

تحلیل اثر لایه‌ی مرزی در پوسته‌ی استوانه‌ی هیبریدی دوار با لایه‌گذاری متعامد تحت شرایط مختلف لایه‌ی

Original Article

عیسی احمدی* (دانشیار)

مهسا نجفی (دانشجوی دکتری)

ندا عطایی (کارشناس ارشد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان

هدف این مقاله تحلیل اثر لایه‌ی مرزی در پوسته‌ی استوانه‌ی کامپوزیتی هیبریدی با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی استوانه تحت بارگذاری نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران است. برای حل معادلات حاکم، از تبدیل متغیر برای جداسازی معادلات استفاده شده است و معادلات برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. با حل معادلات حاکم و استخراج میدان جابه‌جایی پوسته‌ی هیبریدی، تنش‌های میان‌لایه‌ی و اثر لایه‌ی مرزی در پوسته‌ی استوانه‌ی هیبریدی محاسبه شده است. هم‌گرایی روش ارائه شده با هم‌گرایی روش اجزاء محدود مقایسه شده است. برای صحه‌گذاری، تنش‌های به دست آمده با نتایج اجزاء محدود مقایسه شده است. اثرات هندسه، نوع لایه‌گذاری، سرعت دوران و اثر هیبریدی شدن بر تنش‌های میان‌لایه‌ی و تنش لایه‌ی مرزی بررسی شده و بیشینه سرعت دورانی که پوسته‌ی هیبریدی می‌تواند تحمل کند محاسبه شده است. با استفاده از نتایج می‌توان جدایش لایه‌های کامپوزیت را پیش‌بینی و از وقوع آن جلوگیری کرد.

واژگان کلیدی: کامپوزیت هیبریدی لایه‌ی، اثر لایه‌ی مرزی، تنش میان‌لایه‌ی، نظریه‌ی لایه‌ی ردی، لایه‌گذاری متعامد.

۱. مقدمه

کامپوزیت‌ها به دلیل خواص ویژه مکانیکی کاربرد فراوانی در صنایع دارند. کاربرد این مواد در صنایعی همچون صنعت هوافضا، صنعت خودروسازی و ساختمان و ... به صورت چشمگیری رو به افزایش است. تغییر لایه‌گذاری یا خواص مکانیکی یا هندسی لایه‌ها در کامپوزیت‌های لایه‌ی^۱ به منظور تغییر رفتار ماده‌ی مرکب ممکن است به شکست یا جدایش^۲ لایه‌ها بینجامد. پدیده‌ی جدایش بین‌لایه‌ی بر اثر افزایش شدید و ناگهانی تنش‌های میان‌لایه‌ی^۳ در لایه‌ی آزاد پوسته‌ی مرکب رخ می‌دهد که به دلیل سه بعدی بودن تنش در این ناحیه، نظریه‌ی صفحه‌ی کلاسیک^۴ قادر به پیش‌بینی آن‌ها نیست. از این رو تحقیقات تحلیلی و عددی زیادی در این مورد انجام شده است.

نخستین مطالعات در زمینه‌ی کامپوزیت‌های لایه‌ی توسط پوپو و اونسن^[۱] با در نظر گرفتن تنش صفحه‌ی و صرف نظر از تنش‌های میان‌لایه‌ی عمودی ارائه شده است. در ادامه، تحقیقات فراوانی با استفاده از نظریه‌ی اغتشاشات،^[۲] نظریه‌ی مرتبه‌بالا،^[۳] و نظریه‌ی لایه‌ی مرزی^[۴] انجام شد. در سال ۱۹۷۴ نیز با استفاده از

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۲/۱۰، اصلاحیه ۱۳۹۶/۵/۲، پذیرش ۱۳۹۶/۵/۱۷

DOI: 10.24200/J40.2018.6408

یک روش الاستیسیته تنش‌های میان‌لایه‌ی در کامپوزیت‌های لایه‌ی بررسی شد.^[۵] سپس نظریه‌ی الاستیک پوسته‌ها^[۶] برای مطالعه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ی دوار تحت فشار داخلی ارائه شد. محققین روش اجزاء ورق چند لایه را برای تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی در کامپوزیت‌های لایه‌ی گسترش دادند.^[۷] آن‌ها ابتدا «نظریه‌ی ورق چند جهته مبتنی بر تقریب درجه دوم از میدان جابه‌جایی» را ارائه کردند. سپس با استفاده از نظریه‌ی تک‌لایه‌ی معادل که بعدها با نظریه‌ی چندلایه ترکیب می‌شد، امکان پیش‌بینی توزیع تنش در راستای ضخامت را فراهم آوردند. در سال ۱۹۹۲ نظریه‌ی لایه‌ی^۵ برای بررسی تنش‌های میان‌لایه‌ی ارائه شد.^[۸] در این نظریه، میدان جابه‌جایی با استفاده از توابع لاگرانژین مسئله را به حالت دو بعدی تبدیل می‌کند و برخلاف نظریه‌هایی چون نظریه‌ی تک‌لایه‌ی معادل و نظریه‌ی کلاسیک قادر است تنش‌های میان‌لایه‌ی را در لایه‌ی مرزی پیش‌بینی کند. کاساپاوغلو و لاگاس^[۹] تنش‌های میان‌لایه‌ی را در صفحات کامپوزیتی متقارن تحت بار کششی غیرمحموری مورد بررسی قرار دادند. از جمله تحقیقات انجام شده با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی می‌توان به تحقیق طهانی و نئیر^[۱۰] اشاره کرد که با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات تخت کامپوزیتی را محاسبه کردند. طهانی^[۱۱] صفحات کامپوزیتی لایه‌ی تحت بار فشاری را با نظریه‌ی لایه‌ی مورد بررسی قرار

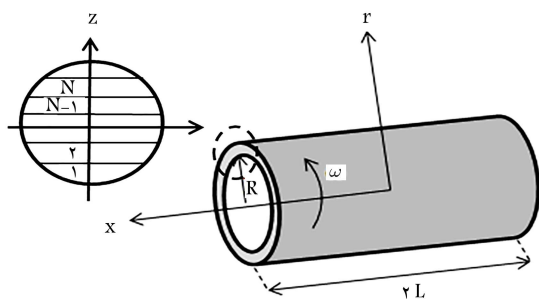
داد. باشار و دینگ^[۱۲] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی را در پوسته‌های کامپوزیتی تحت فشار داخلی یکنواخت مورد تحلیل قرار دادند. ونگ و لی^[۱۳] با استفاده از روش جداسازی متغیرها تنش‌های برون صفحه‌ی را در پوسته‌ی استوانه‌ی تحت فشار کامل و بارگذاری حرارتی محاسبه کردند. افشین و همکاران^[۱۴] اثرات لایه را در پانل ساندویچی کامپوزیتی تحت بارگذاری عرضی با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه نتایج به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌ی با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفت و مشخص شد که تعداد معادلات روش لایه‌ی کم‌تر از روش اجزاء محدود بوده و برای مسائل پیچیده مناسب‌تر است. نثرو و طهانی^[۱۵] تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیتی لایه‌ی متعامد تحت بارگذاری خمشی را با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه دو نوع شرط مرزی برای تحلیل این تنش‌ها در نظر گرفته شده است. در حالت اول در چهار طرف صفحه تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است و در حالت دوم دو طرف صفحه تکیه‌گاه ساده و دو طرف دیگر آن آزاد فرض شده است. نتایج به دست آمده بیانگر وجود تنش‌های میان‌لایه‌ی در لبه‌های آزاد است. نثرو و بهرامی^[۱۶] نظریه‌ی لایه‌ی و نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه اول را برای تحلیل اثرات لایه در صفحات لایه‌ی غیر متقارن تحت بارکشی و پیچشی، به کار بردند. آن‌ها با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه اول ثابت‌های مجهول میدان جابه‌جایی را تعیین کرده و سپس نظریه‌ی لایه‌ی را برای تعیین تنش‌های بین لایه‌ی در ناحیه‌ی لایه‌ی مرزی استفاده کردند. میری و نثرو^[۱۷] تنش‌های میان‌لایه‌ی را در پوسته‌های استوانه‌ی تحت کشش مورد بررسی قرار دادند. نثرو و همکاران^[۱۸] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی ردی توانستند تنش‌های میان‌لایه‌ی را در تیر مرکب دوار مورد بررسی قرار دهند. سروستانی و نقاش‌پور^[۱۹] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی به بررسی تنش‌های میان‌لایه‌ی در کامپوزیت‌های لایه‌ی متعامد، متقارن و زاویه‌ی تحت گشتاور خمشی پرداخته‌اند. رضوانی و قلعه‌بهن^[۲۰] تنش‌های میان‌لایه‌ی را با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی در ورق‌های مرکب متعامد متقارن تحت بارگذاری حرارتی و کرنش محوری یکنواخت به دست آوردند. کردخیلی و نقدابادی^[۲۱] با استفاده از یک روش شبه تحلیلی ترموالاستیک دیسک‌های دوار هدف‌مند را مورد بررسی قرار دادند. کوچک‌زاده^[۲۲] تورق را در صفحات مرکب لایه‌ی مطرح کرد که در آن صفحات مورد مطالعه تحت بار برشی هستند. یانگ و همکاران^[۲۳] نظریه‌ی جدیدی مرکب از نظریه‌ی برشی مرتبه اول و نظریه‌ی لایه‌ی، برای محاسبه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیت لایه‌ی تحت بار یکنواخت ارائه کردند. آن‌ها در این مطالعه به بررسی اثر زاویه‌ی لایه‌گذاری بر تنش‌ها پرداختند. در سال ۲۰۱۵ خندلوال و همکاران^[۲۴] نظریه‌ی مرتبه بالای بهبود یافته را برای تعیین تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌ی مرکب به کار بردند. گسوامی و بکر^[۲۵] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی را در صفحات ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر مورد بررسی قرار دادند. الیاس و همکارانش^[۲۶] نیز با استفاده از این نظریه اثرات لایه را در سازه‌ی ساندویچی مورد بررسی قرار دادند. یانگ و همکارانش^[۲۷] با ترکیب دو نظریه‌ی لایه‌ی و نظریه‌ی برشی مرتبه اول به تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی تحت بار یکنواخت پرداختند و همچنین اثرات لایه‌گذاری بر میزان تنش‌های میان‌لایه‌ی را مطالعه کردند. یزدانی و همکارانش^[۲۸] از روش پرتابی برای تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی در ورق‌های کامپوزیتی استفاده کردند. طهانی و نثرو^[۲۹] برای مطالعه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیتی متقارن تحت کرنش کششی از نظریه‌ی لایه‌ی ردی استفاده کردند. تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌های استوانه‌ی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بار دینامیکی توسط یاس و همکارانش^[۳۰] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد بررسی قرار گرفت. احمدی و عطایی^[۳۱] تنش‌های سه بعدی حرارتی در پوسته‌های

کامپوزیتی متعامد را مورد بررسی قرار دادند. افشین و طاهری^[۳۲] تنش‌های میان‌لایه‌ی را در تیرهای کامپوزیتی روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار دادند. ایوبی و علی بیگلر^[۳۳] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی ردی توانستند تحلیل گذرای سه‌بعدی پوسته‌ی استوانه‌ی FGM را تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی محاسبه کنند. تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ی دوار به صورت مواد مدرج تابعی توسط حیدرپور و همکاران^[۳۴] مورد بررسی قرار گرفت که در آن مطالعه، ترکیبی از نظریه‌ی لایه‌ی و روش مربعات دیفرانسیلی مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به اهمیت جنس لایه‌ها در اندازه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی، توجه به این موضوع می‌تواند موجب کاهش این تنش‌ها شود و در نهایت از احتمال جدایش لایه‌ها بکاهد. با توجه به پیشینه‌ی پژوهش و مطالعات انجام شده در زمینه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی، تاکنون مطالعه‌ی در زمینه‌ی تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌های کامپوزیتی هیبریدی تحت دوران با شرایط مرزی مختلف صورت نگرفته است. با توجه به کاربردهای لوله‌های کامپوزیتی دوار و به علت اهمیت تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌های کامپوزیتی مخصوصاً استوانه‌های دوار پرسرعت، تحلیل دقیق این پوسته‌ها و محاسبه‌ی تنش‌های لایه‌ی دارای اهمیت است. همچنین برای بالا بردن میرایی ذاتی در این سازه‌ها استفاده از کامپوزیتی هیبریدی می‌تواند مفید و مؤثر واقع شود و علاوه بر افزایش میرایی ذاتی سازه می‌تواند از احتمال جدایش بکاهد. در این مقاله، میدان جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ی متعامد تحت دوران با استفاده از روش نظریه‌ی لایه‌ی به دست آمده است. نظریه‌ی لایه‌ی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات معمولی به صورت توابعی از روابط جابه‌جایی لایه‌های عددی، به کار می‌رود اثر هیبریدی شدن بر میزان تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌ی استوانه‌ی دوار مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحت نتایج از روش اجزاء محدود استفاده شده است. به علاوه اثرات هندسی و لایه‌گذاری در کامپوزیت لایه‌ی هیبریدی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲. استخراج روابط

پوسته‌ی استوانه‌ی، لایه‌ی تحت بارگذاری دورانی در نظر گرفته شده که دارای n لایه‌ی فیزیکی است. هر لایه به m لایه‌ی ریاضی تقسیم شده است و در مجموع N لایه و $N + 1$ سطح وجود دارد. چنان که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، طول، شعاع متوسط و ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ی به ترتیب $2L$ ، R و h بوده و ضخامت هر لایه‌ی فیزیکی $\frac{h}{n}$ است.

چنان که در هندسه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ی مشاهده می‌شود رابطه‌ی r و z چنین تعریف می‌شود.



شکل ۱. هندسه پوسته‌ی استوانه‌ی.

داد. باشار و دینگ^[۱۲] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی را در پوسته‌های کامپوزیتی تحت فشار داخلی یکنواخت مورد تحلیل قرار دادند. ونگ و لی^[۱۳] با استفاده از روش جداسازی متغیرها تنش‌های برون صفحه‌ی را در پوسته‌ی استوانه‌ی تحت فشار کامل و بارگذاری حرارتی محاسبه کردند. افشین و همکاران^[۱۴] اثرات لایه را در پانل ساندویچی کامپوزیتی تحت بارگذاری عرضی با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه نتایج به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌ی با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفت و مشخص شد که تعداد معادلات روش لایه‌ی کم‌تر از روش اجزاء محدود بوده و برای مسائل پیچیده مناسب‌تر است. نثرو و طهانی^[۱۵] تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیتی لایه‌ی متعامد تحت بارگذاری خمشی را با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه دو نوع شرط مرزی برای تحلیل این تنش‌ها در نظر گرفته شده است. در حالت اول در چهار طرف صفحه تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است و در حالت دوم دو طرف صفحه تکیه‌گاه ساده و دو طرف دیگر آن آزاد فرض شده است. نتایج به دست آمده بیانگر وجود تنش‌های میان‌لایه‌ی در لبه‌های آزاد است. نثرو و بهرامی^[۱۶] نظریه‌ی لایه‌ی و نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه اول را برای تحلیل اثرات لایه در صفحات لایه‌ی غیر متقارن تحت بارکشی و پیچشی، به کار بردند. آن‌ها با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه اول ثابت‌های مجهول میدان جابه‌جایی را تعیین کرده و سپس نظریه‌ی لایه‌ی را برای تعیین تنش‌های بین لایه‌ی در ناحیه‌ی لایه‌ی مرزی استفاده کردند. میری و نثرو^[۱۷] تنش‌های میان‌لایه‌ی را در پوسته‌های استوانه‌ی تحت کشش مورد بررسی قرار دادند. نثرو و همکاران^[۱۸] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی ردی توانستند تنش‌های میان‌لایه‌ی را در تیر مرکب دوار مورد بررسی قرار دهند. سروستانی و نقاش‌پور^[۱۹] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی به بررسی تنش‌های میان‌لایه‌ی در کامپوزیت‌های لایه‌ی متعامد، متقارن و زاویه‌ی تحت گشتاور خمشی پرداخته‌اند. رضوانی و قلعه‌بهن^[۲۰] تنش‌های میان‌لایه‌ی را با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی در ورق‌های مرکب متعامد متقارن تحت بارگذاری حرارتی و کرنش محوری یکنواخت به دست آوردند. کردخیلی و نقدابادی^[۲۱] با استفاده از یک روش شبه تحلیلی ترموالاستیک دیسک‌های دوار هدف‌مند را مورد بررسی قرار دادند. کوچک‌زاده^[۲۲] تورق را در صفحات مرکب لایه‌ی مطرح کرد که در آن صفحات مورد مطالعه تحت بار برشی هستند. یانگ و همکاران^[۲۳] نظریه‌ی جدیدی مرکب از نظریه‌ی برشی مرتبه اول و نظریه‌ی لایه‌ی، برای محاسبه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیت لایه‌ی تحت بار یکنواخت ارائه کردند. آن‌ها در این مطالعه به بررسی اثر زاویه‌ی لایه‌گذاری بر تنش‌ها پرداختند. در سال ۲۰۱۵ خندلوال و همکاران^[۲۴] نظریه‌ی مرتبه بالای بهبود یافته را برای تعیین تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌ی مرکب به کار بردند. گسوامی و بکر^[۲۵] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی را در صفحات ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر مورد بررسی قرار دادند. الیاس و همکارانش^[۲۶] نیز با استفاده از این نظریه اثرات لایه را در سازه‌ی ساندویچی مورد بررسی قرار دادند. یانگ و همکارانش^[۲۷] با ترکیب دو نظریه‌ی لایه‌ی و نظریه‌ی برشی مرتبه اول به تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی تحت بار یکنواخت پرداختند و همچنین اثرات لایه‌گذاری بر میزان تنش‌های میان‌لایه‌ی را مطالعه کردند. یزدانی و همکارانش^[۲۸] از روش پرتابی برای تحلیل تنش‌های میان‌لایه‌ی در ورق‌های کامپوزیتی استفاده کردند. طهانی و نثرو^[۲۹] برای مطالعه‌ی تنش‌های میان‌لایه‌ی در صفحات کامپوزیتی متقارن تحت کرنش کششی از نظریه‌ی لایه‌ی ردی استفاده کردند. تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌های استوانه‌ی ساخته شده از مواد هدفمند تحت بار دینامیکی توسط یاس و همکارانش^[۳۰] با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی مورد بررسی قرار گرفت. احمدی و عطایی^[۳۱] تنش‌های سه بعدی حرارتی در پوسته‌های

در رابطه‌ی ۹، ω_j عبارت است از:

$$\omega^j = \omega^r \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \rho_j \Phi^j dz \quad (13)$$

$$\omega^j = \begin{cases} \frac{\omega^r h_1}{r} \rho_1 & j = 1 \\ \frac{\omega^r h_{j-1}}{r} \rho_{j-1} + \frac{\omega^r h_j}{r} \rho_j & 1 < j < N + 1 \\ \frac{\omega^r h_N}{r} \rho_N & j = N + 1 \end{cases} \quad (14)$$

همچنین متجه‌های تنش مطابق تعریف عبارت است از:

$$(M_x^j, R_\theta^j, M_\theta^j) = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} (\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{\theta\theta}) \Phi^j dz \quad (15)$$

$$(N_z^j, Q_x^j) = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} (\sigma_{zz}, \sigma_{xz}) \frac{d\Phi^j}{dz} dz \quad (16)$$

که در آن ρ_j چگالی هر لایه، h_j ضخامت لایه‌ی j ام ω سرعت دوران زاویه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ی است. معادلات کرنش - تنش چنین بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{13} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{33} \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^i \quad (17)$$

$$\{\sigma_{xz}\}^i = [\bar{c}_{55}]^i \{\varepsilon_{xz}\}^i \quad (18)$$

که در آن $\{\sigma\}$ ماتریس تنش، $\{\varepsilon\}$ ماتریس کرنش، و $[\bar{C}]$ ماتریس سختی کاهش یافته‌ی لایه‌ی i ام است. با جاگذاری روابط کرنش - جابه‌جایی در روابط متجه‌های تنش، این متجه‌ها برحسب میدان جابه‌جایی عبارت خواهند بود از:

$$M_x^i = D_{11}^{ij} u_j' + \left(\frac{1}{R} D_{1r}^{ij} + B_{1r}^{ij} \right) w_j \quad (19)$$

$$Q_x^i = B_{\theta\theta}^{ij} w_j' + A_{\theta\theta}^{ij} u_j \quad (20)$$

$$M_\theta^i = D_{1r}^{ij} u_j' + \left(\frac{1}{R} D_{rr}^{ij} + B_{rr}^{ij} \right) w_j \quad (21)$$

$$N_z^i = B_{rr}^{ij} u_j' + \left(\frac{1}{R} B_{rr}^{ij} + A_{rr}^{ij} \right) w_j \quad (22)$$

$$R_x^i = D_{\theta\theta}^{ij} w_j' + B_{\theta\theta}^{ij} u_j \quad (23)$$

ضرایب سختی مذکور در روابط فوق در قسمت پیوست آورده شده است. با قرار دادن روابط متجه‌های تنش برحسب جابه‌جایی در روابط تعادل و بازنویسی آنها، این روابط چنین بیان می‌شود:

$$D_{11}^{ij} \frac{d^2 u_j}{dx^2} + \left(\frac{1}{R} D_{1r}^{ij} + B_{1r}^{ij} - B_{\theta\theta}^{ji} \right) \frac{dw_j}{dx} - A_{\theta\theta}^{ij} u_j = 0 \quad (24)$$

$$D_{\theta\theta}^{ij} \frac{d^2 w_j}{dx^2} - (B_{rr}^{ji} - B_{\theta\theta}^{ij} + \frac{1}{R} D_{1r}^{ij}) \frac{du_j}{dx} - \left(A_{rr}^{ij} + \frac{1}{R} D_{rr}^{ij} + \frac{1}{R} (B_{rr}^{ij} + B_{rr}^{ji}) \right) w_j + R\omega^i = 0 \quad (25)$$

$$r = R + z = R \left(1 + \frac{z}{R} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

در پوسته‌ی استوانه‌ی مورد بررسی، نسبت ضخامت پوسته به شعاع آن بسیار کم‌تر از ۱ است ($\frac{z}{R} \ll 1$). بنابراین فرض می‌شود شعاع میانگین پوسته تقریباً برابر شعاع آن است. به علاوه، مشاهده می‌شود که مشتق نسبت به r برابر مشتق نسبت به z است. در ادامه، از روابط مشتق نسبت به z به جای مشتق نسبت به r استفاده می‌شود. معادلات جابه‌جایی نیز چنین در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, z) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j(x) \Phi^j(z) \quad (2)$$

$$w(x, z) = \sum_{j=1}^{N+1} w_j(x) \Phi^j(z) \quad (3)$$

که در آن u_j و w_j ، مقادیرگره‌ی در جهات x و z و هر لایه است. به علت تقارن محوری در هندسه و بارگذاری پوسته‌ی استوانه‌ی دوار میدان جابه‌جایی وابسته به θ نیست و به علت تعادل میدان جابه‌جایی در جهت y صفر است. ϕ^j یک تابع درون‌یاب لاگرانژ موضعی است:

$$\Phi^j(z) = \begin{cases} \Psi_{1j}^{(j-1)} = \frac{z-z_{j-1}}{t_{j-1}}, z_{j-1} \leq z \leq z_j \\ \Psi_{2j}^{(j)} = \frac{(z_{j+1}-z)}{t_j}, z_j \leq z \leq z_{j+1} \end{cases} \quad (4)$$

که در آن Ψ_{ij}^j ($j = 1, 2, \dots, N$ و $i = 1, 2$) تابع درون‌یاب لاگرانژ محلی برای سطح j ام است. روابط کرنش - جابه‌جایی با توجه به میدان جابه‌جایی عبارت‌اند از:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial x} \Phi^j \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} = \frac{w_j}{R} \Phi^j \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^j}{\partial z} w_j \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_j \frac{\partial \Phi^j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \Phi^j \quad (8)$$

با استفاده از اصل هامیلتون روابط تعادل برای $2(N+1)$ مجهول میدان جابه‌جایی نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial M_x^j}{\partial x} - Q_x^j = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial R_x^j}{\partial x} - N_z^j - \frac{1}{R} M_\theta^j + R\omega^j = 0 \quad (10)$$

در شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد در دو سمت پوسته‌ی استوانه‌ی عبارت خواهد بود از:

$$R_x^i = 0 \quad i = 1, \dots, N + 1 \quad (11)$$

$$M_x^i = 0$$

در تکیه‌گاه گیردار، شرایط مرزی در $x = \pm L$ چنین بیان می‌شود.

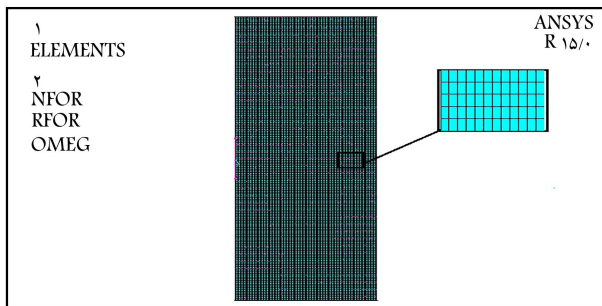
$$u(x) = 0 \quad (12)$$

$$w(x) = 0$$

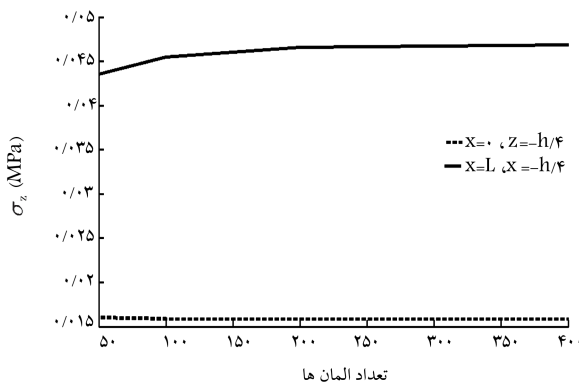
۳. نتایج عددی

در این بخش، پوسته‌ی استوانه‌ی لایه‌ی هیبریدی متعامد تحت دوران مورد بررسی قرار می‌گیرد. پوسته‌ی استوانه‌ی کامپوزیتی هیبریدی دارای شعاع $R = 30\text{ mm}$ طول $2L$ ، ضخامت $h = 1\text{ mm}$ ($\frac{r}{h} = 4$) و سرعت دورانی $\omega = 200\text{ Hz}$ است. تمامی لایه‌های فیزیکی ضخامت یکسان $h/4$ دارند. کامپوزیت هیبریدی شامل ۴ لایه‌ی گرافیت اپوکسی/کولاراپوکسی در نظر گرفته شده است که خصوصیات مکانیکی مواد در جدول ۱ آورده شده است. لایه‌های بیرونی از جنس گرافیت/اپوکسی و لایه‌های وسطی از جنس کولار/اپوکسی است.

برای صحت‌سنجی نتایج نظریه‌ی لایه‌ی، از روش اجزاء محدود استفاده شده است. از نرم‌افزار انسیس برای مدل‌سازی پوسته‌ی استوانه‌ی دوار استفاده شده است. مسئله‌ی مورد نظر، به علت تقارن هندسی و بارگذاری نسبت به محور θ ، به صورت دو بعدی مدل شده و برای تحلیل، اجزای متقارن محوری 186 solid مورد استفاده قرار گرفته است. برای پیش‌بینی دقیق تنش‌های بین لایه‌ی تعداد المان‌ها در راستای طول پوسته 200 و در راستای ضخامت پوسته 240 است. مش‌بندی پوسته به صورت منظم انجام شده و سرعت دورانی 200 هرترز بر آن اعمال می‌شود (شکل ۲) با افزایش تعداد اجزای مدل مورد نظر، دقت نتایج اجزای محدود افزایش می‌یابد. با توجه به این که ضخامت پوسته به 48 لایه عددی تقسیم شده، مشاهده می‌شود که تعداد المان‌های روش اجزاء محدود حداقل ۵ برابر تعداد لایه‌های روش لایه‌ی است. هم‌گرایی روش‌های اجزای محدود با افزایش تعداد اجزای در راستای ضخامت در شکل ۳ نشان داده شده است. برای این منظور تنش میان لایه‌ی σ_z در نقاط $(z = -h/4, x = 0)$ و $(z = -h/4, x = L)$ ، برای روش اجزای محدود بر حسب تعداد المان در راستای ضخامت نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که



شکل ۲. مش‌بندی مدل در اجزای محدود.



شکل ۳. تنش میان‌لایه‌ی σ_z در پوسته‌ی استوانه‌ی لایه‌ی با لایه‌گذاری 90° در روش اجزاء محدود.

به منظور ساده‌سازی و محاسبه‌ی میدان جابه‌جایی، متغیرهای خاصی در نظر گرفته شده که با استفاده از آن‌ها دستگاه معادلات دیفرانسیل به دو دستگاه معادلات دیفرانسیلی به فرم ماتریسی تبدیل می‌شود:

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \{U(x)\} \\ \{W'(x)\} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\{\xi\} = \begin{Bmatrix} \{U'(x)\} \\ \{W(x)\} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

با جای‌گذاری این متغیرها در معادلات تعادل و جداسازی ضرایب مجهولات خواهیم داشت:

$$\{\xi'\} = [A]\{\eta\} \quad (28)$$

$$\{\eta'\} = [B]\{\xi\} + \{f\} \quad (29)$$

$$[A][B] = [C], [C][U] = [U][A^T] \quad (30)$$

در این روابط $[A]$ ، $[B]$ و $\{f\}$ در قسمت پیوست ارائه شده است. $[U]$ و $[A^T]$ بردار و مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[C]$ هستند. با حل معادلات فوق مقادیر میدان جابه‌جایی محاسبه می‌شود:

$$\{\xi\} = [U][\cosh(\lambda x)]\{K_i\} + [U][\sinh(\lambda x)]\{K_r\} - [B]^{-1}\{F\} \quad (31)$$

$$\{\eta\} = [B][U][A]^{-1}[\sinh(\lambda x)]\{K_i\} + [B][U][A]^{-1}[\cosh(\lambda x)]K_r \quad (32)$$

$\{K_i\}$ و $\{K_r\}$ ماتریس‌هایی با $(2N + 2)$ مؤلفه‌ی مجهول است که با استفاده از شرایط مرزی مورد نظر محاسبه می‌شود. با به دست آوردن مجهولات $\{K_i\}$ و $\{K_r\}$ میدان جابه‌جایی و در نهایت تنش‌های میان‌لایه‌ی محاسبه می‌شود. در شرایط مرزی تکیه‌گاه آزاد با توجه به رابطه‌ی 10 و در شرایط مرزی گیردار با توجه به رابطه‌ی 11 ، با اعمال شرایط مرزی در $x = \pm L$ ، مجهولات $\{K_i\}$ و $\{K_r\}$ محاسبه می‌شود. در صورتی که شرایط مرزی در $x = \pm L$ یکسان باشد، مشاهده می‌شود که $\{\eta\}$ تابعی فرد و $\{\xi\}$ تابعی زوج از x هستند. در نتیجه $\{K_r\} = 0$ خواهد بود. در این صورت $\{K_i\}$ با اعمال شرایط مرزی در یکی از $x = L$ یا $x = -L$ به دست خواهد آمد. در شرایط مرزی آزاد داریم:

$$[B_{00}^{ij} \quad D_{00}^{ij}] [B][U][A]^{-1}[\sinh(\lambda x)]\{K_i\} = 0 \quad (33)$$

$$[D_{11}^{ij} \quad (\frac{1}{R}D_{11}^{ij} + B_{11}^{ij})] [U][\cosh(\lambda x)]\{K_i\} = 0 \quad (34)$$

و با اعمال معادلات ۱۱ در شرایط مرزی گیردار خواهیم داشت:

$$[P_1][B][U][A]^{-1}[\sinh(\lambda x)]\{K_i\} = 0 \quad (35)$$

$$[P_1][U][\cosh(\lambda x)]\{K_i\} = [P_1][B]^{-1}\{F\} \quad (36)$$

که در معادلات ۳۴ و ۳۵، $[P_1]$ و $[P_2]$ عبارت‌اند از:

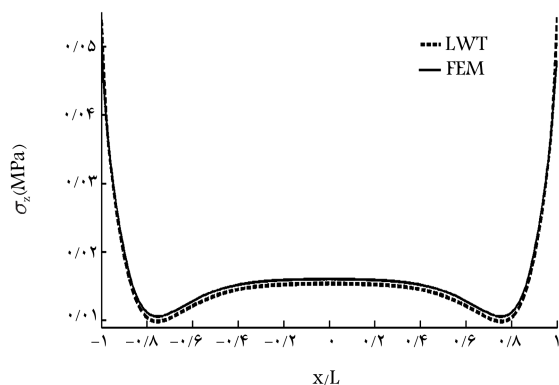
$$[P_1] = \begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} \quad (38)$$

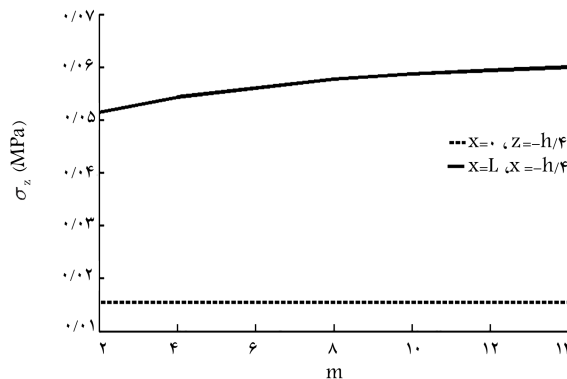
I ماتریس همانی $(N+1) \times (N+1)$ و O ماتریس صفر $(N+1) \times (N+1)$ است.

جدول ۱. خصوصیات مکانیکی مواد مورد استفاده در کامپوزیت هیبریدی. [۳۵]

نام ماده	$G_{12} = G_{13}$ Gpa	G_{23} Gp	E_1 Gpa	$E_2 = E_3$ GPa	$\nu_{12} = \nu_{13}$ ν_{23}
گرافیت	۴٫۷۹	۴٫۲۶	۱۳۶	۹٫۸	۰٫۲۸
اپوکسی	۲٫۲	۱٫۸	۸۰	۵٫۵	۰٫۳۴



شکل ۶. توزیع تنش میان‌لایه‌یی σ_z در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری در $[\theta_0/\theta_0]_s$ در $z = -\frac{h}{4}$.

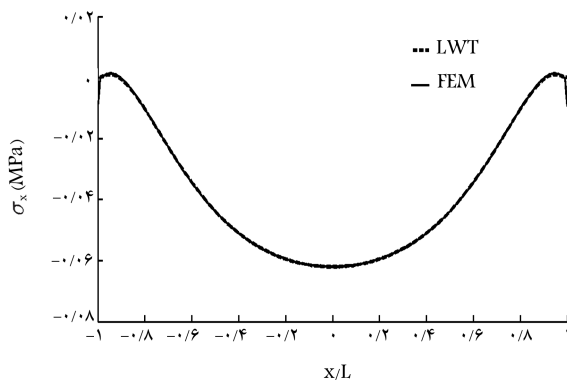


شکل ۴. تنش میان‌لایه‌یی σ_z در پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta_0/\theta_0]_s$ در نظریه‌ی لایه‌یی.

که نظریه‌ی لایه‌یی در مقایسه با نظریه‌ی اجزاء محدود با تعداد المان بسیار کم‌تر (حدود ۹٪ کم‌تر) قادر است تنش‌های میان‌لایه‌یی را پیش‌بینی کند. بنابراین برای افزایش دقت نتایج در روش اجزاء محدود از 240 المان در راستای ضخامت و در نظریه‌ی لایه‌یی از 48 لایه ریاضی در راستای ضخامت استفاده شده است.

تنش محوری σ_x ، در صفحه‌ی بین لایه‌یی $90/90$ در شکل ۵ نشان داده شده است. این نمودار نشان می‌دهد تنش‌های به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌یی و روش اجزاء محدود در نواحی دور از لبه‌های آزاد، انطباق دقیقی با یکدیگر دارند. در لبه‌های آزاد با توجه به این که انتظار می‌رود تنش درون صفحه‌یی σ_x دارای مقدار صفر باشد، نتیجه‌ی به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌یی مقدار دقیق‌تری را نشان می‌دهد و روش اجزاء محدود قادر به پیش‌بینی دقیق این مقدار نیست.

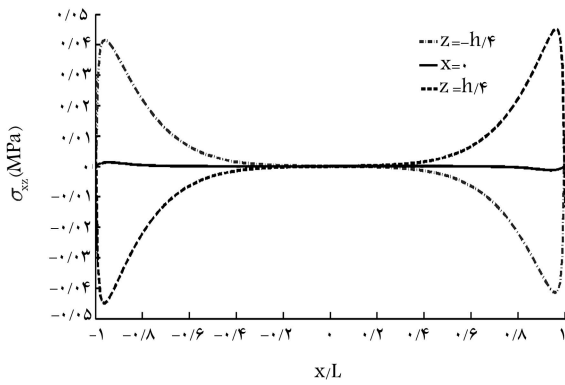
در شکل ۶ توزیع تنش میان‌لایه‌یی σ_z در صفحه‌ی بین دو لایه $0/90$ در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در نزدیکی لبه‌ی آزاد پوسته تنش میان‌لایه‌یی در ناحیه‌ی مرزی ناگهان افزایش یافته و تقریباً 4 برابر ناحیه‌ی دور از لبه‌ی آزاد می‌شود. همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود تغییرات تنش در فاصله‌یی تقریباً به اندازه‌ی ضخامت لایه‌ی پوسته‌ی مرکب ایجاد می‌شود. به همین علت معمولاً لایه‌ی مرزی تنش به اندازه‌ی ضخامت لایه‌ی پوسته‌ی استوانه‌یی دوار در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۷ توزیع تنش برشی σ_{xz} در راستای محوری پوسته نشان داده شده است. تغییر ناگهانی تنش برشی میان‌لایه‌یی در ناحیه‌ی مرزی مشاهده می‌شود. تنش بیشینه‌ی به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌یی در فاصله‌ی $x = 0/97L$ رخ می‌دهد و مقدار آن $0/29$ Mpa است. مقادیر تنش در نواحی دور از لایه‌ی مرزی در نظریه‌ی لایه‌یی و اجزاء محدود برابرند. در نواحی مرزی تنش برشی به دست آمده از نظریه‌ی لایه‌یی با مقدار تنش برشی محاسبه شده با اجزاء محدود متفاوت است. با توجه به شرایط مرزی پوسته‌ی استوانه‌یی، نظریه‌ی لایه‌یی برخلاف روش اجزاء محدود به خوبی می‌تواند تنش میان‌لایه‌یی برشی σ_{xz} را پیش‌بینی کند.



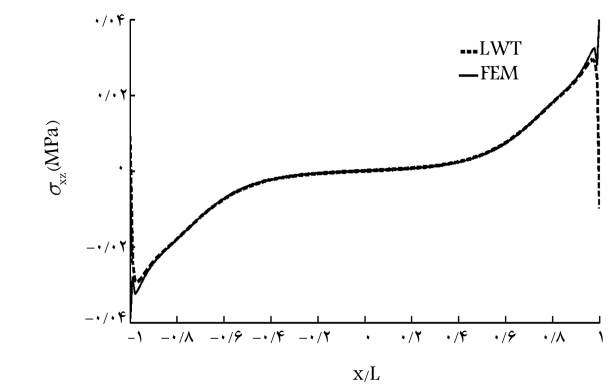
شکل ۵. توزیع تنش محوری σ_x در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta_0/\theta_0]_s$ در $z = 0$.

در $(z = -h/4, x = 0)$ هم‌گرایی بسیار سریع اتفاق می‌افتد ولی در $(x = L, z = -h/4)$ نرخ هم‌گرایی پایین است و با افزایش تعداد اجزاء تنش در این نقطه با افزایش تعداد اجزاء به آرامی افزایش می‌یابد. به علاوه، برای بررسی هم‌گرایی نظریه‌ی لایه‌یی تنش میان‌لایه‌یی σ_z برحسب افزایش تعداد لایه‌های عددی در هر لایه‌ی فیزیکی m در شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که رفتار مشابه با نمودار ۵ در این نمودار هم ملاحظه می‌شود. هم‌گرایی در تعداد لایه‌های عددی بسیار پایین‌تری اتفاق افتاده است.

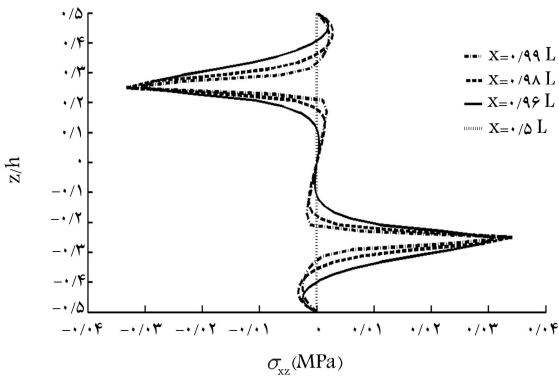
مقایسه‌ی شکل‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد که برای تنش میان‌لایه‌یی σ_z ، در هر دو روش در $x = 0$ ، به سرعت هم‌گرا شده و نتایج بسیار نزدیک به یکدیگر است؛ در هر دو روش تقریباً تنش‌ی برابر با $0/15$ Mpa محاسبه می‌شود. با نزدیک شدن به لبه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ی کامپوزیتی در $x=L$ (لبه)، روش اجزاء محدود با بیش از 100 المان در راستای ضخامت به هم‌گرایی می‌رسد، در حالی که نظریه‌ی لایه‌یی با حدود 12 لایه به نتیجه قابل قبولی می‌رسد. در شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود



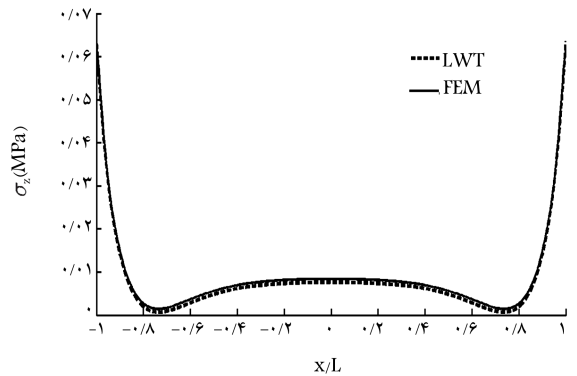
شکل ۱۰. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌ی σ_{zx} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌ی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در سطوح میان‌لایه‌ی.



شکل ۷. توزیع تنش برشی σ_{xz} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌ی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در $z = \frac{h}{4}$.



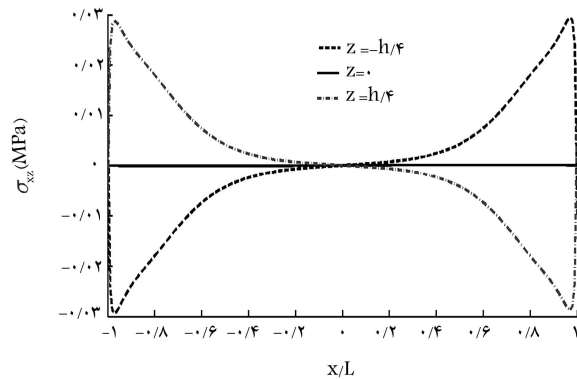
شکل ۱۱. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌ی σ_{zx} در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در نواحی مرزی.



شکل ۸. توزیع تنش σ_z در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌ی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در $z = \frac{h}{4}$.

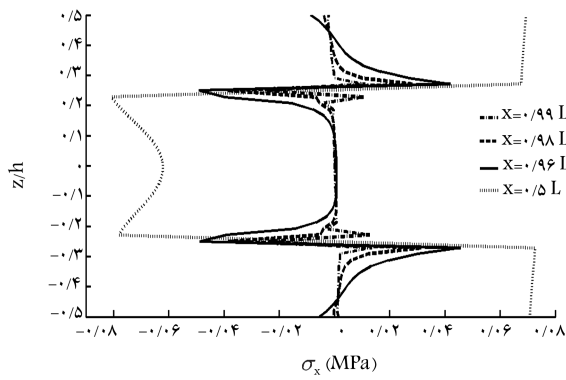
افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. این تغییرات در $x = 0.5L$ شروع شده و تا $x = L$ ادامه می‌یابد. بنابراین مشاهده می‌شود که ناحیه‌ی مرزی، تقریباً برابر با ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ی است. بیشترین مقدار تنش در دو سطح بین‌لایه‌ی $z = \frac{h}{4}$ و $z = -\frac{h}{4}$ قرینه‌ی یکدیگر بوده و از لحاظ اندازه با هم برابرند. مقایسه‌ی بیشترین مقدار تنش در دو لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ و $0^\circ/90^\circ$ نشان می‌دهد که این مقدار در لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ بیشتر از بیشینه تنش در لایه‌گذاری $0^\circ/90^\circ$ است. در حالتی که گرافیت اپوکسی به صورت محیطی لایه‌گذاری شود، تنش برشی کم‌تری در سطح میان‌لایه مشاهده می‌شود.

در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نیز شرایط مرزی با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی به خوبی ارضا شده و مقدار تنش برشی در لبه‌های آزاد صفر است. بیشینه تنش برشی در هر دو لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ و $0^\circ/90^\circ$ در سطوح بین‌لایه‌های با خواص مکانیکی و لایه‌گذاری متفاوت رخ می‌دهد. بیشترین مقدار تنش در لایه‌گذاری $0^\circ/90^\circ$ تقریباً برابر $0.5 MPa$ است در حالی که بیشینه تنش برشی به دست آمده در لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ تقریباً برابر $0.35 MPa$ است. دلیل این تفاوت اختلاف در لایه‌گذاری و مقاومت در برابر تنش برشی به علت تفاوت خواص مکانیکی است. توزیع تنش σ_z در ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ی $90^\circ/0^\circ$ در نزدیکی لبه آزاد در شکل ۱۳ نشان داده شده است. با نزدیک شدن به لبه پوسته تغییرات تنش σ_z شدت بیشتری دارد. با توجه به شکل ۱۳ تنش میان‌لایه‌ی در لایه‌ی صفر به صورت کششی و مثبت بوده و در لایه‌های 90° به صورت فشاری است. بیشترین مقدار تنش در $x = L$ و $z = 0.23h$ به اندازه‌ی $912 MPa$ است که این مقدار در مقایسه

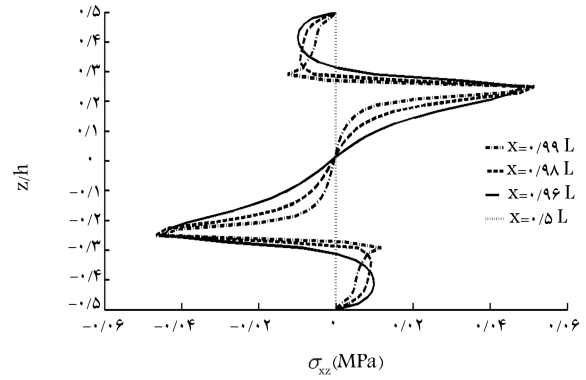


شکل ۹. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌ی σ_{zx} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌ی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در سطوح میان‌لایه‌ی.

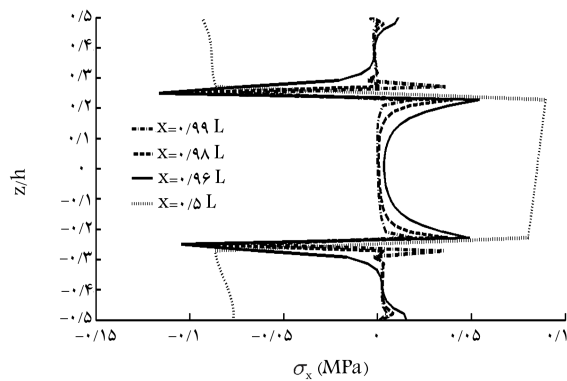
توزیع تنش میان‌لایه‌ی σ_z در راستای محور پوسته‌ی استوانه‌ی در شکل ۸ نشان داده شده است. مقایسه‌ی دو شکل ۵ و ۸ نشان می‌دهد که بیشترین مقدار به دست آمده برای تنش میان‌لایه‌ی σ_z در صفحه‌ی بین‌لایه‌ی $0/90^\circ$ ، تقریباً $0.1 MPa$ کم‌تر از بیشینه تنش میان‌لایه‌ی σ_z به دست آمده در وسط لایه‌ی صفر است. در شکل‌های ۹ و ۱۰ واضح است که به علت تفاوت لایه‌گذاری و اختلاف در خواص مکانیکی لایه‌ها، مقدار تنش در سطوح بین‌لایه‌های 0° و 90° (و $z = \frac{h}{4}$ و $z = -\frac{h}{4}$) در نزدیکی لبه‌ی آزاد افزایش یافته و در $x = 0.97L$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در ناحیه‌ی مرزی مقدار تنش برشی میان‌لایه‌ی σ_{zx} ناگهان



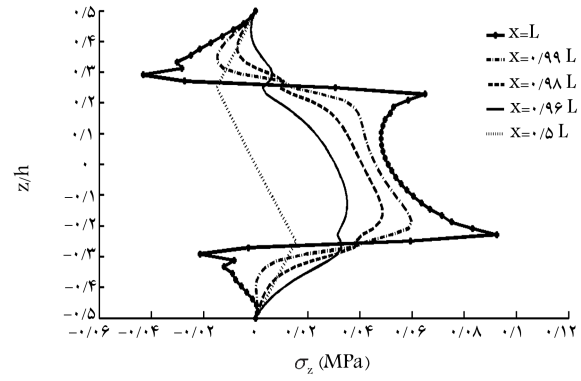
شکل ۱۵. توزیع تنش عمودی σ_x در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در نواحی مرزی.



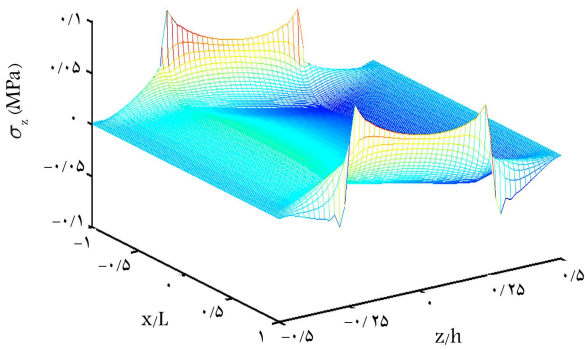
شکل ۱۲. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌یی σ_{zx} در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در نواحی مرزی.



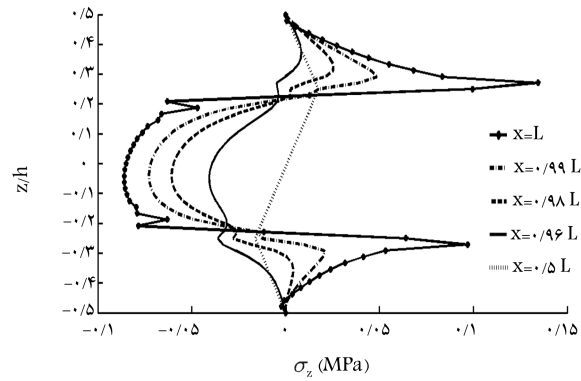
شکل ۱۶. توزیع تنش عمودی σ_x در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در نواحی مرزی.



شکل ۱۳. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌یی σ_z در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در نواحی مرزی.



شکل ۱۷. توزیع تنش میان‌لایه‌یی σ_z در راستای طول و ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$.



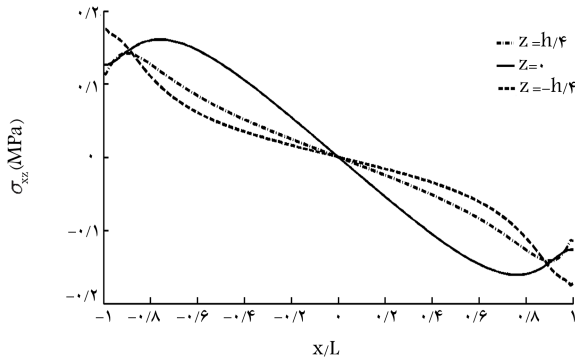
شکل ۱۴. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌یی σ_z در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در نواحی مرزی.

تنش در نواحی نزدیک لبه در سطح بین لایه‌ها در لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ بیشتر از بیشینه‌تنش σ_{zx} در لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ است.

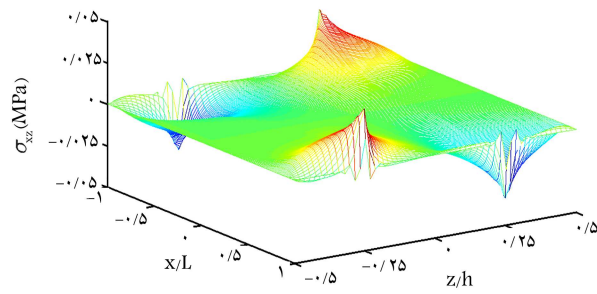
برای مشاهده‌ی بهتر تغییرات تنش و بررسی اثر لبه در پوسته‌ی استوانه‌یی شکل‌های ۱۷ و ۱۸ ترسیم شده است. در شکل ۱۷ تنش میان‌لایه‌یی σ_z تغییرات شدیدی در اطراف لبه نشان می‌دهد. در نواحی دور از لبه تغییرات تنش σ_z کاهش یافته و به مقدار صفر می‌رسد. این تنش در لایه‌ی 90° به علت استحکام بالای گرافیت اپوکسی نسبت به لایه‌ی صفر، تغییرات کم‌تری دارد. به علاوه تنش میان‌لایه‌یی σ_z در لایه 90° به صورت فشاری بوده و در سطح بین لایه 90° و صفر تغییر کرده و به

با وسط پوسته $(x = 0/5L)$ بسیار بیشتر است. در سطوح آزاد پوسته مقدار تنش به صفر می‌رسد که نشان‌دهنده‌ی دقت نظریه‌ی لایه‌یی در پیش‌بینی شرایط مرزی است. توزیع این تنش در لایه‌گذاری $[\theta/90]_s$ در شکل ۱۴ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود علاوه بر تغییر علامت تنش در لایه‌ها (کششی و فشاری بودن لایه‌ها)، بیشترین مقدار تنش نیز به علت تفاوت در خواص مکانیکی لایه‌ها و استحکام آن‌ها تغییر می‌کند.

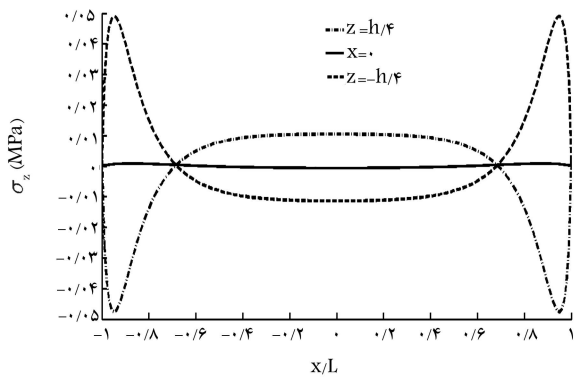
در شکل ۱۵ و ۱۶ توزیع تنش σ_x نسبت به ضخامت پوسته‌ی کامپوزیتی با لایه‌گذاری‌های $[\theta/90]_s$ و $[\theta/90]_s$ نشان داده شده است. بیشترین مقدار این



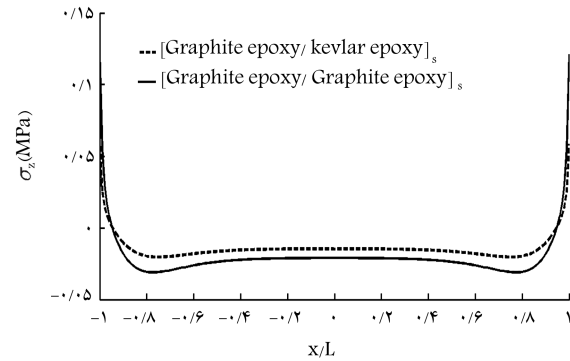
شکل ۱۸. توزیع سه‌بعدی تنش میان‌لایه‌یی σ_{zz} پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$.



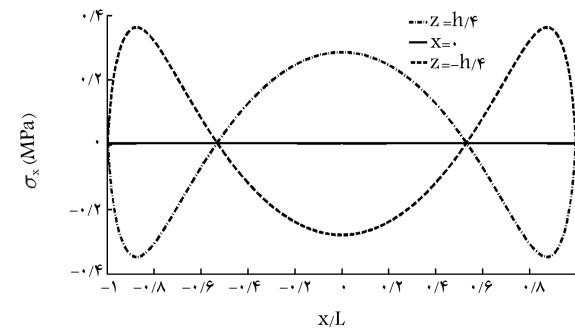
شکل ۲۱. توزیع تنش برشی میان‌لایه‌یی σ_{zx} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$ در سطوح بین‌لایه‌یی (شرایط مرزی گیردار).



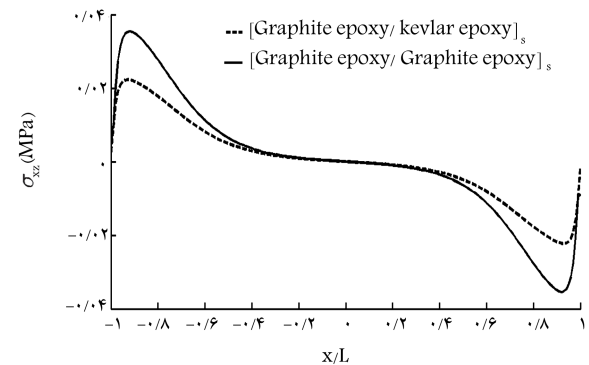
شکل ۱۹. توزیع تنش σ_z در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی $[Graphite\ epoxy/Kevlar\ epoxy]_s [Graphite\ epoxy/Graphite\ epoxy]_s$ با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$ در $z = \frac{h}{4}$.



شکل ۲۲. توزیع تنش میان‌لایه‌یی σ_z در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$ در سطوح بین‌لایه‌یی (شرایط مرزی گیردار).



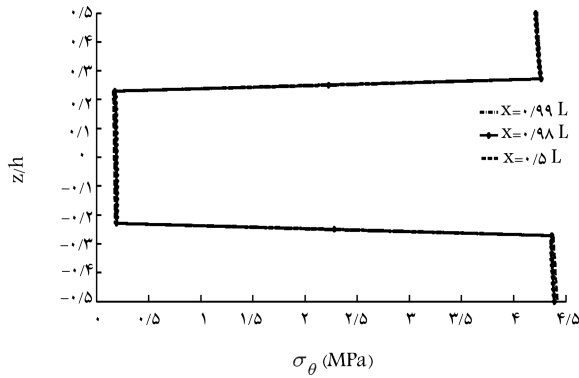
شکل ۲۰. توزیع تنش σ_{zx} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی $[Graphite\ epoxy/Kevlar\ epoxy]_s [Graphite\ epoxy/Graphite\ epoxy]_s$ با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$ در $z = \frac{h}{4}$.



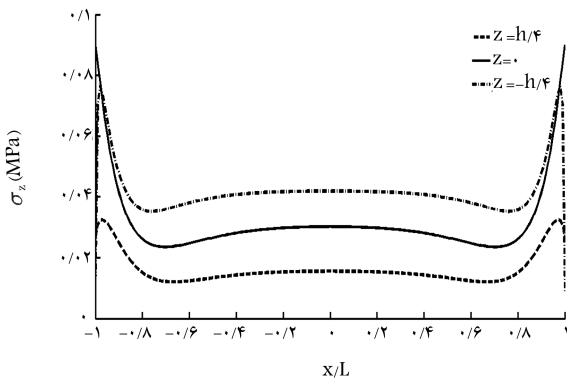
شکل ۲۳. توزیع تنش عمودی σ_x در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $[\circ/90]_s$ در سطوح بین‌لایه‌یی (شرایط مرزی گیردار).

شکل ۲۴. توزیع تنش σ_{zx} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی $[Graphite\ epoxy/Kevlar\ epoxy]_s$ در حدود 5° درصد در مقایسه با لایه‌گذاری غیر هیبریدی $[Graphite\ epoxy/Kevlar\ epoxy]_s$ کم‌تر است. شکل ۲۵ نیز نشان می‌دهد که تنش برشی میان‌لایه‌یی در کامپوزیت هیبریدی در مقایسه با کامپوزیت غیر هیبریدی در حدود 4° درصد کم‌تر است. بنابراین با توجه به اهمیت پدیده‌ی تورق و ارتباط این پدیده با تنش‌های میان‌لایه‌یی می‌توان با هیبریدی کردن لایه‌گذاری پوسته‌ی استوانه‌یی اثر تنش میان‌لایه‌یی را در ایجاد این پدیده که ممکن است منجر به شکست سازه کامپوزیتی شود، کمینه کرد. شرایط مرزی گیردار در شکل‌های ۲۱، ۲۲ و ۲۳ نشان داده شده است. در شکل ۲۱ تنش برشی σ_{zx} نسبت به طول پوسته‌ی استوانه‌یی نشان داده شده است.

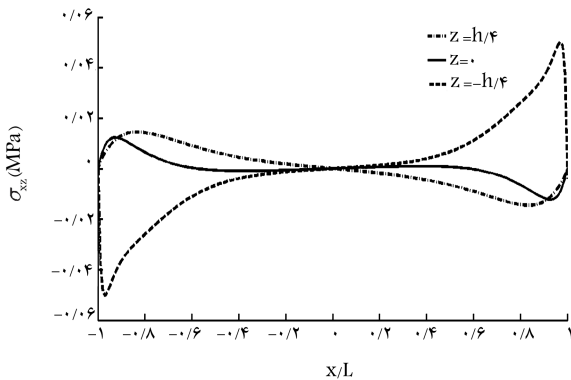
صورت کششی در لایه‌ی صفر در می‌آید. بیشترین مقدار تنش در سطوح بین لایه 0° و 90° رخ می‌دهد. در شکل ۱۸ تغییرات تنش برشی میان‌لایه‌یی σ_{zx} نشان داده شده است. تغییرات این تنش تنها در نواحی مرزی رخ می‌دهد. چنان که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار تنش برشی σ_{zx} در سطوح بین لایه‌یی وجود دارد و این مقدار به صورت کششی و فشاری با اندازه یکسان در دو لبه آزاد پوسته ایجاد شده است. در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ توزیع تنش در پوسته‌ی کامپوزیتی هیبریدی و غیر هیبریدی مقایسه شده است. با توجه به شکل ۱۹ مقدار تنش بین لایه‌یی σ_z در لبه‌های پوسته‌ی کامپوزیتی در لایه‌گذاری هیبریدی با لایه‌گذاری متقارن



شکل ۲۴. توزیع تنش محیطی σ_θ در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ در ناحیه مرزی.



شکل ۲۵. توزیع تنش بین لایه‌یی σ_z در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری نامتقارن $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ در سطح بین لایه‌یی.



شکل ۲۶. توزیع تنش برشی بین لایه‌یی σ_{zz} در راستای طول پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری نامتقارن $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ در سطح بین لایه‌یی.

تنش‌های به دست آمده در جهات x ، θ و z همان تنش‌ها در جهات اصلی‌اند. رابطه‌ی تنش‌های پوسته‌ی استوانه‌یی با سرعت دورانی این پوسته‌ها از مرتبه‌ی دو است. در نتیجه، رابطه‌ی عدد سای هیل با سرعت دورانی پوسته‌ی استوانه‌یی از مرتبه‌ی ۴ خواهد بود. با مقایسه‌ی بیشترین مقدار عدد سای هیل به دست آمده در سرعت ۲۰۰ هرتز مشاهده می‌شود بیشینه سرعت دورانی لازم برای بیشترین مقدار عدد سای هیل عبارت است از:

$$\frac{T_{sai} - Hill}{T_{sai} - Hill_{max}} = \left(\frac{\omega}{\omega_{max}}\right)^4 \quad (45)$$

در این حالت برخلاف شرایط مرزی آزاد میزان تنش برشی میان لایه‌یی در لایه‌ی میانی صفر، یا متقارن نیست. مقایسه‌ی شرایط مرزی گیردار و آزاد نشان می‌دهد مقدار تنش برشی σ_{xz} در شرایط گیردار بسیار بیشتر از شرایط مرزی آزاد است. تنش بین لایه‌یی σ_z در شکل ۲۲ نشان داده شده است. مقدار این تنش در سطح میانی پوسته صفر بوده و در سایر سطوح میان لایه‌یی تغییر می‌کند. در سطوح بین لایه‌یی 0° و 90° مقدار تنش σ_z متقارن بوده و در نزدیکی لبه به شدت افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار تنش بین لایه‌یی نسبت به نواحی دور از لبه حدوداً ۵ برابر بیشتر است. افزایش تنش در $x = 0.5L$ شروع شده و تا $x = 0.97L$ افزایش می‌یابد و سپس تا مقدار صفر کاهش می‌یابد.

در شکل ۲۳ تنش عمودی σ_x در راستای طول پوسته نشان داده شده است. مقدار این تنش در سطح میانی پوسته معادل صفر است. تغییرات تنش در سطوح بین لایه‌یی 0° و 90° متقارن و با علامت مخالف است. بیشترین مقدار تنش عمودی σ_x در شرایط مرزی گیردار $35 MPa$ است که در مقایسه با تنش‌های میان لایه‌یی بسیار بیشتر است.

توزیع تنش محیطی σ_θ نسبت به ضخامت پوسته در شکل ۲۴ نشان داده شده است. این تنش در نواحی مرزی و دور از لبه نشان داده شده، که با هم برابرند. مقدار این تنش در لایه‌ی 90° ، ۲۲ برابر تنش محیطی در لایه‌ی صفر است. توزیع تنش میان لایه‌یی σ_z در پوسته‌ی استوانه‌یی با لایه‌گذاری نامتقارن $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ در شکل ۲۵ نشان داده شده است. تأثیر لایه‌گذاری در تنش میان لایه‌یی σ_z از مقایسه‌ی شکل‌های ۲۵ و ۶ مشاهده می‌شود. بیشینه تنش σ_z در لایه‌گذاری نامتقارن در $z = \frac{h}{4}$ ، $z = -\frac{h}{4}$ و در لایه‌گذاری متقارن $55 MPa$ است. شکل ۲۶ نشان دهنده‌ی توزیع تنش برشی میان لایه‌یی است. مقدار تنش برشی میان لایه‌یی σ_{xz} در سطح‌های بین لایه‌یی $z = \frac{h}{4}$ و $z = -\frac{h}{4}$ دارای بیشترین مقدار $5 MPa$ است که این مقدار حدوداً ۵ برابر بیشترین مقدار تنش برشی σ_{xz} در سطح میانی پوسته‌ی استوانه‌یی است. با توجه به شکل ۲۶ و مقایسه‌ی آن با شکل ۷ مشاهده می‌شود که بیشینه‌ی تنش برشی میان لایه‌یی با تغییر لایه‌گذاری تغییر کرده است. برای به دست آوردن سرعت بحرانی پوسته‌ی استوانه‌یی دوار از نظریه‌ی سای هیل استفاده شده است. طبق معادله نظریه‌ی سای هیل، رابطه‌ی این عدد با تنش‌های کامپوزیت از مرتبه‌ی دو است.

$$T_{sai} - Hill = (G + H)\sigma_1^4 + (F + H)\sigma_2^4 + (F + G)\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_2 - 2F\sigma_1\sigma_2 + 2L\tau_{12}^4 + 2M\tau_{13}^4 + 2N\tau_{23}^4 \quad (39)$$

که در آن:

$$2N = \frac{1}{S^2} \quad (40)$$

$$2L = \frac{1}{Q^2} \quad (41)$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \quad (42)$$

$$2G = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \quad (43)$$

$$2F = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \quad (44)$$

در معادلات فوق X ، Y و Z به ترتیب استحکام نهایی در جهت x ، θ و z بوده و S و Q استحکام نهایی برشی‌اند. با توجه به متعامد بودن پوسته‌ی کامپوزیتی،

مرزی نظریه‌ی لایه‌ی دقت بیشتری در پیش‌بینی تنش‌های میان‌لایه‌ی دارد. تنش‌های بین‌لایه‌ی پیش‌بینی شده با نظریه‌ی لایه‌ی شرایط مرزی آزاد در سطح داخلی و خارجی پوسته‌ی هیبریدی را ارضا می‌کنند؛ و همین نشان‌گر دقت بالای این نظریه است. مقایسه‌ی مدل‌های گرافیت اپوکسی/کولار اپوکسی و گرافیت اپوکسی/گرافیت اپوکسی نشان داد هیبریدی شدن کامپوزیت در شرایطی که گرافیت اپوکسی در لایه‌ی محیطی قرار داشته باشد منجر به کاهش تنش‌های میان‌لایه‌ی شده و اثر آن بر تورق را کاهش می‌دهد. مقایسه‌ی لایه‌گذاری‌های مختلف نشان می‌دهد بیشترین مقدار تنش میان‌لایه‌ی عمودی و برشی در لایه‌گذاری $90^\circ/0^\circ$ به ترتیب حدود 91 MPa و 35 MPa است، در حالی که در لایه‌گذاری $0^\circ/90^\circ$ مقادیر تقریبی این تنش‌ها به ترتیب به 14 MPa و 5 MPa می‌رسد. در لایه‌گذاری غیرمقارن $90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ بیشترین تنش میان‌لایه‌ی σ_z ، تقریباً به 9 MPa می‌رسد و مقدار بیشترین تنش برشی در آن حدود 5 MPa است.

بنابراین با توجه به این که بیشترین مقدار عدد سای هیل معادل ۱ بوده و بیشینه عدد سای هیل به دست آمده در سرعت 200 هرتز معادل $0.34/0$ است، سرعت بحرانی دورانی پوسته‌ی استوانه‌ی برابر 828 هرتز خواهد بود.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله تنش‌های میان‌لایه‌ی در پوسته‌ی استوانه‌ی دوار کامپوزیتی هیبریدی با استفاده از نظریه‌ی LWT مورد بررسی قرار گرفت. اثرات لایه‌گذاری، جنس لایه‌ها و شرایط مرزی آزاد و گیردار بر تنش‌های درون‌صفحه‌ی و برون‌صفحه‌ی بحث شد. از روش اجزاء محدود برای بررسی و صحت‌گذاری نتایج نظریه‌ی لایه‌ی استفاده شده و مشاهده شد که نتایج اجزاء محدود و نظریه‌ی لایه‌ی تقریباً بر هم منطبق‌اند و در نواحی

پانوشته‌ها

1. laminated composite
2. delamination
3. interlaminar stresses
4. classic laminated theory
5. layerwise theory

منابع (References)

1. Puppo, A.H. and Evensen, H.A. "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress", *Journal of Composite Materials*, **4**(2), pp.204-220, (1970).
2. Hsu, P.W. and Herakovich, C.T. "Edge effects in angle-ply composite laminates", *Journal of Composite Materials*, **11**(4), pp. 422-428, (1977).
3. Pagano, N.J. "On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate", *Journal of Composite Materials*, **34**, pp 268-286, (1974).
4. Tang, S.A. "Boundary layer theory-part 1: laminated composites in plane stress", *Journal of Composite Materials*, **9**(1), pp.33-41, (1975).
5. Pipes, R.B. and Pagano, N.J. "Interlaminar stresses in composite laminates-An approximate elastic solution", *The American Society of Mechanical Engineers (ASME) Journal of Applied Mechanics*, **41**(3), pp. 668-672, (1974).
6. Waltz, T.L. and Vinson, J.R. "Interlaminar stresses in laminated cylindrical shells of composite materials", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal (AIAA)*, **14**(9), pp.1213-1218, (1976).
7. Başar, Y., Itskov, M. and Eckstein, A. "Composite laminates: nonlinear interlaminar stress analysis by multi-layer shell elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **185**(2), pp. 367-397, (2000).
8. Reddy, J.N. "A layerwise shell theory with applications to buckling and vibration of cross-ply laminated stiffened circular cylindrical shells", Virginia Polytechnic Institute and State University. (1992).
9. Kassapoglou, C. and Lagace, P.A. "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in compos-

- ite materials”, *Journal of Applied Mechanics*, **53**(4), pp. 744-750, (1986).
10. Tahani, M. and Nosier, A. “Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates”, *Materials & design*, **24**(8), pp. 647-658, (2003).
 11. Tahani, M. “Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories”, *Composite Structures*, **79**(4), pp. 535-547, (2007).
 12. Basar, Y. and Ding, Y. “Interlaminar stress analysis of composites: layer-wise shell finite elements including transverse strains”, *Composites Engineering*, **5**(5), pp. 485-499, (1995).
 13. Li, S.J. and Wang, X. “Analytic solution for interlaminar stresses in a multilaminated cylindrical shell under thermal and mechanical loads”, *International journal of solids and structures*, **29**(10), pp. 1293-1302, (1992).
 14. Afshin, M., Sadighi, M. and Shakeri, M. “Static analysis of cylindrical sandwich panels with a flexible core and laminated composite face sheets”, *Journal of Composite Materials*, **44**(12), pp. 1455-1476, (2010).
 15. Tahani, M. and Nosier, A. “Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates”, *Materials & design*, **24**(8), pp. 647-658, (2003).
 16. Nosier, A. and Bahrami, A. “Free-edge stresses in anti-symmetric angle-ply laminates in extension and torsion”, *International journal of solids and structures*, **43**(22), pp. 6800-6816, (2006).
 17. Miri, A.K. and Nosier, A. “Interlaminar Stresses in anti-symmetric angle-ply cylindrical shell panels”, *Composite Structures*, **93** (2), pp. 419-429, (2011).
 18. Nosier, A., Tahani, M., and Hamed, M. A., “Interlaminar Stress Analysis in a Rotating Composite Beam”, *Sharif Journal of Science & Technology*, **20**, pp. 24-31 (in Persian) (2002).
 19. Yazdani Sarvestani, H. and Naghashpour, A. “Investigation of through-thickness stresses in composite laminates using layerwise theory”, *International Journal of Engineering Mathematics*, **13**, (2013), <http://dx.doi.org/10.1155/2013/676743>
 20. Rezvani, M. and Ghasemi Ghalebahman, “Interlaminar stresses in symmetric cross-ply composite laminates using Layerwise theory”, *Modares Mechanical Engineering*, **14**(1), pp. 59-66, (in Persian) (2013).
 21. Hosseini kordkheili, S.A. and Naghdabadi, R. “Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk”, *Composite Structures*, **79**(4), pp. 508-516, (2007).
 22. Kouchakzadeh M. A., “Effect of delamination on the buckling of composite laminates under in-plane shear load”, *Sharif Journal of Science and Technology*, **26**, pp. 58-64, (in Persian) (2004).
 23. Yang, C., Chen, J. and Zhao, S. “The interlaminar stress of laminated composite under uniform axial deformation”, *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*, **3**(2), pp. 49-60, (2013).
 24. Khandelwal, R.P. and Chakrabarti, A. “Calculation of interlaminar shear stresses in laminated shallow shell panel using refined higher order shear deformation theory”, *Composite Structures*, **124**, pp. 272-282, (2015).
 25. Goswami, S and Becker, W “Analysis of sandwich plates with compressible core using layerwise refined plate theory and interface stress continuity”, *Journal of composite materials*, **50**(2), pp. 201-217, (2016).
 26. Ealias, J., Lalmoni, J.J.M. and Mattam, J.J. “Study of inter-laminar shear stress of composite structures”, *Int. J. Emerg. Technol. Adv. Eng.*, **3**(8), pp. 543-552, (2013).
 27. Yang, C, Chen, J and Zhao, S, “The interlaminar stress of laminated composite under uniform axial deformation”, *MNSMS*, **3**(2), pp. 49-60, (2013).
 28. M. Yazdani, M. Rezghi, M.R. Khalili, B. Moomivand. “Analysis of free edge stresses in a cross-ply composite plate by applying shooting method”, *Modares Mechanical Engineering*, **13**(9), pp. 1-11, (in persian) (2013).
 29. Tahani, M. and Nosier, A., “Stress Field Near the Edges of Balanced Symmetric Composite Laminates”, *Sharif Journal of Science & Technology*, **26**, pp. 10-18, 2005.
 30. Yas, M. H., Shakeri, M., Heshmati, M. and Mohammadi, S. “Layerwise finite element analysis of functionally graded cylindrical shell under dynamic load”, *Journal of mechanical science and technology*, **25**(3), pp. 597-604, (2011).
 31. Ahmadi, I. and Ataee, N. “Interlaminar and boundary layer stress analysis in thin cross-ply composite cylinders subjected to thermal loading for various boundary conditions”, *Modares Mechanical Engineering*, **16**(1), pp. 257-268, (in persian) (2016).
 32. Afshin, M. and Taheri-Behrooz, F. “Interlaminar stresses of laminated composite beams resting on elastic foundation subjected to transverse loading”, *Computational Materials Science*, **96**, pp. 439-447, (2015).
 33. Ayoubi, P. and Alibeigloo, A. “Three-dimensional transient analysis of FGM cylindrical shell subjected to thermal and mechanical loading”, *Journal of Thermal Stresses*, **40**, pp. 1-18, (2017).
 34. Heydarpour, Y., Malekzadeh, P., Golbahar Haghighi, M.R. and Vaghefi, M. “Thermoelastic analysis of rotating laminated functionally graded cylindrical shells using layerwise differential quadrature method”, *Acta Mechanica*, **223**(1), pp. 81-93, (2012).
 35. Herakovich, C. T. “The what and the why of fibrous composites”, *Mechanics of fibrous composites*, 1st Edn, Jhon Wiley & Sons, university of virginia, US, pp. 148-322 (1998).

$$A_{pq}^i = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \frac{d\Phi_i}{dz} dz \quad (46)$$

$$B_{pq}^i = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \Phi_i dz \quad (47)$$

$$A_{pq}^{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \frac{d\Phi_i}{dz} \frac{d\Phi_j}{dz} dz \quad (48)$$

$$B_{pq}^{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \Phi_i \frac{d\Phi_j}{dz} dz \quad (49)$$

$$D_{pq}^{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \Phi_i \Phi_j dz \quad (50)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} D_{\lambda\lambda}^{ij} & O \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} A_{\delta\delta}^{ij} & B_{\delta\delta}^{ji} - \frac{\lambda}{R} D_{\lambda r}^{ij} - B_{\lambda r}^{ij} \\ O & I \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} O & D_{\delta\delta}^{ij} \\ I & O \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} B_{\lambda r}^{ji} - B_{\delta\delta}^{ij} + \frac{\lambda}{R} D_{\lambda r}^{ij} & A_{rr}^{ij} + \frac{\lambda}{R r} D_{rr}^{ij} + \frac{\lambda}{R} (B_{rr}^{ij} + B_{rr}^{ji}) \\ I & O \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} O & D_{\delta\delta}^{ij} I & O \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} O \\ O \\ -R\omega^i \end{Bmatrix} \quad (53)$$