

تحلیل ترموالکتروالاستیک پوسته استوانه‌یی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه دلخواه

Original Article

سید مهدی جباری (دانشجوی دکتری)

سید محمد زمانی نژاد* (دانشیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه باسج

هدف این مطالعه بررسی رفتار ترموالکتروالاستیک پوسته‌ی جدارضخیم استوانه‌یی از جنس مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت گرادیان حرارتی است. معادلات ترموالکتروالاستیک حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری از مواد ناهمگن مدرج تابعی، بر مبنای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه دلخواه در حالت بارگذاری عمومی استخراج شده است. استوانه به صورت دوبعدی و کاملاً متقارن و بدون حضور منبع گرمایی در نظر گرفته شده است. تمامی خواص ماده هدفمند به صورت متغیر و براساس قانون توانی در نظر گرفته شده است. با بهره‌گیری از معادلات الکترودینامیکی ماکسول و در نظر گرفتن توزیع دما در جداره‌ی سیندلر تحت شرایط مرزی در نظر گرفته شده، با استفاده از روش انرژی دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم به دست آمده است و با روش بردارهای ویژه حل شده است. در انتها، نتایج به دست آمده از این روش با نتایج موجود در کارهای گذشته صحت‌سنجی شده‌اند.

واژگان کلیدی: تحلیل ترموالکتروالاستیک، پوسته استوانه‌یی جدار ضخیم، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه دلخواه، مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی.

smehdi.jabbari@gmail.com
m_zamani@yu.ac.ir

۱. مقدمه

اولین مطالعات مدون در زمینه‌ی نظریه و کاربردهای مواد پیزوالکتریک در کتاب کادی یافت می‌شود.^[۱] راثولی و لوئیس^[۲] با استفاده از خاصیت عمل‌گری مواد پیزوالکتریک یک روش اجزاء محدود برای سازه‌های پیزوالکتریک معرفی کردند. وانگ و پارک^[۳] مدل‌سازی اجزاء محدود سازه‌های پیزوالکتریک را در حالت حسن‌گر و عمل‌گر توسعه دادند. چن و همکاران^[۴] حل دقیقی برای پوسته‌ی استوانه‌یی ناهمسانگرد با لایه‌ی پیزوالکتریک تحت بارگذاری خمشی ارائه کرده‌اند. کاپوریا و همکاران^[۵] تحلیل سه‌بعدی پوسته‌ی استوانه‌یی برای بارگذاری متقارن محوری با تکیه‌گاه ساده به روش مقادیر ویژه را معرفی کردند.

تنش در استوانه‌های ساخته شده از مواد پیزوسرامیکی توسط راجاپکسه و ژائو^[۶] به کمک انتگرال‌های فوریه بررسی شد. ویکو و هاجیانگ^[۷] معادلات اویلر حاکم بر پوسته‌های کروی چرخان پیزوالکتریک را حل کردند. چن و همکاران^[۸] با استفاده از جداسازی متغیرها حل دقیقی برای میدان الاستوالکتریک^[۶] پوسته‌ی پیزوسرامیک کروی چرخان، ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه کردند. وو و همکاران^[۹] بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه یک پوسته‌های ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی را با استفاده از توابع سینوسی تحلیل کردند. آنها در کاری دیگر حل دقیق برای پوسته‌های استوانه‌یی در حالت حسن‌گر و عمل‌گر راه‌حل دقیق ارائه کردند.^[۱۰] گالیک و هورگان^[۱۱] یک روش تحلیلی برای یک استوانه‌ی توخالی پیزوالکتریک

بررسی رفتار سازه‌ها با هدف محاسبه‌ی تنش‌های مکانیکی آن‌ها تحت بارگذاری‌های حرارتی یکی از شاخه‌های مهم مهندسی مکانیک به شمار می‌رود. از مهم‌ترین راه‌های کاهش تنش‌های حرارتی، انتخاب مواد مناسب در آنهاست. با گسترش روزافزون علوم و فناوری‌های نوین، شناخت و به‌کارگیری مواد هدفمند (مواد مدرج تابعی^[۱]) و نیز مواد هوشمند^[۲] در صنایع اهمیت بیشتری یافته است. از سوی دیگر، نیاز روزافزون به کنترل تغییر شکل اجسام در حوزه‌ی کنسان در سامانه‌های بسیار پیشرفته همچون سازه‌های فضایی (ماهواره)، هوافضا، رباتیک، میکرو، نانو و بیومکانیک و کاربردهای صنعتی دیگر، موجب توجه محققین به فناوری کنترل سازه‌ها شده است. یکی از راه‌های کنترل سازه‌ها استفاده از تعدادی حسن‌گر و عمل‌گر است. مواد پیزوالکتریک^[۳] از جمله‌ی مهم‌ترین حسگرها^[۴] و عمل‌گرها^[۵] هستند که به دلیل کوپل بودن خواص الکتریکی و مکانیکی، به طور گسترده در کنترل پاسخ سازه‌ها مورد استفاده واقع شده‌اند. در سال‌های اخیر استفاده‌ی همزمان از مواد هدفمند و هوشمند در سازه‌ها، به عنوان موضوعی جدید مطرح و تحقیقات گسترده‌یی روی آن انجام شده است.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۸/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۵/۱۱/۲، پذیرش ۱۳۹۵/۱۱/۲۳.

DOI:10.24200/J40.2018.6396

چنان که در مطالعات پیشین مشاهده شد، عموم فعالیت‌های انجام شده درخصوص استوانه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته است و فقط در چند نمونه از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. لذا در این مطالعه یک فرمول‌بندی بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای استوانه‌های جدارضخیم ارائه شده است. با توجه به ضعف‌های شناخته شده در تقریب‌های مرتبه پایین تغییر شکل برشی،^[۲۰-۲۸] رفتار استوانه جدار ثابت ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه بالا بررسی شده است. برای این منظور، ابتدا معادلات حاکم بر استوانه‌ی جدارضخیم ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی، با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی عمومی و معادلات ماکسول^{۱۱} استخراج شده است. برای به دست آوردن توزیع دما از معادلات هدایت حرارتی فوریه استفاده شده است. سپس با استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه، دستگاه معادلات حاکم حل شده است. برای بررسی صحت مطالعه‌ی انجام شده، نتایج با مطالعات پیشین مقایسه شده است. در انتها نیز رفتار دوبعدی استوانه‌ی چرخان پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. فرمول‌بندی مسئله

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض بر این است که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی بمانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شود. در نظریه‌ی تغییر شکل برشی، خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی لحاظ می‌شود.

مطابق شکل ۱، اگر فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه استوانه تا محور تقارن r ، شعاع سطح میانی R و فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از سطح میانی z باشد، آنگاه:

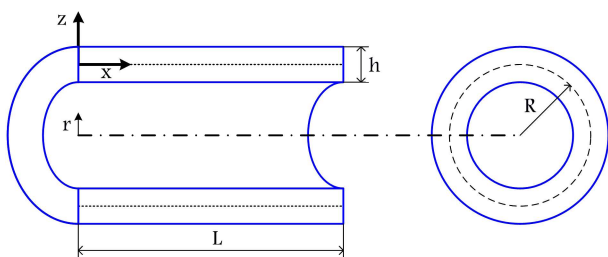
$$r = R + z \quad (۱)$$

همچنین:

$$-\frac{h}{r} \leq z \leq \frac{h}{r} \quad (۲)$$

با توجه به نظریه‌ی تغییر شکل برشی، میدان جابه‌جایی متقارن محوری به کمک توابع چندجمله‌ی چنین در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} U_z = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} u_i z^i \\ U_x = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} w_i z^i \end{cases} \quad (۳)$$



شکل ۱. مختصات به کار گرفته شده برای استوانه‌ی پیزوالکتریک.

معرفی کردند. وو و سائو^[۱۲] حل دقیقی برای پوسته‌های استوانه‌ی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی ارائه دادند.

اوتاوو و همکاران^[۱۳، ۱۴] برای استوانه‌ی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی بر پایه‌ی نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی^۷، در شرایط بارگذاری گذرا، حل تحلیلی ارائه کردند. شنگ و وانگ^[۱۵] اثر کماتش و ارتعاشات را بر استوانه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار دادند. رفتار پیزوالکتریک استوانه‌های توخالی ناهمگن تحت گرادیان دمایی توسط زنکور بررسی شد.^[۱۶] علی بیگلو به بررسی تغییر شکل ترموالاستیک ساخته شده از پیل پیزوالکتریک دوسر مفصل پرداخت.^[۱۷] قربانپور و همکاران^[۱۸] رفتار ترموالکتریک استوانه‌ی تابعی با تغییرات شعاعی خواص را بررسی کردند. ملک‌زاده و همکاران^[۱۹] پاسخ‌گذاری استوانه‌ی چرخان تحت فشار، ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بر پایه‌ی نظریه‌ی الاستیسیته استخراج کردند. رفتار الکترومکانیکی دوبعدی استوانه‌های توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط فشارکی و همکاران^[۲۰] ارائه شد.

رحیمی و همکاران^[۲۱] تحلیل الکتروالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت فشار داخلی را با استفاده از نظریه‌ی مرتبه اول تغییر شکل برشی ارائه دادند. آنها برای حل معادلات حاکم از تغییرات محوری جابه‌جایی‌ها صرف‌نظر کردند. دای و همکاران^[۲۲] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی توزیع تنش را در استوانه‌های توخالی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی به دست آوردند. الشتی و خرسند^[۲۳] تحلیل سه‌بعدی غیرخطی ترموالاستیک استوانه‌ی باله پیزوالکتریک به روش تریب دیفرانسیل فوریه نمایش دادند. ملک‌زاده و حیدرپور^[۲۴] ارتعاشات آزاد استوانه ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول را بررسی کردند. آنها در پژوهشی دیگر اثر بارگذاری‌های متحرک مکانیکی - حرارتی را بر روی پوسته‌های استوانه‌ی مورد مطالعه قرار دادند.^[۲۵] تحلیل هیگروترومالاستیک^۸ استوانه‌ی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی با تغییرات نمایی خواص توسط زنکور^[۲۶] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی ارائه شد. زمانی‌نژاد و همکاران بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های استوانه‌ی جدار متغیر همگن و ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تغییرات محوری خواص به روش چندلایه‌ی کردن^۹ پوسته حل الاستیک ارائه دادند.^[۲۹-۲۷] آنها با استفاده از این روش رفتار مخروط‌های ساخته شده از مواد همگن و مدرج تابعی را نیز مورد بررسی قرار دادند.^[۲۷-۳۰] ارژنگ‌پی و همکاران^[۳۳] بر پایه‌ی نظریه‌ی فولوگه در پوسته‌های جدارنازک، رفتار کماتش استوانه‌ی هدف‌مند تحت بارگذاری محوری را با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروف گلرکین را تحلیل کردند. تحلیل خمش ترمومگنتوالاستیک^{۱۰} پوسته‌های استوانه‌ی توسط دای و جانگ^[۳۴] ارائه شد. عطریان و همکاران^[۲۵] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته رفتار ترموالکتریک مکانیک استوانه‌ی توخالی پیزوالکتریک تحت بارگذاری نامتقارن محوری را تحلیل کردند. تنش‌های حرارتی یک‌بعدی در استوانه‌های توخالی نامتقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های داخلی و خارجی پیزوالکتریک توسط جباری و اقدم^[۳۶] محاسبه شد. همتی و تهرانی^[۳۷] بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل‌های کوچک را در حالت کرنش صفحه‌ی محاسبه کردند. جباری و همکاران^[۳۰-۳۸] به کمک نظریه‌ی مرتبه بالای تغییر شکل برشی، روشی نوین برای حل ترموالاستیک پوسته‌های جدار متغیر معرفی کردند. آنها دریافتند که استفاده از مرتبه بالای تغییر شکل برشی در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های جدار متغیر ضروری است. دهقان و همکاران^[۳۹] بر پایه‌ی نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، یک فرمول‌بندی عمومی برای پوسته‌های دوار ارائه کرده و سپس برای حالات خاص (استوانه و کره) مسئله را حل کردند.

$$\rho = \rho^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^g \quad (A)$$

که در آن C_{ij}^0 مقدار ضرایب کشسان، α_{ij}^0 ضرایب انبساط طولی، κ^0 ضریب هدایت حرارتی، ρ^0 مقدار چگالی، e_{ij}^0 ضرایب پیزوالکتریک - تنش، ξ_{ij}^0 ضرایب نفوذپذیری ماده‌ی پیزوالکتریک، p_i^0 ضرایب پیزوالکتریک در سطح خارجی استوانه است. l ثابت ناهمگنی کشسان، پیزوالکتریک و دی الکتریک، b ثابت ناهمگنی انبساط طولی، s ثابت ناهمگنی هدایت حرارتی، g ثابت ناهمگنی چگالی، همچنین مجموع l و b ثابت ناهمگنی پیزوالکتریک است. E_i بردار میدان الکتریکی است که به صورت تابعی از پتانسیل الکتریکی (ϕ) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{R+z} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (9)$$

اگر پتانسیل الکتریکی در مرزهای شعاعی استوانه صفر فرض شود و قطبی‌سازی در راستای محور شعاعی باشد، تابع پتانسیل الکتریکی پیشنهادی توسط فرندانس و پوژت [۲۲] را می‌توان مورد استفاده قرار داد:

$$\phi = \Omega(z)\psi(x), \quad \Omega = \left(z^2 - \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \quad (10)$$

لذا با توجه به رابطه‌های ۹ و ۱۰ میدان الکتریکی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} E_x = -\left(\frac{2z^2 - h^2}{\sqrt{2}} \right) \frac{d\psi}{dx} \\ E_z = -2z\psi \end{cases} \quad (11)$$

با استفاده از نظریه‌ی پوسته‌ها و تعادل می‌توان رابطه‌ی نیروها و گشتاورهای داخلی المان با تنش‌ها و جابه‌جایی الکتریکی را به دست آورد.

$$\begin{cases} N_x^{(i)} \\ N_\theta^{(i)} \\ N_z^{(i)} \\ N_{xz}^{(i)} \end{cases} = \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \begin{cases} \sigma_x (R+z) \\ R\sigma_\theta \\ \sigma_z (R+z) \\ \tau_{xz} (R+z) \end{cases} \frac{z^i}{R} dz \quad (i = 0 \dots n_{SDT}) \quad (12)$$

برای به دست آوردن معادلات تعادل به روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی از روش انرژی استفاده می‌شود. در این روش تغییرات انرژی کل سیستم بنا بر اصل پایستگی انرژی صفر فرض می‌شود ($\delta U = \delta W$). تغییرات انرژی کرنشی برای استوانه‌یی با شرایط متقارن محوری از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\delta U = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} - D_x \delta E_x - D_z \delta E_z) (R+z) dz d\theta dx \quad (13)$$

اگر فرض شود استوانه تحت فشار داخلی و در حال دوران باشد، تابع تغییرات کار خارجی عبارت خواهد بود از:

$$\delta W = - \int_0^{2\pi} \int_0^L P \delta U_z \left(R - \frac{h}{\sqrt{2}} \right) dx d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \rho \omega^2 (R+z)^2 \delta U_z dx d\theta \quad (14)$$

که در آن U_x جابه‌جایی در راستای شعاع و U_z جابه‌جایی در راستای ضخامت و n_{SDT} مرتبه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی است. با استفاده از روابط سینماتیک (کرنش - جابه‌جایی) مؤلفه‌های کرنش برای جابه‌جایی‌های کوچک از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} \frac{dw_i}{dx} z^i \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_x}{r} = \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^{n_{SDT}} u_i z^i \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} i u_i z^{i-1} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} i w_i z^{i-1} + \sum_{i=0}^{n_{SDT}} \frac{du_i}{dx} z^i \end{cases} \quad (4)$$

در صورتی که جهت دوقطبی بودن استوانه در راستای محور شعاعی، و ماده‌ی پیزوالکتریک، ایزوتروپیک عرضی باشد، معادلات رفتاری از رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{cases} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ e_{13} & 0 \\ 0 & e_{r5} \end{bmatrix} \begin{cases} E_z \\ E_x \end{cases} - \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_r \\ \beta_z \\ 0 \end{cases} T \quad (5)$$

$$\begin{cases} D_z \\ D_\theta \\ D_x \end{cases} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{r5} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{cases} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \xi_{r3} \end{bmatrix} \begin{cases} E_z \\ E_x \end{cases} + \begin{cases} p_1 \\ p_r \\ p_z \end{cases} T \quad (6)$$

که در آن C_{ij} ماتریس ضرایب کشسان، e_{ij} ماتریس ضرایب پیزوالکتریک - تنش و ξ_{ij} ماتریس ضرایب نفوذپذیری ماده‌ی پیزوالکتریک در کرنش ثابت، p_i ضرایب پیزوالکتریک، و T تابع توزیع دماست. همچنین:

$$\begin{cases} \beta_1 = C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{22} + C_{13}\alpha_{33} \\ \beta_r = C_{r1}\alpha_{11} + C_{r2}\alpha_{22} + C_{r3}\alpha_{33} \\ \beta_z = C_{z1}\alpha_{11} + C_{z2}\alpha_{22} + C_{z3}\alpha_{33} \end{cases} \quad (7)$$

است و α_{ij} معرف ضریب انبساط طولی ماده است. لازم به ذکر است تمامی خواص به صورت تابع شعاعی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} C_{ij} = C_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^l, & e_{ij} = e_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^l \\ \xi_{ij} = \xi_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^l, & p_i = p_i^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^{b+l} \\ \kappa = \kappa^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^s, & \alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R+h/\sqrt{2}} \right)^b \end{cases}$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ی و P فشار در سطح داخلی استوانه است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۳ و ۱۴ در رابطه‌ی $(\delta U = \delta W)$ معادلات تعادل به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx} (RN_x^{(i)}) - iRN_{xz}^{(i-1)} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} (RN_{xz}^{(i)}) - iRN_z^{(i-1)} - N_\theta^{(i)} = - \int_{-h/r}^{h/r} \rho \omega^2 (R+z)^2 z^i dz + P \left(R - \frac{h}{r} \right) \left(-\frac{h}{r} \right)^i \quad (16)$$

معادلات فوق، دستگاه معادلات تعادل مکانیکی در پوسته‌های جدار ضخیم است که با توجه به مرتبه‌ی نظریه‌ی تعداد آن‌ها مشخص می‌شود. برای به دست آوردن معادله‌ی تعادل الکتریکی، با توجه به معادلات ماکسول و قانون گاوس داریم: [۲۲]

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/r}^{h/r} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} ((R+z)D_z) \right) (R+z) dz d\theta dx = 0 \quad (17)$$

برای به دست آوردن توزیع دما از معادله‌ی انتقال حرارت یک‌بعدی در استوانه‌های ناهمگن استفاده شده است:

$$\frac{d}{dr} \left(\kappa r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (18)$$

که در آن κ ضریب هدایت حرارتی در ماده‌ی ناهمگن است. با توجه به رابطه‌های ۸ و ۸ داریم:

$$\frac{d}{dz} \left(\kappa^s (R+z)^s \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (19)$$

با دوبار انتگرال‌گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$T = d_1 \int \frac{dz}{(R+z)^s} + d_2 \quad (20)$$

که می‌توان آن را چنین بازنویسی کرد:

$$T = \begin{cases} d_1 \frac{(R+z)^{-s+1}}{1-s} + d_2 & s \neq 1 \\ d_1 \ln(R+z) + d_2 & s = 1 \end{cases} \quad (21)$$

با جایگذاری روابط ۴ تا ۶ در رابطه‌ی ۱۲ و سپس قراردادن در روابط ۱۵ و ۱۶ می‌توان معادلات تعادل را براساس مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری و جابه‌جایی الکتریکی بازنویسی کرد:

$$L_{ij}u_j + I_{ij}w_j + J_i\psi = F_i \quad (22)$$

که در آن $0 \leq j \leq n_{SDT}$ و $0 \leq i \leq 2n_{SDT} + 1$ است و L_{ij} ، ماتریس‌های ضرایب جابه‌جایی مکانیکی، J_i بردار ضرایب جابه‌جایی الکتریکی و F_i بردار کار خارجی است که مقادیر آن در پیوست آورده شده است. رابطه‌ی ۲۲ را می‌توان به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت در نظر گرفت که دارای حل دقیق به روش بردارهای ویژه است: [۲۸]

$$\{y\}_h = \sum_{\beta=1}^{2(n_{SDT}+1)} C_\beta \{\eta\}_\beta e^{\lambda_\beta x} + \{K\} \quad (23)$$

$$\{y\} = \left\{ u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_{n_{SDT}} \quad w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{n_{SDT}} \quad \psi \right\}^T \quad (24)$$

و C_β ثابت‌های مجهول، $\beta\lambda$ مقادیر ویژه، $\{\eta\}_\beta$ بردارهای ویژه و $\{K\}$ حل خصوصی است. ملاحظه می‌شود که $(2n_{SDT} + 3)$ ثابت مجهول وجود دارد که به کمک شرایط مرزی انتهایی استوانه قابل محاسبه خواهد بود. با این فرض که استوانه در دو انتها کاملاً بسته است و اجازته‌ی تحرک ندارد، خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{matrix} u_i \\ w_i \end{matrix} \right\}_{x=0} = \left\{ \begin{matrix} u_i \\ w_i \end{matrix} \right\}_{x=L} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad i = 0, \dots, n_{SDT} \quad (25)$$

همچنین اگر پتانسیل الکتریکی در دو انتهای استوانه صفر در نظر گرفته شود:

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} = 0 \quad (26)$$

و بنابراین:

$$\{y\}_{x=0} = \{y\}_{x=L} = 0 \quad (27)$$

بنابراین معادله‌ی $(2n_{SDT} + 3)$ نیز برای محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول وجود دارد. بدین ترتیب با جایگذاری رابطه‌ی ۲۳ در رابطه‌های ۳ و ۹، و سپس قرار دادن آن در رابطه‌ی ۲۷، ثابت‌های مجهول به دست می‌آید. در صورتی که دو انتهای استوانه آزاد باشد شرایط مرزی مکانیکی چنین تغییر می‌کند:

$$\left\{ \begin{matrix} N_x^{(i)} \\ N_{xz}^{(i)} \end{matrix} \right\}_{x=0} = \left\{ \begin{matrix} N_x^{(i)} \\ N_{xz}^{(i)} \end{matrix} \right\}_{x=L} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad i = 0, \dots, n_{SDT} \quad (28)$$

۳. بررسی نتایج

برای مقایسه و بررسی نتایج روش ارائه شده، یک استوانه‌ی هدف‌مند و هوشمند ساخته شده از کادمیم سلنید در لایه‌ی داخلی مطابق جدول ۱ فرض شده است.

برای استخراج نتایج، استوانه‌ی مورد مطالعه با مشخصات هندسی $L = 10 \text{ mm}$ ، $r_i = 7 \text{ mm}$ و $r_o = 1 \text{ mm}$ فرض می‌شود. برای این که نتایج از داده‌های عددی مستقل باشد، پارامترهای رفتاری استوانه به صورت بی‌بعد و با توجه به رابطه‌ی ۲۹ گزارش شده است:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_o}, \quad \bar{U}_k = \frac{U_k}{\alpha_s T_s r_o}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi|d_s|}{\alpha_s T_s r_o} \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\alpha_s Y_s T_s}$$

جدول ۱. مشخصات مواد پیزوالکتریک در استوانه. [۱۴]

نماد	مقدار	نماد	مقدار
C_{11}^*	۸۳٫۶ (GPa)	e_{11}^*	$0.347 \text{ (C/m}^2\text{)}$
C_{12}^*, C_{13}^*	۳۹٫۳ (GPa)	e_{12}^*, e_{13}^*	$-0.16 \text{ (C/m}^2\text{)}$
C_{22}^*, C_{23}^*	۷۴٫۱ (GPa)	e_{15}^*	$-0.14 \text{ (C/m}^2\text{)}$
C_{24}^*	۴۵٫۲ (GPa)	$\alpha_{22}^*, \alpha_{23}^*$	$4.40 \text{ (} 10^{-6} \text{/K)}$
C_{25}^*, C_{26}^*	۱۳٫۱۷ (GPa)	α_{11}^*	$2.46 \text{ (} 10^{-6} \text{/K)}$
C_{33}^*	۱۴٫۴۵ (GPa)	ξ_{11}^*, ξ_{12}^*	۸۲٫۵ (pF/m)
κ^*	۱۲٫۹ (W/mK)	ξ_{22}^*	۹٫۳ (pF/m)
ρ^*	۵۶۸۴ (kg/m ^۳)	p_i^*	$-2.9 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{K)}$

که در آن:

$$Y_c = 42,78 \text{ GPa}, \quad \alpha_0 = \alpha_{12}, \quad d_c = -3,92 \times 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{N}} \quad (30)$$

در نظر گرفته شده است. استوانه‌ی مورد مطالعه مشابه مطالعات پیشین [۱۴] تحت بارگذاری حرارتی، الکتریکی و مکانیکی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} r = r_i, r_o; \quad \sigma_{rr} &= 0 \\ r = r_i, r_o; \quad \phi &= 0 \\ r = r_i; \quad -T + \frac{dT}{dz} &= 0 \\ r = r_o; \quad T + \frac{dT}{dz} &= T_o \end{aligned} \quad (31)$$

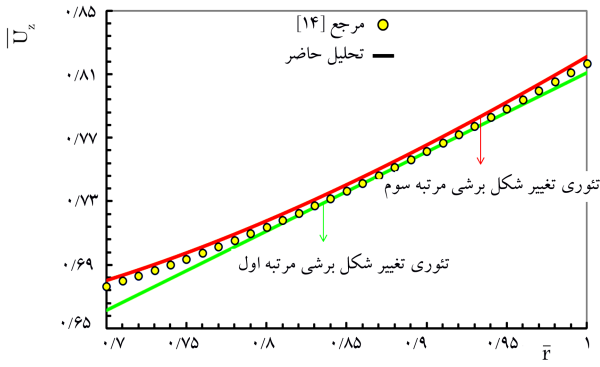
شرایط انتهایی استوانه به صورت مقید فرض شده است. با توجه به فرضیات و شرایط مرزی یاد شده، در اولین گام برای استوانه‌ی همگن و ناهمگن نتایج با حل ارائه شده توسط اتاو و همکاران [۱۴] مقایسه شده است. از آنجا که حل ارائه شده در مطالعه‌ی پیشین [۱۴] مبتنی بر نظریه‌ی کشسانی مستوی و در شرایط کرنش صفحه‌یی بوده و فقط در جهت شعاعی نتایج قابل استخراج است، این مقایسه فقط در جهت شعاعی و برای ثابت ناهمگنی $l = 2$ ، $b = 0$ ، $s = 0,1$ و $g = 1$ ارائه شده است.

در شکل‌های ۲ تا ۵ حل مبتنی بر نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم با نظریه‌ی کلاسیک [۱۴] مقایسه شده است.

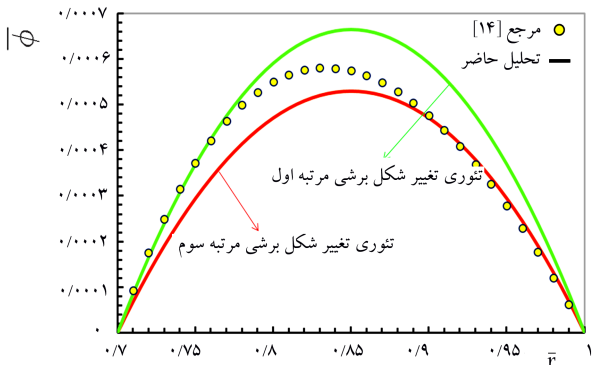
در شکل‌های ۲ تا ۵ مشاهده شد که استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم برای بررسی نتایج ضروری است و این روش دقت قابل قبولی در تمامی مشخصه‌های رفتار ترموالکترولاستیک استوانه‌ی جدارضخیم دارد. شکل ۲ نشان می‌دهد که جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف دو مرز انتهای استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی است. در حالی که با فاصله از مرزها، تغییر جابه‌جایی شعاعی به صورتی است که می‌توان از نتایج حاصل از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی برای پیش‌بینی رفتار استوانه استفاده کرد. در شکل ۳ دقت مناسبی بین حل تحلیلی و روش مورد مطالعه مشاهده نمی‌شود؛ این موضوع به دلیل تقریب مرتبه‌ی دوم برای تابع پتانسیل است. مسئله‌ی قابل توجه دیگر عدم ارضای تنش شعاعی در سطوح داخلی و خارجی استوانه است که این موضوع نیز به دلیل تقریب جابه‌جایی بدون ارضای شرایط مرزی تنش در سطوح داخلی است. برای شناخت بهتر رفتار ترموالکترولاستیک استوانه در شکل‌های ۶ تا ۱۱ مشخصه‌های مکانیکی و الکتریکی در لایه‌های مختلف استوانه و در راستای طول آن بررسی شده است.

مشاهده می‌شود با توجه به اصل سنت ونان در نقاط دور از مرز تمامی مشخصه‌های استوانه به جز جابه‌جایی محوری ثابت و مستقل از مکان محوری است. به عبارت دیگر پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در طول استوانه به غیر از ابتدا و انتهای آن که تحت تأثیر تنش برشی ناشی از مرزهای گیردار هستند، حالتی یکنواخت دارد. در حالی که در اطراف مرزهای انتهایی، غیریکنواختی تحت اثر تنش برشی مشاهده می‌شود. بنابراین می‌توان نتایج موجود در وسط استوانه را برای کل طول استوانه در فاصله‌یی اندک از مرزگیردار آن معتبر دانست. این موضوع فقط در مورد جابه‌جایی محوری که مقدار آن در وسط استوانه صفر است و در بقیه نقاط به صورت خطی تغییر می‌کند، صادق نیست. در شکل‌های ۱۲ تا ۱۶ تأثیر ثابت ناهمگنی بر لایه‌ی میانی استوانه‌ی جدار ثابت بررسی می‌شود.

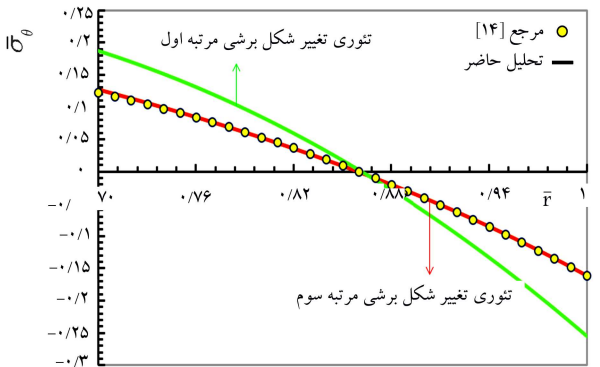
چنان که مشاهده می‌شود تغییرات ثابت ناهمگنی بر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی تأثیر نامحسوسی دارد و درمی‌یابیم که جابه‌جایی شعاعی به‌ازای ماده‌ی دارای



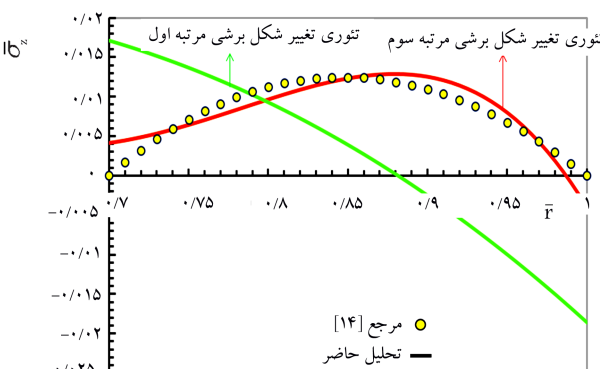
شکل ۲. توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در راستای ضخامت.



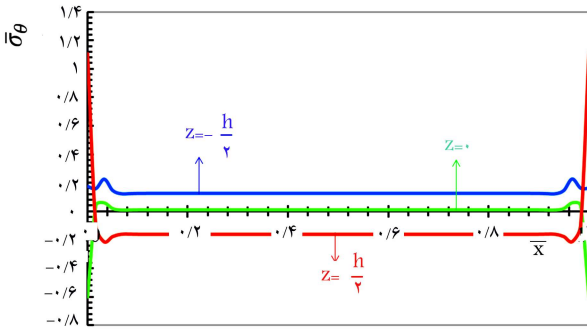
شکل ۳. توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد در راستای ضخامت.



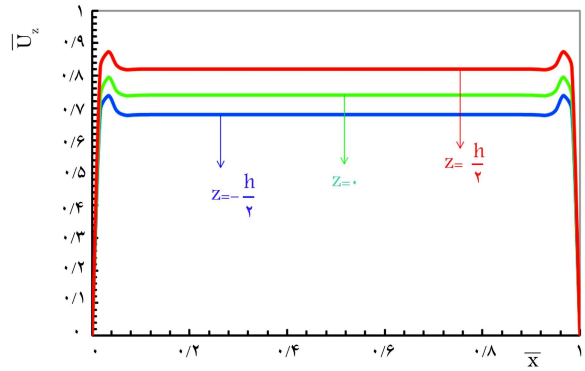
شکل ۴. توزیع تنش محیطی بی‌بعد در راستای ضخامت.



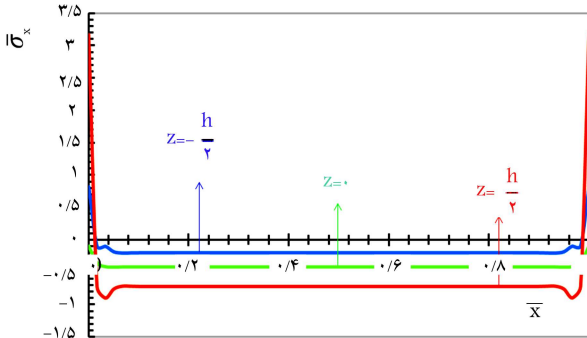
شکل ۵. توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در راستای ضخامت.



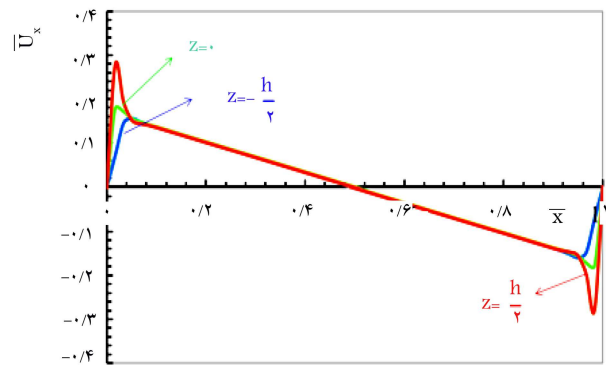
شکل ۱۰. توزیع تنش محیطی بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



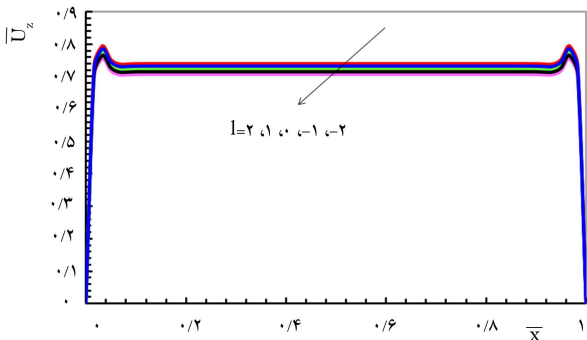
شکل ۶. توزیع جابه‌جایی شعاعی بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



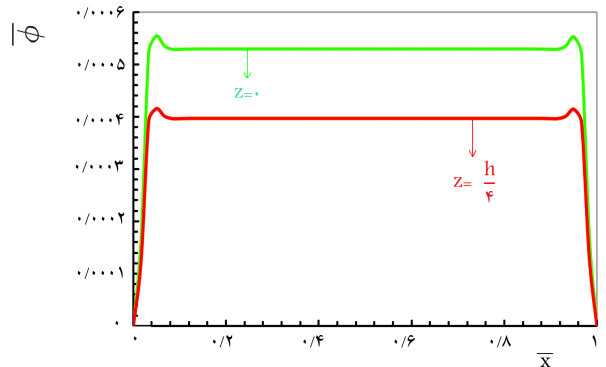
شکل ۱۱. توزیع تنش محوری بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



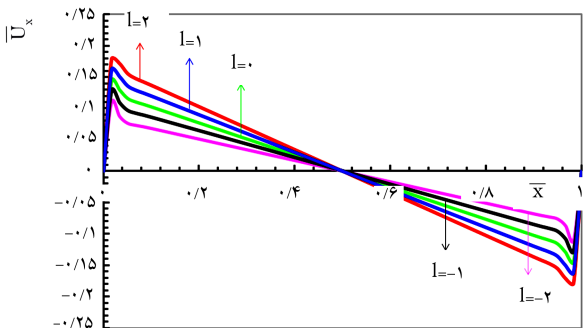
شکل ۷. توزیع جابه‌جایی محوری بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



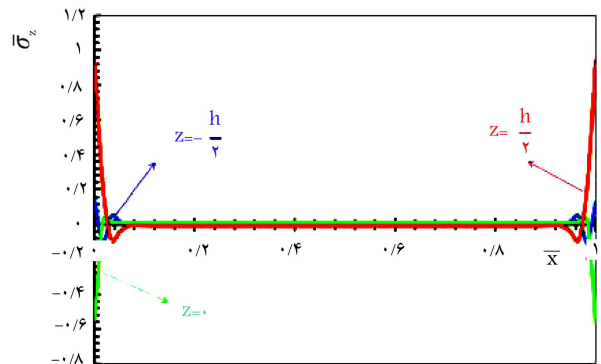
شکل ۱۲. توزیع جابه‌جایی شعاعی بی بعد لایه‌ی میانی استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای طول.



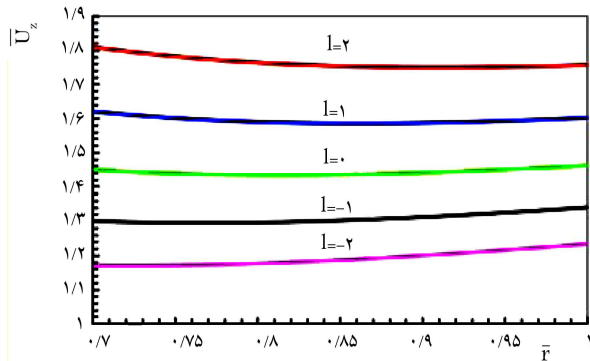
شکل ۸. توزیع پتانسیل الکتریکی بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



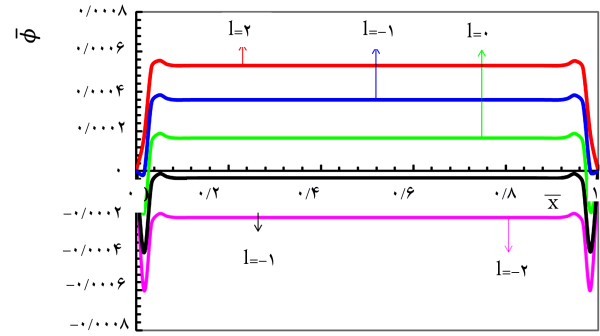
شکل ۱۳. توزیع جابه‌جایی محوری بی بعد لایه‌ی میانی استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای طول.



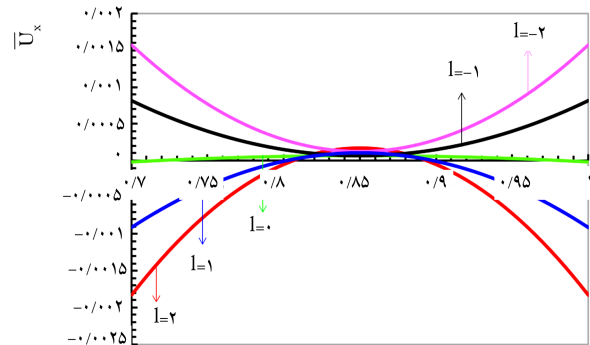
شکل ۹. توزیع تنش شعاعی بی بعد در لایه‌های مختلف استوانه.



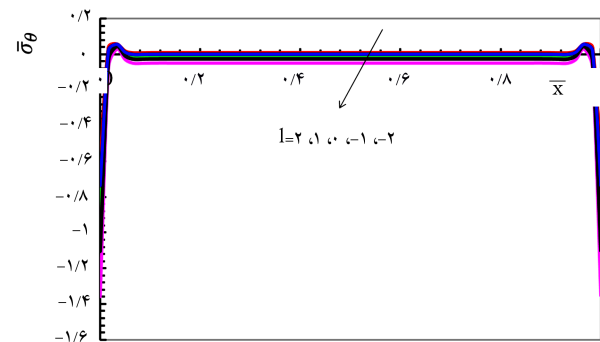
شکل ۱۷. توزیع جابه‌جایی محوری بی‌بعد استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای ضخامت.



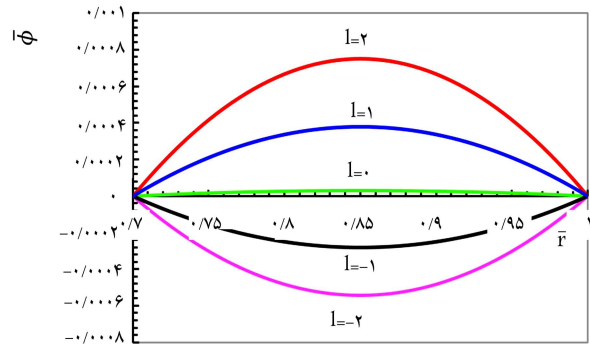
شکل ۱۴. توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد لایه‌ی میانی استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای طول.



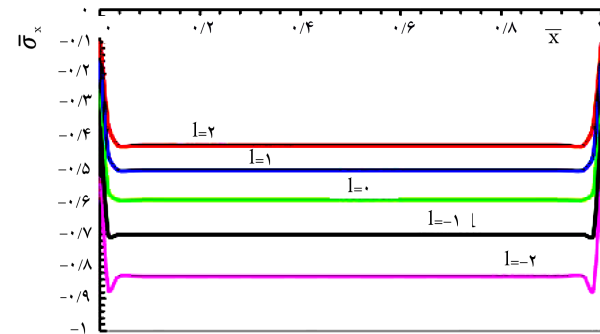
شکل ۱۸. توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای ضخامت.



شکل ۱۵. توزیع تنش محیطی بی‌بعد لایه‌ی میانی استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای طول.



شکل ۱۹. توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای ضخامت.



شکل ۱۶. توزیع تنش محوری بی‌بعد لایه‌ی میانی استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای طول.

در شکل‌های ۱۷ تا ۲۱ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری، پتانسیل الکتریکی و تنش محیطی و شعاعی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف برای استوانه‌ی مورد مطالعه، و در وسط استوانه نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۱۷ استفاده از مواد با ثوابت ناهمگنی منفی به‌دلیل ایجاد جابه‌جایی‌های کم‌تر در استوانه مطلوب‌تر است. در شکل ۱۸ ملاحظه می‌شود که برای مقادیر مثبت ناهمگنی جابه‌جایی محوری منفی، و برای مقادیر منفی ثابت ناهمگنی جابه‌جایی محوری مثبت است. این موضوع برای پتانسیل الکتریکی به‌صورت معکوس در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.

ثابت ناهمگنی منفی، کم‌تر از ماده‌ی همگن و به‌ازای مقادیر مثبت ثابت ناهمگنی بیشتر از ماده‌ی همگن است. بنابراین از نظر جابه‌جایی شعاعی استفاده از ماده‌ی با ثابت ناهمگنی منفی به‌دلیل کم‌تر بودن مقدار بیشینه‌ی آن مناسب‌تر است. با افزایش ثابت ناهمگنی تنش محوری و تنش محیطی افزایش می‌یابد و از پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی شعاعی کاسته می‌شود. بنابراین انتخاب ماده‌ی ناهمگن با ثابت منفی از نقطه‌نظر تنش و پتانسیل الکتریکی نیز توصیه می‌شود. تأثیر ثابت ناهمگنی بر جابه‌جایی محوری وابسته به موقعیت طولی استوانه است. اگرچه رفتار استوانه در مجاورت مرزهای انتهایی متفاوت از بقیه‌ی نقاط است، ولی در این ناحیه تأثیر ثابت ناهمگنی مشابه نواحی دیگر است. همچنین جهت پتانسیل الکتریکی با تغییرات ثابت ناهمگنی تغییر می‌کند.

محیطی تابعی از جنس ماده‌ی ناهمگن است به صورتی که برای همه‌ی مواد ناهمگن با ثابت‌های منفی، لایه‌ی داخلی بحرانی است ولی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مثبت، با افزایش ثوابت ناهمگنی لایه‌ی بحرانی از لایه‌ی داخلی به سمت خارجی میل می‌کند. در شکل ۲۱ ملاحظه می‌شود که تنش محوری در استوانه با ثابت ناهمگنی منفی در بیشتر لایه‌های شعاعی فشاری بوده است. این موضوع برای استوانه با ثابت ناهمگنی مثبت به صورت عکس صادق است.

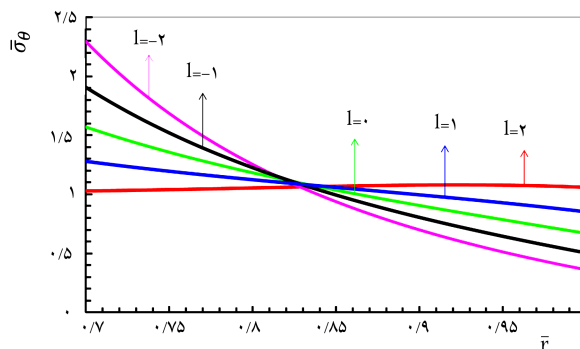
۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک استوانه‌ی هدفمند و هوشمند ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت میدان‌های الکتریکی، مکانیکی و حرارتی مورد تحلیل قرار گرفت. تغییرات خواص به صورت غیرخطی و تابع توانی در راستای شعاع فرض شد. معادلات تعادل مکانیکی به روش انرژی به دست آمد و برای یافتن معادلات تعادل الکتریکی از معادلات ماکسول و قانون گاوس استفاده شد. برای به دست آوردن توزیع دما از معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی فوریه در مختصات استوانه‌ای بهره گرفته شد. دستگاه معادلات حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم در حالت عمومی و با استفاده از نظریه‌ی مرتبه‌ی بالا تغییر شکل برشی استخراج شد. برای ارزیابی تحلیل‌ها، نتایج حاصله با نتایج تحقیقات مشابه^[۱۴] برای استوانه‌ی نمونه مقایسه و نتایج به دست آمده اعتبارسنجی شد. با استفاده از فعالیت‌های انجام شده در این تحقیق در مجموع می‌توان نتیجه گرفت:

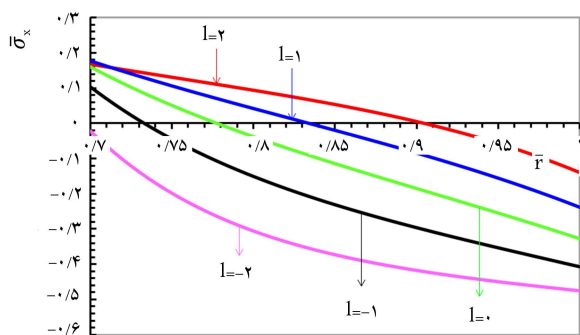
- فرمول‌بندی ارائه شده برای تمامی مرتبه‌های نظریه‌ی تغییر شکل برشی در استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری مکانیکی، حرارتی و الکتریکی قابل استفاده است.
- برای تحلیل رفتار استوانه‌ی هوشمند جدار ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی، استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی بالا ضروری است.
- در نقاط دور از مرزهای انتهایی استوانه، تمامی مشخصه‌های استوانه به جز جابه‌جایی محوری ثابت و مستقل از مکان محوری است.
- استفاده از مواد ناهمگن سبب ایجاد خواص مطلوب در سازه‌ها می‌شود.
- به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مثبت یا منفی، تنش محیطی در یک نیمه‌ی جداره‌ی استوانه کاهش، و در نیمه‌ی دیگر جداره افزایش می‌یابد.
- از نظر تنش محیطی (تنش بیشینه در استوانه) استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت ناهمگنی مثبت به دلیل کم‌تر بودن بازه تغییرات تنش در جسم و کم‌تر بودن مقدار بیشینه‌ی آن مطلوب‌تر است.

پانویس‌ها

1. functionally graded materials
2. smart materials
3. Piezoelectric materials
4. sensors
5. actuators
6. elasto electric
7. Plane elasticity theory
8. Hygro thermo elastic
9. multi-layer method (MLM)
10. thermo magneto elastic
11. Maxwell equations



شکل ۲۰. توزیع تنش محیطی بی بعد استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای ضخامت.



شکل ۲۱. توزیع تنش محوری بی بعد استوانه به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در راستای ضخامت.

در شکل ۲۰ مشاهده می‌شود تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی جداره برای ثوابت ناهمگن منفی، بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی کم‌تر از ماده‌ی همگن است؛ به عکس، برای ثوابت ناهمگنی مثبت در نیمه‌ی داخلی کم‌تر و در نیمه‌ی خارجی بیشتر از ماده‌ی همگن است. در محدوده‌ی مشخص اطراف لایه‌ی میانی رفتار ماده‌ی ناهمگن مشابه رفتار ماده‌ی همگن است که این محدوده بیشتر به سمت لایه‌ی میانی میل می‌کند. با توجه به این نکته که تنش‌های محیطی برای استوانه‌ی مورد مطالعه، تنش‌های بیشینه در جسم است، از نظر تنش استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت به دلیل کم‌تر بودن بازه تغییرات تنش در جسم و کم‌تر بودن مقدار بیشینه‌ی آن مطلوب‌تر است. مشاهده می‌شود که لایه‌ی بحرانی از نظر تنش

منابع (References)

1. Cady, W.G., *Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Application of Electromechanical Phenomena in Crystals*, McGraw-Hill, 806 p. (1946).
2. Crawley, E.F. and De Luis, J.X. "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures", *AIAA J.*, **25**(10), pp. 1373-1385 (1946).
3. Hwang, W.S. and Park, H.C. "Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators", *AZAA J.*, **31**, pp. 930-937 (1993).
4. Chen, C.Q., Shen, Y.P. and Wang, X.M. "Exact solution

- of orthotropic cylindrical shell with piezoelectric layers under cylindrical bending”, *Int. J. Solid. Struct.*, **33**(30), pp. 4481-4494 (1996).
5. Kapuria, S., Sengupta, S. and Dumir, P.C. “Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load”, *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, **140**(1), pp. 139-155 (1997).
 6. Rajapakse, R.K.N.D. and Zhou, Y. “Stress analysis of piezoceramic cylinders”, *Smart Math. Struct.*, **6**(2), pp. 161-169 (1997).
 7. Weiqiu, C. and Haojiang, D. “Exact static analysis of a rotating piezoelectric spherical shell”, *Acta Mech.*, **14**(3), pp. 257-265 (1998).
 8. Chen, W.Q., Ding, H.J. and Liang, J. “The exact elastoelectric field of a rotating piezoceramic spherical shell with a functionally graded property”, *Int. J. Solid. Struct.*, **38**(38), pp. 7015-7027 (2001).
 9. Wu, X.H., Chen, C., Shen, Y.P. and Tian, X.G. “A high order theory for functionally graded piezoelectric shells”, *Int. J. Solid. Struct.*, **39**(20), pp. 5325-5344 (2002).
 10. Wu, X.H., Shen, Y.P. and Chen, C. “An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators”, *Mat. Let.*, **57**(22), pp. 3532-3542 (2003).
 11. Galic, D. and Horgan, C.O. “The stress response of radially polarized rotating piezoelectric cylinders”, *J. Appl. Mech.*, **70**(3), pp. 426-435 (2003).
 12. Wu, C.P. and Syu, Y.S. “Exact solutions of functionally graded piezoelectric shells under cylindrical bending”, *Int. J. Solid. Struct.*, **44**(20), pp. 6450-6472 (2007).
 13. Ootao, Y. “Transient thermoelastic and piezothermoelastic problems of functionally graded materials”, *J. Therm. Stress.*, **32**, pp. 656-697 (2009).
 14. Ootao, Y., Akai, T. and Tanigawa, Y. “Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectric hollow cylinder”, *J. Therm. Stress.*, **31**, pp. 935-955 (2008).
 15. Sheng, G.G. and Wang, X. “Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells”, *Appl. Math. Model.*, **34**(9), pp. 2630-2643 (2010).
 16. Zenkour, A.M. “Piezoelectric behavior of an inhomogeneous hollow cylinder with thermal gradient”, *Int. J. Thermophysics*, **33**(7), pp. 1288-1301 (2012).
 17. Alibeigloo, A. “Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers”, *Compos. Struct.*, **93**(2), pp. 961-972 (2011).
 18. Ghorbanpour, A., Loghman, A., Abdollahitaheri, A. and Atabakhshian, V. “Electrothermomechanical behavior of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric cylinder”, *J. Mech. Mat. Struct.*, **6**(6), pp. 869-882 (2011).
 19. Malekzadeh, P., Heydarpour, Y., Haghighi, M.G. and Vaghefi, M. “Transient response of rotating laminated functionally graded cylindrical shells in thermal environment”, *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, **98**, pp. 43-56 (2012).
 20. Fesharaki, J.J., Fesharaki, V.J., Yazdipoor, M. and Razavian, B. “Two-dimensional solution for electromechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder”, *Appl. Math. Model.*, **36**(11), pp. 5521-5533 (2012).
 21. Rahimi, G.H., Arefi, M. and Khoshgoftar, M.J. “Electro elastic analysis of a pressurized thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder using the first order shear deformation theory and energy method”, *Mech.*, **18**(3), pp. 292-300 (2012).
 22. Dai, H.L., Dai, T. and Zheng, H.Y. “Stresses distributions in a rotating functionally graded piezoelectric hollow cylinder”, *Meccanica*, **47**(2), pp. 423-436 (2012).
 23. Alashti, R.A. and Khorsand, M. “Three-dimensional nonlinear thermo-elastic analysis of functionally graded cylindrical shells with piezoelectric layers by differential quadrature method”, *Acta Mech.*, **223**(12), pp. 2565-2590 (2012).
 24. Malekzadeh, P. and Heydarpour, Y. “Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment”, *Compos. Struct.*, **94**(9), pp. 2971-2981 (2012).
 25. Malekzadeh, P. and Heydarpour, Y. “Response of functionally graded cylindrical shells under moving thermo-mechanical loads”, *Thin-Walled Struct.*, **58**, pp. 51-66 (2012).
 26. Zenkour, A.M. “Hygrothermoelastic responses of inhomogeneous piezoelectric and exponentially graded cylinders”, *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, **119**, pp. 8-18 (2014).
 27. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading”, *Int. J. Eng. Sci.*, **89**, pp. 86-99 (2015).
 28. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “Elastic analysis of rotating thick cylindrical pressure vessels under non-uniform pressure: Linear and non-linear thickness”, *Period. Poly. Eng. Mech. Eng.*, **59**(2), pp. 65-73 (2015).
 29. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “A semi-analytical solution for elastic analysis of rotating thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers”, *Sci. World J.*, **2014**, pp. 1-10 (2014).
 30. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “A semi-analytical solution of thick truncated cones using matched asymptotic method and disk form multilayers”, *Arch. Mech. Eng.*, **61**(3), pp. 495-513 (2014).
 31. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “Elastic analysis of rotating thick truncated conical shells subjected to uniform pressure using disk form multilayers”, *ISRN Mech. Eng.*, **2014**, pp. 1-10 (2014).
 32. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. “Elastic analysis of FGM rotating thick truncated conical shells with axially-varying properties under non-uniform pressure loading”, *Compos. Struct.*, **122**, pp. 561-569 (2015).
 33. Arzhangpey, A., Ansari, R. and Darvizeh, M. “Axial buckling analysis of FGM cylindrical flange shells using the MLPG method”, *Sharif J. Mech. Eng.*, **30-3**(1), pp. 11-17 (2014).

34. Dai, H.L. and Jiang, H.J. "Magnetothermoelastic bending analysis of a functionally graded material cylindrical shell", *Mech. Adv. Mat. Struct.*, **22**(4), pp. 281-289 (2015).
35. Atrian, A., Fesharaki, J.J. and Nourbakhsh, S.H. "Thermo-electromechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads", *Appl. Math. Mech.*, **36**(7), pp. 939-954 (2015).
36. Jabbari, M. and Aghdam, M.B. "Asymmetric thermal stresses of hollow fgm cylinders with piezoelectric internal and external layers", *J. Solid Mech.*, **7**(3), pp. 327-343 (2015).
37. Hemati, M.R. and Tehrani, M.S. "Investigating maximum allowed angular velocity of a rotating hollow FGM cylinder, considering variable density and yield stress", *Sharif J. Mech. Eng.*, **30-3**(2.2), pp. 57-65 (2015).
38. Nejad, M.Z., Jabbari, M. and Ghannad, M. "A general disk form formulation for thermo-elastic analysis of functionally graded thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness", *Acta Mech.*, **228**(1), pp. 215-231 (2016).
39. Jabbari, M., Nejad, M.Z. and Ghannad, M. "Thermoelastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading", *Int. J. Eng. Sci.*, **96**, pp. 1-18 (2015).
40. Jabbari, M., Nejad, M.Z. and Ghannad, M. "Thermoelastic analysis of axially functionally graded rotating thick truncated conical shells with varying thickness", *Compos. Part B: Eng.*, **96**, pp. 20-34 (2016).
41. Dehghan, M., Nejad, M.Z. and Moosaie, A. "Thermo-electro-elastic analysis of functionally graded piezoelectric shells of revolution: Governing equations and solutions for some simple cases", *Int. J. Eng. Sci.*, **104**, pp. 34-61 (2016).
42. Fernandes, A. and Pouget, J. "Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators", *Comput. Struct.*, **84**(22), pp. 1459-1470 (2006).
43. Vel, S.S. and Baillargeon, B.P. "Analysis of static deformation, vibration and active damping of cylindrical composite shells with piezoelectric shear actuators", *ASME J. Vib. Acous.*, **127**, pp. 395-407 (2005).

پیوست

ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e_{\text{r}}^{\text{r}}}{(R+h/\nu)^l} \left(jz^{j-1}(R+z)^l \right) (R+z) dz \\
 & \quad i = \nu n_{SDT} + 1 \\
 I_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(C_{\text{rr}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} z^{i+j} \frac{d^{\text{r}}}{dx^{\text{r}}} \right. \\
 & \left. - ij C_{\text{dd}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} z^{i+j-\text{r}} \right) dz, \quad 0 \leq i \leq n_{SDT} \\
 I_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(\frac{C_{\text{rr}}^{\text{r}} (R+z)^l z^{i+j-n_{SDT}-1}}{(R+h/\nu)^l} \frac{d}{dx} \right. \\
 & \left. + \left((1+n_{SDT}-i) C_{\text{rr}}^{\text{r}} (R+z)^{l+1} z^{i-n_{SDT}+j-\text{r}} \right) \frac{d}{dx} \right) dz \\
 & \quad n_{SDT} < i \leq \nu n_{SDT} \\
 I_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left((l+1) e_{\text{r}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l-1}}{(R+h/\nu)^l} z^j \frac{d}{dx} \right. \\
 & \left. + j e_{\text{r}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^l}{(R+h/\nu)^l} z^{j-1} \frac{d}{dx} \right) (R+z) dz, \quad i = \nu n_{SDT} + 1 \\
 J_i = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(-i e_{\text{r}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} \Omega z^{i-1} \frac{d}{dx} \right) \quad 0 \leq i \leq n_{SDT} \\
 J_i = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(e_{\text{r}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} \Omega z^{i-n_{SDT}-1} \frac{d^{\text{r}}}{dx^{\text{r}}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(-i C_{\text{dd}}^{\text{r}} z^{i+j-1} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} \frac{d}{dx} \right) dz, \quad 0 \leq i \leq n_{SDT} \\
 L_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(C_{\text{dd}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} z^{i+j-n_{SDT}-1} \frac{d^{\text{r}}}{dx^{\text{r}}} \right. \\
 & - (i-n_{SDT}-1) j C_{\text{rr}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} z^{i-n_{SDT}+j-\text{r}} \\
 & - (i+j-n_{SDT}-1) C_{\text{rr}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h/\nu)^l} z^{j+i-n_{SDT}-\text{r}} \\
 & \left. - C_{\text{rr}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^{l-1}}{(R+h/\nu)^l} z^{i+j-n_{SDT}-1} \right) dz, \quad n_{SDT} < i \leq \nu n_{SDT} \\
 L_{ij} = & \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(e_{\text{r}}^{\text{r}} \frac{(R+z)^l}{(R+h/\nu)^l} z^j \frac{d^{\text{r}}}{dx^{\text{r}}} \right. \\
 & + \frac{e_{\text{r}}^{\text{r}} j}{(R+h/\nu)^l} (l+1) z^{j-1} (R+z)^{l-1} \\
 & + \frac{e_{\text{r}}^{\text{r}} j}{(R+h/\nu)^l} (j-1) z^{j-\text{r}} (R+z)^l \\
 & \left. + \frac{e_{\text{r}}^{\text{r}}}{(R+h/\nu)^l} l z^j (R+z)^{l-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$F_i = \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(- \left(\beta_{\nu}^{\circ} + (i - n_{SDT} - \nu) \beta_{\nu}^{\circ} \right) \frac{(R+z)^{l+b}}{(R+h/\nu)^{l+b}} T \right) dz$$

$$- \rho^{\circ} \omega^{\nu} \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \frac{(R+z)^{g+\nu}}{(R+h/\nu)^g} z^{i-n_{SDT}-\nu} dz$$

$$- P \left(R - \frac{h}{\nu} \right) \left(-\frac{h}{\nu} \right)^{i-n_{SDT}-\nu} \quad n_{SDT} < i \leq \nu n_{SDT}$$

$$F_i = \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(-p_{\nu}^{\circ} (b+l+\nu) \frac{(R+z)^{b+l-\nu}}{(R+h/\nu)^{b+l}} T \right)$$

$$- p_{\nu}^{\circ} \frac{(R+z)^{b+l}}{(R+h/\nu)^{b+l}} \frac{dT}{dz} \Big) (R+z) dz \quad i = \nu n_{SDT} + \nu$$

$$- e_{\nu}^{\circ} \frac{(R+z)^{l+\nu}}{(R+h/\nu)^l} \frac{d\Omega}{dz} z^{i-n_{SDT}-\nu}$$

$$- (i - n_{SDT} - \nu) e_{\nu}^{\circ} \frac{(R+z)^{l+\nu}}{(R+h/\nu)^l} \frac{d\Omega}{dz} z^{i-n_{SDT}-\nu} \Big) dz$$

$$n_{SDT} < i \leq \nu n_{SDT}$$

$$J_i = \int_{-\frac{h}{\nu}}^{\frac{h}{\nu}} \left(-\frac{\xi_{\nu}^{\circ} (R+z)^l}{(R+h/\nu)^l} \left(\frac{(l+\nu)}{(R+z)} \frac{d\Omega}{dz} + \frac{d^{\nu}\Omega}{dz^{\nu}} \right) \right)$$

$$\left(-\xi_{\nu}^{\circ} \frac{(R+z)^{l+\nu}}{(R+h/\nu)^l} \Omega \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \right) \Big) (R+z) dz, \quad i = \nu n_{SDT} + \nu$$

$$F_i = 0 \quad 0 \leq i \leq n_{SDT}$$