای GEO، هنگامی که شرایط اولیه قابل قبول برای قطع نمودن ناحیه پوانکاره توسط فضاپیما پیدا شد می‌بایست زوج  $(\omega; \Delta v)$ ، به ازای  $\Omega$  های متفاوت، که باعث می‌گردد فضاپیما مدت‌زمانی مشخص در مجاورت نقطه  $L_1$  باقی بماند را بیابیم. برای این منظور از یک ناحیه پوانکاره مشابه به معادله  $x = -0.98731214$  استفاده می‌شود و حل معادلات RTBP را تا جایی ادامه می‌یابد که فضاپیما در ناحیه باقی بماند. سپس شرایط اولیه‌ای که باعث ماندن فضاپیما در این محدوده برای یک مدت‌زمان مشخص می‌شود را انتخاب می‌گردد. اکنون می‌توان مطابق شکل ۱۲ مسیر پروازی‌های متفاوت به ازای  $(\omega; \Delta v)$  های مختلف که مدت‌زمانی مشخص در مجاورت نقطه  $L_1$  باقی می‌مانند را رسم نمود.

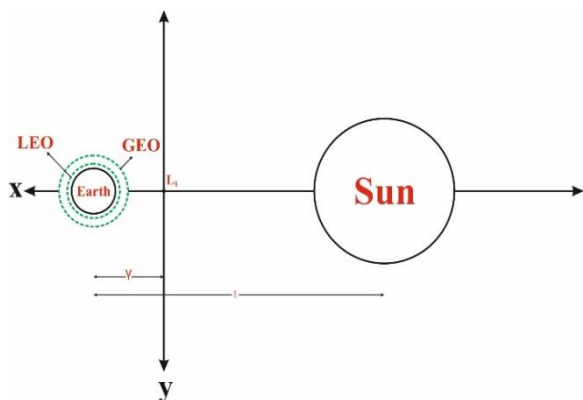
با مشاهده نمودارهای بالا می‌توان گفت رفتار  $(\omega; \Delta v)$  برای  $\Omega$  های مختلف تقریباً مشابه همدیگر است و فقط به اندازه  $\Delta v$  جا به جا می‌شوند. از طرفی به راحتی می‌توان دید کمینه  $\Delta v$  برای رسیدن فضاپیما در مدت کمتر از ۲۰۰ روز به محدوده پوانکاره تقریباً برابر است با:  $\Delta v = 3.1 \text{ km/s}$ . در شکل ۱۰ نمونه‌ای از مسیر پروازی‌هایی که فضاپیما در کمتر از ۲۰۰ روز به محدوده پوانکاره می‌رسد رسم شده است.



شکل (۱۰): نمونه‌ای از مسیر پروازی‌های مختلف با شرایط اولیه متفاوت در حالت حل رو به جلو.



تعادلی  $L_1$  باقی می‌ماند، می‌بایست این مسیرهای پروازی را به‌وسیله دو مانور کوچک به یکدیگر متصل نمود. از آنجا که هدف به‌دست آوردن مدارهای هاله حول نقطه  $L_1$  می‌باشد، بهتر است که دستگاه مختصات را تغییر داد تا نقطه تعادلی  $L_1$  در مرکز دستگاه قرار گیرد. برای این تبدیل مختصات طبق مرجع [۷] عمل می‌شود. مرکز دستگاه جدید نقطه تعادلی  $L_1$  می‌باشد. جهت مثبت محور  $x$  در خلاف جهت جسم بزرگ‌تر (زمین) قرار دارد، جهت مثبت محور  $y$  با محور  $x$  به اندازه  $90^\circ$  درجه به‌صورت پادساعتگرد اختلاف دارد و در نهایت جهت محور  $z$  باید به‌گونه‌ای باشد که دستگاه راست‌گرد را تکمیل نماید. دستگاه جدید در شکل ۱۳ رسم شده است. برای بی‌بعد کردن پارامترهای اصلی، فاصله دو جسم اصلی یعنی زمین و ماه را برابر با یک و فاصله ماه تا نقطه  $L_1$  برابر با  $\gamma$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۱۳): دستگاه جدید با مرکزیت نقطه تعادلی  $L_1$ .

بنابراین، رابطه دو دستگاه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x = -\frac{1}{\gamma}(X - \mu + 1 - \gamma) \quad (23)$$

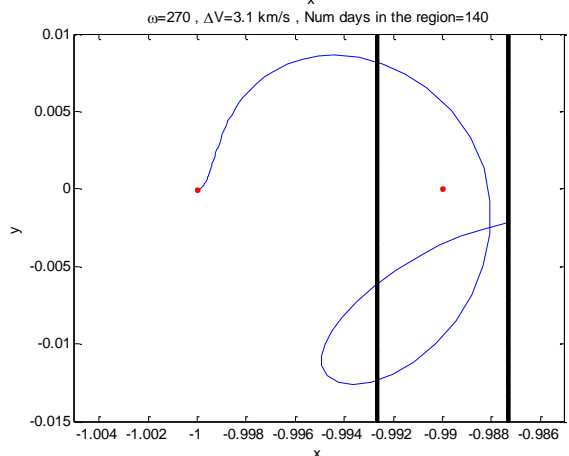
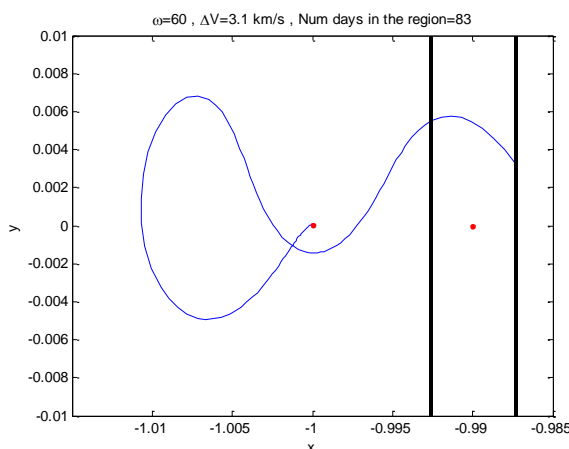
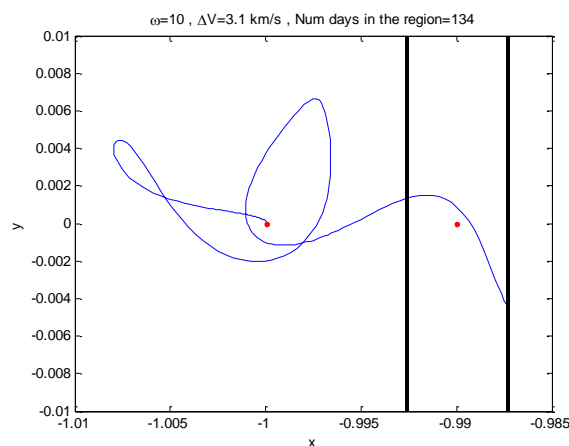
$$y = -\frac{1}{\gamma}Y \quad (24)$$

$$z = \frac{1}{\gamma}Z \quad (25)$$

و در نتیجه، معادلات RTBP طبق روش پوانکاره-لیندست به‌صورت زیر در می‌آیند [۷]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = 0 \quad (26)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0 \quad (27)$$



شکل (۱۲): باقی ماندن مسیر پروازی‌های مختلف با شرایط اولیه متفاوت در محدوده پوانکاره.

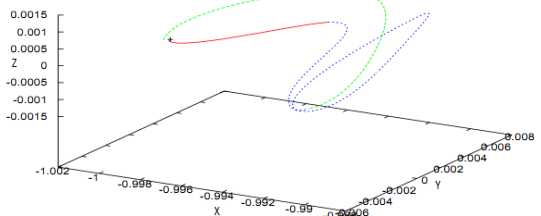
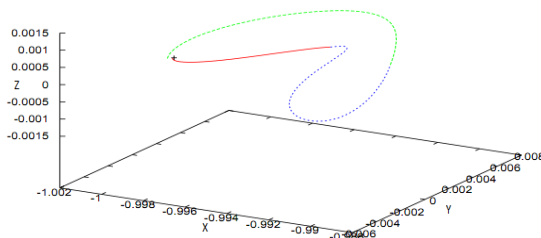
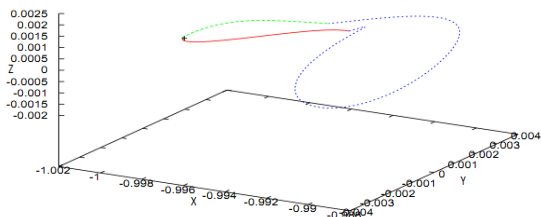
### ۳-۴- متصل نمودن مسیرهای پروازی با استفاده از

#### مدار هاله در مجاورت نقطه $L_1$

حال که شرایط اولیه قابل قبول در GEO و LEO به‌دست آمد که در مدت‌زمان مشخص به ناحیه پوانکاره رسیده و مسیر پروازی‌های آن‌ها مدت‌زمانی را در مجاورت نقطه

محاسبات  $\Delta v$  کل مورد نیاز برای اتصال دو مسیر پروازی را می توان بین پنجاه تا صد متر بر ثانیه در نظر گرفت.

حال که سه مرحله شبیه سازی به اتمام رسید می توان مسیر پروازی فضاییما جهت انتقال از LEO به GEO را مطابق شکل ۱۴ ترسیم نمود.



شکل (۱۴): اتصال مسیره های پروازی به دست آمده از انتقال رو به جلو از مدار LEO (قرمز) و مسیره های پروازی از انتقال رو به عقب از مدار GEO (سبز) به وسیله مسیره های آبی رنگ.

### ۵- اغتشاشات

از آنجا که انتقال از مدار LEO به مدار GEO با استفاده از نقاط لاگرانژ کمی زمان بر است، نمی توان به راحتی از اغتشاشاتی که روی حرکت فضاییما تأثیر می گذارد چشم پوشی نمود. بنابراین، در این بخش با اضافه نمودن شتاب اغتشاشات به معادلات حرکت مسئله سه جسم محدود، تأثیر آن ها در محاسبات و شبیه سازی های به دست آمده از بخش های قبل بررسی می شود. در اینجا دو

$$\ddot{z} + c_2 z = 0 \quad (28)$$

که در این روابط:

$$c_2 = \frac{1}{\gamma^3} \left[ \mu + (-1)^2 (1 - \mu) \left( \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right)^3 \right]$$

آنگاه حل عمومی معادلات فوق به صورت زیر می باشد:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_0 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_0 t} \quad (29)$$

$$+ \alpha_3 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (30)$$

$$y(t) = \bar{k}_2 \alpha_1 e^{\lambda_0 t} - \bar{k}_2 \alpha_2 e^{-\lambda_0 t} \quad (31)$$

$$+ \bar{k}_1 \alpha_3 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (31)$$

$$z(t) = \alpha_4 \cos(\nu_0 t + \varphi_2) \quad (31)$$

که  $\alpha_i$  و  $\varphi_i$  مقادیر دلخواه اولیه می باشند (و دامنه) و بقیه پارامترهای مدل که تنها به  $c_2$  وابسته هستند و به صورت زیر به دست می آیند:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 - c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}} \quad (32)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}} \quad (33)$$

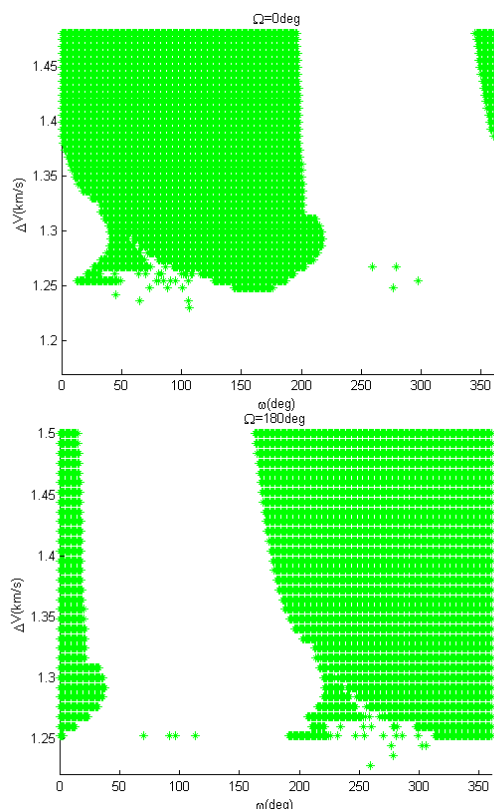
$$\nu_0 = \sqrt{c_2} \quad (34)$$

$$\bar{k}_2 = \frac{\lambda_0^2 - 1 - 2c_2}{2\lambda_0} \quad (35)$$

$$\bar{k}_1 = -\frac{\omega_0^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_0} \quad (36)$$

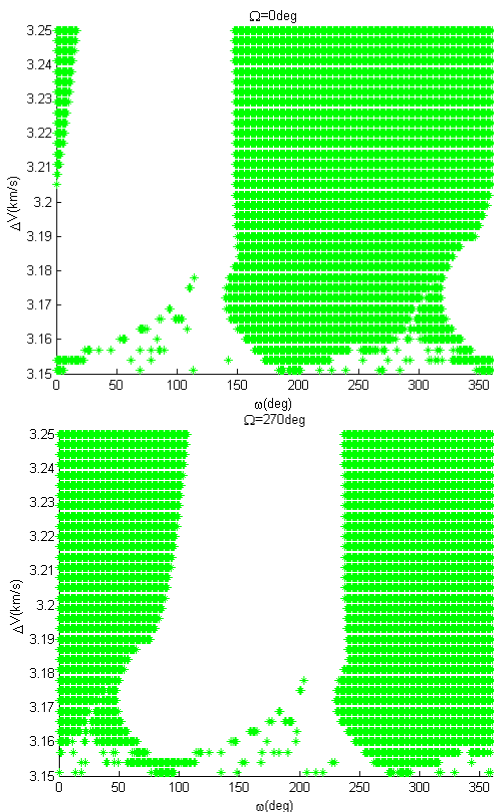
برای هر کدام از نقاط  $(x_i; y_i; z_i; \dot{x}_i; \dot{y}_i; \dot{z}_i)$  و  $(x_f; y_f; z_f; \dot{x}_f; \dot{y}_f; \dot{z}_f)$  به ترتیب برای LEO و GEO. در محدوده پویانکاره  $x = x_-$  و  $x = x_+$  و برای افزایش های مختلف  $\Delta t$ ، یک مسیر پروازی به دست می آید به گونه ای که دو موقعیت  $(x_i; y_i; z_i)$  و  $(x_f; y_f; z_f)$  را به وسیله معادلات مسئله سه جسم محدود به یکدیگر متصل می نماید.

پس از حل معادلات فوق به ازای  $\Delta t$  های مختلف، باید اختلاف سرعت  $\Delta v$  بین نقاط اصلی و سرعت نقاطی که از معادلات به دست آمده را محاسبه نمود. برای محاسبه سرعت این نقاط می توان از معادلات (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) نسبت به زمان مشتق گرفت. سپس برای هر  $\Delta t$ ، کمینه  $\Delta v$  بر حسب (m/s) انتخاب می شود، به عبارت دیگر، شرایط اولیه ای از مدارهای LEO و GEO را بر می گزینیم که برای دو مانور کوچک جهت متصل نمودن مسیره های پروازی، کمترین افزایش سرعت  $\Delta v$  را نیاز داشته باشند. با انجام این



شکل (۱۵): زوج  $(\omega, \Delta v)$  در حضور اغتشاشات در حالت

حل رو به عقب.



شکل (۱۶): زوج  $(\omega, \Delta v)$  در حضور اغتشاشات در حالت

حل رو به جلو.

اغتشاشی که بیشترین تأثیر را بر حرکت ماهواره دارد یعنی اغتشاشات گرانشی و اغتشاشات تشعشعات خورشیدی در نظر گرفته می‌شوند [۹-۱۰]. در این صورت معادلات حرکت به صورت زیر در می‌آیند:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \times \left[ \frac{x}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right] - p_{SR}(\cos \lambda) \quad (38)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \times \left[ \frac{y}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right] - p_{SR}(\cos \sin \lambda \varepsilon) \quad (39)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{3J_2\mu R^2}{2r^4} \left[ \frac{z}{r} \left( 5\frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \right] - p_{SR}(\sin \sin \lambda \varepsilon) \quad (40)$$

ترم اول اضافه شده مربوط به اغتشاش گرانشی و ترم دوم مربوط به اغتشاش تشعشعات خورشیدی می‌باشد. در این روابط  $R$  شعاع زمین،  $r$  فاصله ماهواره از مرکز زمین،  $J_2$  ضریب جفری<sup>۱</sup> و برابر با  $۰/۰۰۱۰۸۲۶۳$  می‌باشد.

پس از بازنویسی معادلات حرکت در مسئله سه جسم محدود، دو مرحله اول شبیه‌سازی فصل قبل برای معادلات جدید که همراه با ترم‌های اغتشاشی می‌باشند تکرار می‌شود یعنی معادلات حرکت برای انتقال از GEO به مجاورت نقطه  $L_1$  و همچنین برای انتقال از LEO به مجاورت نقطه  $L_1$  می‌شوند تا نتایج به دست آمده با شبیه‌سازی‌های بخش قبل که بدون حضور ترم‌های اغتشاشی انجام گرفت مقایسه گردند. در شکل ۱۵ زوج  $(\omega, \Delta v)$  هایی که فضاپیما می‌تواند به ازای آن‌ها در کمتر از ۱۵۰ روز و در حضور اغتشاشات از GEO به محدوده پوانکاره برسد برای  $\Omega$ های متفاوت رسم شده است. شکل ۱۶ نیز نماینگر انتقال رو به جلو از LEO و در مدت زمان حداکثر ۲۰۰ روز می‌باشد. همان‌طور که از نمودارها پیداست کمینه  $\Delta v$  برای رسیدن به محدوده پوانکاره برای هر دو انتقال رو به جلو و رو به عقب به میزان تقریبی  $۵۰ \text{ m/s}$  فزایش یافته است. هم‌چنین زمان رسیدن به محدوده پوانکاره بین دو تا هشت درصد افزایش می‌یابد.

<sup>۱</sup>Jeffrey

خواهد بود و البته افزایش خیلی زیاد زمان پروازی را نیز موجب می‌شود که در صورتی که این پارامتر در طراحی مأموریت محدودیت داشته باشد روش فوق نمی‌تواند پاسخگو باشد. در نهایت مشاهده شد که حضور اغتشاشات در انتقال از LEO به GEO در حدود  $100 \text{ m/s}$  به ایмпالس کل می‌افزاید و تأثیر دو تا هفت درصدی بر افزایش زمان انتقال خواهد داشت و لذا این مسئله بایستی در طراحی سیستم پیشرانش فضاپیما دیده شود.

## ۷- مراجع

1. SabooriDarabi, E., Zardashti, R., Kordjazi, H., Esmaeli, M.: "Stability of Lagrangian Points in Sun-Earth system & RTBP", April, 2016(in Persian).
2. Koon, Wang sang, Martin, W.Lo, Marsden, Jerrold E.: "Dynamical Systems, the Three Body Problem and Space Mission Design", 2006.
3. Esther Barrabes, Laura Garcia-Taberner, and Gerard Gomez: A note on transfer from LEOs to GEOs visiting libration points of Sun-Earth CRTBP, Advances in Space Research, Vol 57, pp. 938-947, 2016.
4. Herrera, E., 2008. "Study of LEO to GEO transfers via  $L_1$  the Sun-Earth or Earth-Moon libration points (Master's thesis)", UPC.
5. Curtis, H.D.: "Orbital Mechanics for Engineering Students" 3<sup>th</sup>ed, New York:McGraw-Hill, 2010.
6. Battin, Richard H.: "An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics", AIAA education series, 2001.
7. Gomez,G., Libre,J., Martinez,R., Simo,C.: "Dynamics and Mission Design Near Libration Points-Vol. I Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points", World Scientific Publishing, 2001.
8. Adnan, M.SK,Razali, R., Azlin, and Md. & Said, Md.: "Study of Perturbation Effect on Satellite Orbit Using Cowell's Method", School of Aerospace Engineering, 2013.
9. Elenna, AA: "Analytical Treatment of the Earth Oblateness & Solar Radiation Pressure Effects on an Artificial Satellite I. the Equations of Motion", Mathematics & Computation 138(2003).
10. Adnan, M.SK. Razali, R., Azlin, Md. & Said, Md.: Study of Perturbation Effect on Satellite Orbit Using Cowell's Method, School of Aerospace Engineering, 2013. Han-qing ZHANG and Yan-jun LI, "The Design of Earth-Moon Transfer Trajectory Using Sun-Earth  $L_1$  Libration Point Manifolds", 3rd International Conference on Advanced Computer Control, IEEE, 2011.

همچنین در جدول ۱ نتایج عددی انتقال به GEO به روش‌های هوهمان و با استفاده از نقاط لاگرانژ مقایسه شده است.

**جدول (۱):** مقایسه انتقال هوهمان با انتقال به کمک نقاط لاگرانژ

$\Delta t$	$\Delta v_{Hohmann} \left( \frac{km}{s} \right)$	$\Delta v_{RTBP} \left( \frac{km}{s} \right)$
۱۰	۴/۰۱	۴/۳۵ - ۴/۴۰
۱۵	۴/۰۸	۴/۳۵ - ۴/۴۰
۲۰	۴/۱۶	۴/۳۵ - ۴/۴۰
۲۹	۴/۳۴	۴/۳۵ - ۴/۴۰
۳۵	۴/۵۱	۴/۳۵ - ۴/۴۰
۴۲	۴/۶۸	۴/۳۵ - ۴/۴۰

## ۶- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، از ویژگی‌های نقاط تعالی مسئله سه جسم محدود سیستم زمین-خورشید استفاده شد تا بتوان برای انتقال از LEO به GEO یک مسیر پروازی بهبود یافته از لحاظ انرژی استخراج نمود. برای این منظور، مسئله به سه مرحله تقسیم شد که در مرحله اول معادلات RTBP برای انتقال رو به عقب از GEO به مجاورت نقطه تعادلی  $L_1$  حل گردید تا  $\Delta v$  مورد نیاز جهت این انتقال به دست آید. در مرحله دوم مجدداً مرحله قبل صورت گرفت با این تفاوت که این بار انتقال از LEO به مجاورت نقطه تعادلی  $L_1$  بررسی و  $\Delta v$  مورد نیاز جهت انجام این انتقال محاسبه گردید. در مرحله پایانی نیز با استفاده از مدارهای پریودیک حول نقطه  $L_1$ ، به ازای دو مانور کوچک، مسیرهای پروازی به دست آمده از مراحل قبل به یکدیگر متصل گردید. بنابراین،  $\Delta v_{tot}$  برای انتقال به GEO از مجموع ایмпالس‌های سه مرحله مذکور به دست می‌آید. همان‌گونه که مشاهده گردید  $\Delta v_{tot}$  برای انتقال از یک مدار LEO صد و هشتاد و پنج کیلومتری به GEO تقریباً در حدود  $4.35 \text{ km/s}$  تا  $4.4 \text{ km/s}$  به دست آمد. محاسبات برای مدارهای دایروی استوایی صورت گرفت اما می‌توان زاویه میل LEO و همچنین ارتفاع این مدار را تغییر داد تا نتایج به دست آمده را با یکدیگر مقایسه نمود. دیده شد که هر چه ارتفاع مدار LEO افزایش یابد،  $\Delta v_{tot}$  کاهش می‌یابد. اگر تغییر زاویه میل بیش از ۲۹ درجه باشد روش استفاده از نقاط لاگرانژ بهتر از انتقال هوهمان عمل خواهد کرد. از آنجا که بسیاری از پایگاه‌های پرتاب موشک ماهواره‌بر در عرض جغرافیایی بالایی قرار دارند بنابراین، برای این پایگاه‌های پرتاب، استفاده از روش پیشنهادی بهتر