

# حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در رودخانه در حالت دوبعدی و غیرماندگار با لحاظ عبارت منبع دلخواه

Original Article

ندا مشهدگره (دانشجوی دکتری)

مهدی مظاهری\* (استادیار)

جمال محمد ولی سامانی (استاد)

دانشکده‌ی کشاورزی، گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

در این تحقیق حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در حالت دوبعدی به ازای فعالیت منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه‌ی محدود در کانال‌های روباز با استفاده از شیوه‌ی تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته به دست آمده است. به منظور ارزیابی حل، به مقایسه‌ی حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی به روش تابع گرین در دو مثال فرضی پرداخته‌ایم. در مثال اول، یک منبع آلاینده با الگوی زمانی به صورت تابع نمایی مرکب در نظر گرفته شد. در مثال دوم، دو منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای زمانی نامنظم لحاظ شد. نتایج حاصله حاکی از انطباق حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی به روش تابع گرین بوده و عملکرد مطلوب حل تحلیلی پیشنهادی را نشان می‌دهد. حل تحلیلی پیشنهادی قابلیت اتخاذ منابع آلاینده‌ی متعدد با الگوهای زمانی دلخواه را دارد و می‌توان از آن به عنوان راه حلی پایه‌یی برای صحت‌سنجی حل‌های عددی در حالت دوبعدی بهره‌مند شد.

واژگان کلیدی: معادله‌ی انتقال جرم، منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی، الگوهای زمانی دلخواه، روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته، دامنه‌ی محدود.

n.mashhadgarne@modares.ac.ir

m.mazaheri@modares.ac.ir

samani.j@modares.ac.ir

## ۱. مقدمه

معادله‌ی حاکم بر انتقال جرم در رودخانه‌ها، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش (ADRE) است. این معادله یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل جزئی است که از ترکیب معادله‌ی پیوستگی و قانون اول فیک<sup>۱</sup> به دست آمده و کاربردهای وسیعی در علوم آب، علوم جو، انتقال حرارت، مهندسی محیط زیست، مهندسی مکانیک، علوم خاک و مهندسی شیمی و نفت دارد. بنابراین راه حل تحلیلی یا عددی آن می‌تواند در راستای توضیح نحوه‌ی توزیع غلظت ماده‌ی آلوده‌کننده و رفتار آن در یک محیط باز مانند هوا، رودخانه و محیط متخلخل مؤثر واقع شود. همچنین محاسبه‌ی مقدار غلظت در نقاط مختلف و زمان‌های دلخواه را ممکن می‌سازد.<sup>[۱]</sup>

پاسخی از یک معادله‌ی دیفرانسیل را، که می‌توان آن را با هر درجه‌ی مطلوب از دقت، در هر مکان و زمان دلخواه، بدون تغییر در ساختار پاسخ تعیین کرد، «حل تحلیلی» گفته می‌شود.<sup>[۲]</sup> با توجه به انطباق اصول حل معادله‌ی انتقال جرم بر معادله‌ی حرارت، می‌توان از تکنیک‌های حل معادله‌ی انتقال حرارت برای حل معادله‌ی انتقال جرم نیز بهره جست. فرم کلی معادله‌ی انتقال آلودگی (انتقال جرم) در حالت دوبعدی و غیرماندگار، با فرض آن که آلاینده در معرض سه پدیده‌ی جابه‌جایی، پراکندگی و واکنش قرار دارد و با لحاظ عبارت منبع مطابق رابطه‌ی ۱ است:<sup>[۱]</sup>

منابع آبی موجود در سطح زمین عمدتاً از آب‌های سطحی و زیرزمینی تشکیل شده است. این منابع در معرض آلودگی توسط طیف گسترده‌یی از منابع آلاینده قرار دارند. تخلیه‌ی ناگهانی مواد آلوده‌کننده، پس‌آب‌های ناشی از فعالیت‌های صنعتی، هسته‌یی و کشاورزی و ضعف مدیریتی در کنترل منابع آلاینده از مصادیق فعالیت‌های انسانی است که منجر به تولید آلودگی شده است.<sup>[۱]</sup> به منظور پیش‌بینی نحوه‌ی توزیع زمانی و مکانی غلظت مواد آلاینده در رودخانه‌ها باید به حل معادلات دیفرانسیل جریان و انتقال جرم پرداخت. حل این معادلات در شرایطی که فرضیات ساده‌کننده در معادلات اعمال شود به صورت تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. مدل‌های تحلیلی ابزارهای بسیار با ارزشی به منظور صحت‌سنجی مدل‌های عددی، تعیین پارامترهای مؤثر بر فرایند انتقال جرم آلاینده، درک روشن‌تر از شرایط فیزیکی مسئله و بررسی دقیق نحوه‌ی انتقال املاح در محیط متخلخل یا جریانات سطحی هستند. اما به دلیل پیچیدگی رفتار واقعی یک سیستم در طبیعت و ورود پارامترهای بسیار زیادی که در حل مسئله دخیل‌اند، ارائه‌ی یک راه‌حل تحلیلی بسیار پیچیده و دشوار است.<sup>[۱]</sup>

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۶/۱۲، اصلاحیه ۱۳۹۸/۸/۱۲، پذیرش ۱۳۹۸/۹/۱۸

DOI:10.24200/J40.2019.54224.1527

و غیرماندگار در محیط متخلخل تعیین کردند. در این تحقیق شرط اولیه به صورت تابع مکانی ناگهانی در نظر گرفته شده و حل به ازای منابع آلایندهی نقطه‌یی و خطی با الگوی بارگذاری ناگهانی در حالت غیرماندگار و ماندگار به ترتیب در حالات دو و سه‌بعدی به دست آمد. ورتمن و همکاران<sup>[۱۳]</sup> حل تحلیلی معادله انتقال جرم برای لایه‌ی مرزی سیاره‌یی<sup>۸</sup> در حالت دوبعدی و ماندگار را با استفاده از تکنیک GITT به دست آوردند. آنها در این تحقیق سرعت و ضریب پراکندگی را ثابت، و عبارت منبع را صفر فرض کردند. همچنین شرط مرزی ورودی را شرط نوع اول با یک غلظت ثابت ورودی از مرز در نظر گرفتند. کاستا و همکاران<sup>[۱۴]</sup> حل تحلیلی معادله سه‌بعدی جابه‌جایی - پراکندگی در لایه‌ی مرزی سیاره‌یی را با استفاده از ترکیب تبدیل لاپلاس و تکنیک GITT انجام دادند. آنها در این تحقیق سرعت و ضریب پراکندگی را ثابت و عبارت منبع را معادل صفر در نظر گرفتند. نتایج به دست آمده از حل مذکور با داده‌های آزمایشگاهی موجود در سایر مقالات مقایسه شد. دیباروس و کوتا<sup>[۱۵]</sup> حل تحلیلی فرم دو و سه‌بعدی معادله جابه‌جایی - پراکندگی را در کانال‌ها و رودخانه‌ها در حالت ماندگار و مقطع منظم با استفاده از روش GITT ارائه دادند. آنها در این تحقیق در حالت دوبعدی فرم ماندگار معادله را با لحاظ عامل دیسپرز در جهت  $y$  و عامل جابه‌جایی در جهات  $x$  و  $y$  حل کردند. در حالت سه‌بعدی نیز عامل دیسپرز را در جهت  $y$  و  $z$  و عامل جابه‌جایی را در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  و نیز عبارت منبع در هر دو تحقیق را برابر صفر و شرایط مرزی در تمام قسمت‌ها را از نوع گرادبان صفر در نظر گرفتند. چن و همکاران<sup>[۱۷]</sup> حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال جرم در یک دامنه‌ی محدود مستطیلی در محیط متخلخل اشباع با جریان یکنواخت و یک‌سویه به موازات محور  $x$  و با فرض متغیر بودن ضرایب پخش در جهات  $x$  و  $y$  با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و تبدیل لاپلاس و تبدیل کسینوسی فوریه محدود به دست آوردند. گوالدو و همکاران<sup>[۱۸]</sup> به منظور بررسی دقیق نحوه‌ی انتشار آلودگی در جو، از روش GITT برای حل تحلیلی معادله انتقال جرم در حالت غیرماندگار و دامنه‌ی دوبعدی استفاده کردند. محققین در این تحقیق عبارت منبع را برابر صفر فرض کرده و غلظت ورودی به سیستم را از طریق فعالیت یک منبع آلودگی فعال ناگهانی ورودی از مرز در نظر گرفتند. کاسول و همکاران<sup>[۱۹]</sup> یک حل تحلیلی برای مسئله‌ی دوبعدی غیرماندگار انتشار آلودگی در جو، با استفاده از ترکیبی از دو روش GITT و تبدیل لاپلاس ارائه دادند. آنها در این تحقیق عبارت منبع را صفر فرض کرده و غلظت ورودی به جو را از طریق یک منبع آلاینده‌ی ناگهانی ورودی از مرز در نظر گرفتند. گوئررو و همکاران<sup>[۲۰]</sup> حل تحلیلی فرم سه‌بعدی معادله انتقال جرم در حالت ماندگار و غیرماندگار را با استفاده از تغییر متغیر و تکنیک GITT به دست آوردند؛ به این ترتیب که با استفاده از یک تغییر متغیر معادله اصلی را به معادله‌ی دیفیوژن تبدیل کرده و سپس با استفاده از تکنیک GITT به تعیین حل معادله اصلی پرداختند. آنها به منظور ارزیابی حل، در قالب دو مثال حل تحلیلی معادله انتقال جرم را در حالت یک‌بعدی ماندگار و غیرماندگار با لحاظ عبارت منبع برابر صفر تعیین کردند. چن و همکاران<sup>[۲۱]</sup> حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال جرم در سیستم مختصات استوانه‌یی و در دامنه‌ی دوبعدی را با استفاده از ترکیب تبدیل هنکل محدود و تکنیک GITT به دست آوردند. شرط مرزی بالادست از نوع اول و نوع سوم و عبارت منبع برابر صفر در نظر گرفته شد. یاداو و همکاران<sup>[۲۲]</sup> حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله انتقال جرم در حالت دوبعدی در دامنه‌ی محدود و محیط ایزوتروپ با جریان غیر ماندگار و ضرایب متغیر زمانی به صورت یک تابع زمانی سینوسی را با استفاده از تبدیل لاپلاس تعیین کردند. شرط اولیه در این تحقیق به صورت یک تابع مکانی نمایی افزایشی و عبارت منبع به صورت مقداری ثابت با الگوی زمانی سینوسی لحاظ شد.

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} = -\frac{\partial(huc)}{\partial x} - \frac{\partial(hvc)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) - khc \pm h\varphi(x, y, t) \quad (1)$$

که در آن  $t$  زمان،  $x$  و  $y$  مؤلفه‌های مکانی در امتداد طول و عرض کانال،  $u$  و  $v$  به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت طولی و عرضی  $(m/s)$ ،  $D_x$  و  $D_y$  به ترتیب ضریب پراکندگی طولی  $(m^2/s)$ ،  $k$  ثابت نرخ واکنش  $(s^{-1})$ ،  $h$  عمق جریان  $(m)$ ،  $c = c(x, y, t)$  تابع غلظت  $(kg/m^3)$  و  $\varphi(x, y, t)$  معرف چشمه<sup>۳</sup> یا چاهک<sup>۴</sup> است.

چنان که بیان شد، معادله انتقال جرم در رودخانه‌ها همان معادله انتقال آلودگی است. به دلیل سادگی استخراج حل تحلیلی معادله انتقال جرم در حالت یک‌بعدی، محققین بسیاری ترجیح داده‌اند حل معادله انتقال را برای این حالت ارائه دهند.<sup>[۷-۴]</sup> در حالت یک‌بعدی فرض می‌شود که ماده‌ی آلاینده در جهات عمقی و عرضی کاملاً اختلاط یابد؛ به عبارت دیگر توزیع غلظت در مقطع یکنواخت است و تغییرات غلظت تنها در جهت طولی اتفاق می‌افتد. این فرض تحت شرایطی مثل عریض بودن مقطع رودخانه و ناچیز بودن دبی منبع آلاینده در مقایسه با دبی رودخانه، ممکن است صادق نباشد.<sup>[۴]</sup> بنابراین به منظور تخمین دقیق رفتار و نحوه‌ی انتقال جرم ماده‌ی آلاینده به پایین دست، لازم است حل معادله‌ی مذکور در حالات چندبعدی نیز ارائه شود. علاوه بر این، به طور خاص عمق رودخانه‌های طبیعی در قیاس با عرض رودخانه ناچیز است؛ بنابراین اختلاط کامل عمقی بسیار زودتر از اختلاط عرضی صورت می‌گیرد و بر این اساس می‌توان از معادله‌ی دوبعدی میانگین‌گیری شده در عمق برای بررسی انتقال جرم ماده‌ی حل شده در چنین محیط‌هایی بهره گرفت. تاکنون روش‌های متفاوتی برای حل تحلیلی معادله انتقال جرم توسط محققین اتخاذ شده که از مهم‌ترین آنها می‌توان به روش تابع گرین<sup>۵</sup>، روش تبدیل‌های انتگرالی<sup>۶</sup> و روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته (GITT)<sup>۷</sup> اشاره کرد. السوردس و باترز<sup>[۸]</sup> حل تحلیلی فرم سه‌بعدی معادله انتقال جرم را در حالت ماندگار و با ضرایب ثابت در دامنه‌ی نیمه‌محدود محیط متخلخل با استفاده از روش تابع گرین به دست آوردند. آنها شرط مرزی بالادست را از نوع سوم در نظر گرفته و توزیع غلظت حاصل از یک تابع زمانی پله‌یی ورودی از بالادست را محاسبه کردند. آرال و همکاران<sup>[۹]</sup> نسبت به حل تحلیلی صورت دوبعدی معادله آلودگی، در دامنه‌ی نامحدود در محیط متخلخل با تکیه بر اصل برهم‌نهی اقدام کردند. همچنین عبارت منبع را به دو صورت منابع نقطه‌یی ناگهانی و منبع خطی پیوسته در نظر گرفته و شرط اولیه را نیز به صورت منبع نقطه‌یی با جرم مشخص و منابع خطی با غلظت مشخص در نظر گرفتند و حل نهایی را به صورت یک رابطه‌ی انتگرالی ارائه کردند.

در مطالعه‌ی بعدی<sup>[۱۰]</sup>، حل تحلیلی معادله انتقال جرم، در حالات یک، دو و سه‌بعدی با ضرایب ثابت در محیط متخلخل و برای انواع ترکیبات متفاوت شرایط مرزی با الگوهای ناگهانی، پیوسته و پله‌یی با استفاده از روش تابع گرین استخراج شد. همچنین عبارت منبع به صورت نقطه‌یی، خطی، صفحه‌یی و حجمی لحاظ شد. باشا<sup>[۱۱]</sup> نیز حل تحلیلی فرم یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی معادله انتقال جرم در رودخانه‌یی با سطح مقطع منشوری و دامنه‌ی نامحدود در امتداد طول و دامنه‌ی محدود در امتداد عرض را با استفاده از ترکیب روش تابع گرین و روش تصویری به دست آورد. او عبارت منبع را به صورت منابع خطی و صفحه‌یی با الگوی بارگذاری ناگهانی و نیز منبع خطی با الگوی تخلیه‌ی پیوسته با زمان در نظر گرفت. زوپوتو و نایت<sup>[۱۲]</sup> حل تحلیلی فرم دوبعدی و سه‌بعدی معادله انتقال جرم را در حالت ماندگار

۱ با غلظت ثابت (پیوسته) ورودی از یک منبع صفحه‌یی و نیز غلظت متغیر با زمان به صورت تابع نمایی از یک منبع صفحه‌یی با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آوردند.<sup>[۳۳]</sup> در ادامه به منظور ارزیابی راه حل، حل به ازای منبع خطی ورودی با الگوی زمانی پیوسته در حالت دوبعدی و نیز منبع نقطه‌یی با الگوی پیوسته در حالت یک‌بعدی از حل اصلی استخراج شد. یاداو و کومار<sup>[۳۴]</sup> حل تحلیلی فرم دوبعدی معادله‌ی انتقال جرم را در دامنه‌ی نیمه‌محدود به ازای شرط مرزی ورودی نوع ۱ با الگوی پله‌یی و با لحاظ شرط اولیه و منبع خارجی برابر مقدار ثابت با استفاده از تبدیل لاپلاس تعیین کردند. در این تحقیق سرعت، ضریب پخش، ثابت نرخ واکنش، ضریب تأخیر و عبارت منبع متغیر و به صورت حاصل ضرب یک تابع مکانی از درجه‌ی  $n$  در جهات  $x$  و  $y$  در یک تابع زمانی در نظر گرفته شدند. لازم به ذکر است که تابع زمانی به دو صورت تابع سینوسی و تابع نمایی کاهشی لحاظ شد. محققین این تحقیق در ابتدا با استفاده از تبدیل‌های مشخصی، معادله با ضرایب متغیر را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس به تعیین حل تحلیلی معادله پرداختند.

در تحقیق حاضر، حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در حالت دوبعدی و در دامنه‌ی محدود در کانال‌های روباز به ازای فعالیت منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی متعدد با الگوهای زمانی نامنظم با هم‌پوشانی زمانی، با استفاده از تکنیک انتگرالی تعمیم یافته (GITT) استخراج می‌شود. لازم به ذکر است که اکثر حل‌های تحلیلی استخراج شده برای معادله‌ی انتقال جرم برای مواردی است که عبارت منبع فقط شامل یک آلاینده با الگوی زمانی ساده نظیر الگوی زمانی ثابت باشد و برای مواردی که چندین منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای بارگذاری نامنظم در دامنه فعالیت می‌کنند وجود ندارد؛ در چنین شرایطی عموماً از مدل‌های عددی استفاده می‌شود. لذا استخراج حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی در حالت دوبعدی در دامنه‌ی محدود به ازای فعالیت منابع آلاینده‌ی چندگانه با الگوی زمانی دلخواه نوآوری این تحقیق است. استخراج حل تحلیلی در چنین شرایطی بسیار با ارزش بوده و می‌تواند مبنای صحت‌سنجی مدل‌های عددی قرار گیرد.

## ۲. مبانی نظری و روش حل

در این بخش ابتدا توضیحاتی در مورد منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی به همراه نمایش ریاضی آنها و نیز معرفی شیوه‌ی تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته و ارائه شده است. در ادامه مراحل استفاده از شیوه‌ی مذکور به منظور استخراج حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در حالت دوبعدی در دامنه‌ی محدود به ازای فعالیت منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی، تشریح می‌شود.

### ۱.۲. تعریف ریاضی منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی

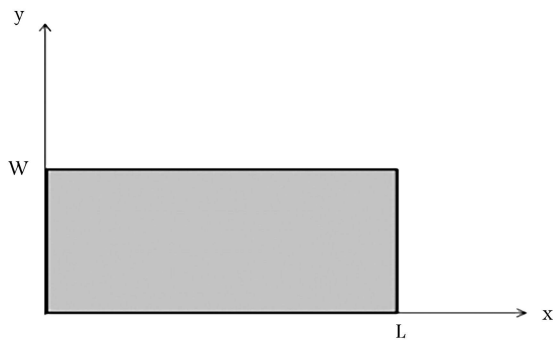
در حالت کلی «منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی» منبعی است که مساحت آن (مساحتی که تخلیه از آن صورت می‌گیرد) در مقایسه با مساحت محیطی که منبع در آن تخلیه می‌شود، بسیار ناچیز باشد به طوری که بتوان آن را به صورت یک نقطه در نظر گرفت.<sup>[۲]</sup> اگر منابع آلاینده‌ی مورد نظر در دامنه‌ی دوبعدی شامل  $n_s$  منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی باشد، می‌توان آنها را به صورت رابطه‌ی ریاضی ۲ نشان داد:<sup>[۳۵]</sup>

$$\phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{W_i(t)}{h} \delta(x - x_{s_i}) \delta(y - y_{s_i}) \quad (2)$$

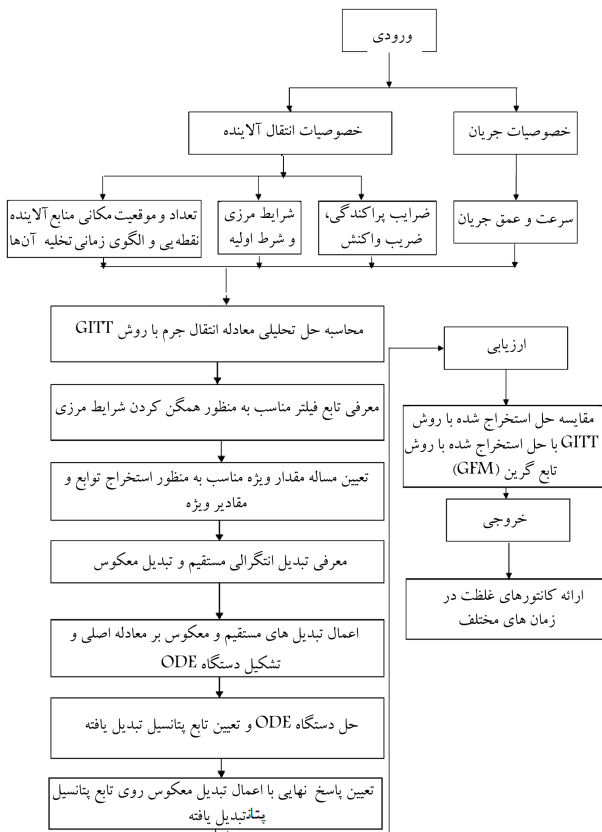
و نگناختن و همکاران<sup>[۵]</sup> حل معادله‌ی انتقال جرم را در حالت یک، دو و سه‌بعدی در دامنه‌ی محدود و نیمه‌محدود در رودخانه به ازای غلظت ورودی از مرز بالادست با الگوهای زمانی پیوسته، پله‌یی و نمایی و عبارت منبع با مقدار ثابت با استفاده از تبدیل لاپلاس استخراج کردند و با جمع‌بندی حل‌های حاصله یک مدل نرم‌افزاری آماده به نام ۳DADE را توسعه دادند. وادی و همکاران<sup>[۳۳]</sup> حل معادله‌ی انتقال جرم در حالت یک‌بعدی را در دامنه‌ی محدود و نیمه‌محدود در رودخانه به ازای شرط مرزی نوع ۱ در بالادست با غلظت ورودی با الگوی زمانی پیوسته و شرط مرزی نوع ۲ در پایین‌دست با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آوردند. مجتبی و دوید<sup>[۳۴]</sup> فرم یک‌بعدی معادله‌ی انتقال جرم را در دامنه‌ی محدود به ازای شرط اولیه به صورت تابع مکانی سینوسی، با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کرده و نتایج حاصل از حل تحلیلی را با نتایج مربوط به المان محدود مقایسه کردند. چن و همکاران<sup>[۲۵]</sup> حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم را در محیط متخلخل با تعداد بخش‌های دلخواه در حالت دوبعدی در دامنه‌ی محدود با استفاده از ترکیب روش GITT و تبدیل‌های انتگرالی لاپلاس و تبدیل کسینوسی فوری به دست آوردند. هبجان ساک<sup>[۳۶]</sup> حل تحلیلی فرم یک‌بعدی معادله‌ی انتقال جرم را در دامنه‌ی محدود در محیط متخلخل چندبخشی و به ازای شرط مرزی نوع ۳ در بالادست با ورودی به صورت تابع نمایی کاهشی و شرط مرزی نوع ۲ در پایین‌دست تعیین کرد. شرط اولیه در این تحقیق به صورت تابع مکانی - نمایی کاهشی در نظر گرفته شد. چن و همکاران<sup>[۲۷]</sup> یک روش کلی برای توسعه‌ی حل‌های تحلیلی جدید معادله‌ی انتقال جرم در حالت‌های یک، دو و سه‌بعدی با در نظر گرفتن انواع منابع آلاینده با هندسه‌های مشخص نظیر منابع آلاینده‌ی خطی نامنظم، منابع سطحی عمودی و افقی و دایره‌یی و منابع آلاینده‌ی حجمی با الگوهای زمانی ناگهانی و پیوسته معرفی کردند. چن و همکاران<sup>[۳۸]</sup> معادله‌ی انتقال جرم را در دامنه‌ی نیمه‌محدود در محیط متخلخل با استفاده از ترکیب تبدیل لاپلاس و روش GITT حل کردند. عبارت منبع در این تحقیق به صورت تابع دلتای دیراک، تابع هویساید، تابع نمایی کاهشی و تابع ثابت در نظر گرفته شد. مشهدگره و همکاران<sup>[۳۹]</sup> حل تحلیلی فرم غیرماندگار معادله‌ی انتقال جرم در حالت یک‌بعدی و دوبعدی با ضرایب ثابت را به ازای فعالیت چندین منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با استفاده از روش تابع گرین به دست آوردند. آنها در این تحقیق حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم را با در نظر گرفتن چندین منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای زمانی نامنظم تعیین کردند. کومار<sup>[۴۰]</sup> معادله‌ی انتقال جرم را در دامنه‌ی نیمه‌محدود در محیط متخلخل به ازای شرط مرزی نوع ۱ در بالادست با الگوی زمانی پیوسته و حل کردند. در این تحقیق ضریب پخش، سرعت، ضریب واکنش و عبارت منبع به صورت تابع زمانی سینوس هاینربولیک در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی حاصله نهایتاً با روش عددی مقایسه شد. کومار و سادھیندرا<sup>[۴۱]</sup> حل معادله‌ی انتقال جرم را با استفاده از ترکیب نظریه‌ی دوهمال و تبدیل لاپلاس و روش GITT در دامنه‌ی محدود با لحاظ شرط مرزی دیریشلت و رایبن در بالادست با تابع ورودی از مرز با الگوی زمانی نمایی کاهشی در محیط متخلخل به دست آوردند. موراندا و همکاران<sup>[۷]</sup> معادله‌ی انتقال جرم در حالت یک‌بعدی را در دامنه‌ی نیمه‌محدود با لحاظ شرط مرزی نوع ۱ و ۳ با ورودی به صورت تابع زمانی نمایی کاهشی و ترکیب تابع نمایی و تابع هویساید در محیط متخلخل با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کردند. سانسکریتیان و همکاران<sup>[۳۲]</sup> حل تحلیلی صورت دوبعدی معادله‌ی انتقال جرم در دامنه‌ی نامحدود در محیط متخلخل را با در نظر گرفتن عبارت منبع به صورت منابع نقطه‌یی با الگوهای زمانی ناگهانی و پیوسته را با روش تابع گرین تعیین کردند. محققین حل تحلیلی فرم سه‌بعدی معادله‌ی انتقال جرم با ضرایب متغیر زمانی در دامنه‌ی نیمه‌محدود را در محیط متخلخل با شرط مرزی نوع

به منظور تبیین بهتر روند استخراج حل تحلیلی، فلوجارت مربوط به الگوریتم استخراج حل تحلیلی معادله انتقال جرم در رودخانه با استفاده از روش GITT و ارزیابی آن در شکل ۲ نشان داده شده است:

با توجه به همگن بودن شرایط مرزی نیازی به تعریف تابع فیلتر برای حل معادله ۳ نیست.<sup>[۳۶]</sup> لذا اولین گام برای حل معادله انتقال جرم با ضرایب ثابت در حالت دوبعدی در این تحقیق، معرفی یک مسئله مقدار ویژه مشخص و تعیین مقادیر ویژه، توابع ویژه و نرم آنهاست. انتخاب مسئله مقدار ویژه مهم‌ترین مرحله در حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش GITT است که با حل آن مقادیر ویژه و توابع ویژه مناسب استخراج شده و براساس آن تبدیل‌های مستقیم و معکوس مربوط به روش GITT تعریف می‌شود. در واقع حل تحلیلی نهایی در روش GITT به صورت بسط تابع ویژه حاصل از مسئله مقدار ویژه



شکل ۱. دامنه‌ی حل فرم دوبعدی معادله انتقال جرم.



شکل ۲. فلوجارت روند استخراج حل تحلیلی با روش GITT.

که در آن  $W_i(t)$  مقدار جرم آلاینده در واحد زمان  $(kg/s)$ ،  $h$  عمق کانال،  $x_{s1}$  و  $y_{s1}$  موقعیت مکانی منابع آلاینده نقطه‌یی در دامنه است.

### ۲.۲. معرفی روش تبدیل انتگرالی تعمیم یافته

روش GITT یک روش بسیار قوی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرهمگن است. مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های تحلیلی، توانایی‌اش در پیچیده‌تر نظر گرفتن معادله دیفرانسیل جزئی، شرایط مرزی، دامنه‌ی حل و توانایی اعمال منابع متنوع آلودگی است.<sup>[۳۶]</sup> این روش امکان کنترل خطا را برای کاربر فراهم آورده و در عین حال عملکرد محاسباتی بسیار خوبی در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن نظیر معادله انتقال جرم از خود نشان می‌دهد.<sup>[۳۷]</sup> اساس روش GITT بر توابع ویژه حاصل از مسئله مقدار ویژه کمی مناسب استوار است. ایده اصلی این روش، تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی اصلی به یک سیستم نامتناهی از معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۹</sup> است که حل آنها نسبت به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن اولیه با سهولت بیشتری همراه است. گام‌های اصلی در اعمال روش GITT عبارت است از:<sup>[۳۶،۳۷]</sup>

۱. انتخاب یک تابع فیلتر مناسب به منظور همگن کردن شرایط مرزی؛
۲. تعیین مسئله مقدار ویژه مناسب به عنوان مسئله کمی به منظور استخراج توابع ویژه مناسب؛
۳. معرفی تبدیل انتگرالی مستقیم و تبدیل معکوس؛
۴. اعمال تبدیل‌های مستقیم<sup>۱۰</sup> و معکوس<sup>۱۱</sup> بر معادله دیفرانسیل به دست آمده از مرحله اول و بهره‌گیری از خاصیت تعامد<sup>۱۲</sup> توابع ویژه و نرم<sup>۱۳</sup> توابع؛
۵. تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نهایی و حل آن؛
۶. تعیین پاسخ مسئله اصلی با استفاده از تبدیل معکوس.

در ادامه، مراحل روش GITT به منظور استخراج حل تحلیلی معادله انتقال جرم در حالت دوبعدی در مجاری روباز به ازای فعالیت هم‌زمان چندین منبع آلاینده نقطه‌یی با الگوهای زمانی دلخواه، به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

### ۳.۲. حل تحلیلی معادله انتقال جرم با لحاظ منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی چندگانه با الگوهای زمانی دلخواه

فرم کلی معادله انتقال جرم با فرض ثابت بودن ضرایب و منابع آلاینده نقطه‌یی متعدد (به تعداد  $n_s$ ) با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه مستطیلی مطابق با شکل ۱ به طول  $L$  و عرض  $W$  به صورت رابطه ۳ است:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - kc + \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{n_s} W_l(t) \delta(x - x_{s_l}) \delta(y - y_{s_l}) \quad (3)$$

که در آن، عبارت  $\delta(\cdot)$  تابع دلتای دیراک است. شرط اولیه و شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای معادله ۳ عبارت است از:

$$IC : c(x, y, 0) = 0$$

$$BC : \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq W \end{cases} \Rightarrow c(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial c(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=W} = 0 \quad (4)$$

تأخر مشتق، انتگرال و سیگما، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy = \\ & -u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & -v \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & +D_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & +D_y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & -k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \int_0^W \int_0^L (\tilde{\Omega}_{m,n}(x,y)) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \\ & + \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{n_s} \int_0^W \int_0^L W_l(t) \delta(x-x_{s_l}) \delta(y-y_{s_l}) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy \quad (10) \end{aligned}$$

با باز کردن مشتقات تحت انتگرال، استفاده از خاصیت انتقال تابع دلتای دیراک و خاصیت تعامد، دستگاه ODE نهایی به صورت رابطه ۱۱ حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{c}_{i,j}(t)}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{i,j,m,n} \bar{c}_{m,n}(t) = G_{i,j}(t) , \\ & \Gamma_{i,j,m,n} = A_{i,j,m,n} + B_{i,j,m,n} + C_{i,j,i,j} + D_{i,j,i,j} + E_{i,j,i,j} \quad (11) \end{aligned}$$

که در آن ضرایب دستگاه و ثابت آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} A_{i,j,m,n} &= \frac{u}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \left( \frac{2m-1}{2L} \pi \right) \\ & \cdot \int_0^W \int_0^L \cos\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \\ & \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \\ B_{i,j,m,n} &= -\frac{v}{LW} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \left( \frac{n-1}{W} \pi \right) \\ & \cdot \int_0^W \int_0^L \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \sin\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \cdot \sin\left(\frac{2i-1}{2L} \pi x\right) \\ & \cos\left(\frac{j-1}{W} \pi y\right) dx dy \\ C_{i,j,i,j} &= D_x \left( \frac{2i-1}{2L} \pi \right)^2 \\ D_{i,j,i,j} &= D_y \left( \frac{(j-1)\pi}{W} \right)^2 \\ E_{i,j,i,j} &= k \end{aligned}$$

متناسب با مسئله اصلی است. [۳۷] مسئله مقدار ویژه باید بیشینه اطلاعات مربوط به رفتار متغیرهای مکانی و اپراتورهای مکانی مسئله اصلی را در بر داشته و شامل اطلاعاتی در مورد محیط مورد مطالعه باشد. همچنین باید بر اساس اپراتورهای خودالحاقی<sup>۱۴</sup> نوشته شده و دارای پاسخ تحلیلی باشد. علت اهمیت این موضوع آن است که استفاده از اپراتور خودالحاقی برای نوشتن مسئله مقدار ویژه، ویژگی های مهمی را برای توابع و مقادیر ویژه حاصله در بر دارد که عبارت است از: [۳۸]

- توابع ویژه حاصل از مسئله مقدار ویژه با اپراتورهای دیفرانسیلی خودالحاقی متعامدند.
- مقادیر ویژه نامتناهی و اکیداً صعودی هستند.
- مجموعه حاصل از توابع ویژه یک مجموعه کامل خواهد بود؛ بدین معنا که هر تابع دلخواهی را بر اساس بسط فوری، می توان برحسب توابع ویژه انتخابی از آن مجموعه کامل نوشت. [۳۶]

مسئله مقدار ویژه انتخابی متناسب با معادله ۳ به همراه شرایط مرزی همگن عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(x,y)}{\partial y^2} + (\mu_{m,n}^2 - k) \Omega_{m,n}(x,y) = 0 \\ & BCs : \begin{cases} \Omega_{m,n}(0,y) = 0, & \frac{\partial \Omega_{m,n}(L,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Omega_{m,n}(x,0)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \Omega_{m,n}(x,W)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

که در آن  $\Omega(x,y)$  تابع ویژه و  $\mu$  مقدار ویژه است. حل مسئله مقدار ویژه رابطه ۵ با استفاده از روش جداسازی متغیرها امکان پذیر است. لذا توابع ویژه عبارت خواهند بود از:

$$\begin{aligned} & \Omega_{m,n}(x,y) = \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right), \\ & \begin{cases} m = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

به منظور محاسبه ی تابع ویژه و نرمال شده باید نرم تابع ویژه را محاسبه کرد. نرم تابع ویژه و تابع ویژه نرمال شده نیز به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} N_{m,n} &= \int_0^W \int_0^L \Omega_{m,n}^2(x,y) dx dy = \frac{LW}{4}, \\ \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) &= \frac{\Omega_{m,n}(x,y)}{\sqrt{N_{m,n}}}, \\ \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{LW}} \sin\left(\frac{2m-1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n-1}{W} \pi y\right) \quad (7) \end{aligned}$$

گام بعدی معرفی تبدیل مستقیم و معکوس انتگرالی است که به ترتیب عبارتند از: [۳۸]

$$\bar{c}_{m,n}(t) = \int_0^W \int_0^L c(x,y,t) \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) dx dy \quad (8)$$

$$c(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \tilde{\Omega}_{m,n}(x,y) \quad (9)$$

با جایگذاری  $c(x,y,t)$  از رابطه ۹ در معادله ۳ و ضرب طرفین معادله به ازای یک  $i$  و  $j$  مشخص در  $\int_0^W \int_0^L (\cdot) \tilde{\Omega}_{i,j}(x,y) dx dy$  و استفاده از قوانین تقدم و

۱.۳. مثال اول: عبارت منبع به صورت یک منبع آلایندهی فعال در

دامنه‌ی با الگوی زمانی ضابطه‌مند

در این مثال حل تحلیلی استخراج شده به منظور تعیین توزیع و انتشار غلظت ناشی از یک منبع آلاینده در یک نقطه‌ی مشخص در داخل دامنه مورد استفاده قرار گرفته و عملکرد آن از طریق مقایسه‌ی نتایج مربوط به نتایج حل تحلیلی با روش GFM مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که موقعیت مکانی منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی در دامنه و نمودار الگوی زمانی تخلیه‌ی  $(W(t))$  آن در این مثال مطابق شکل ۳ است:

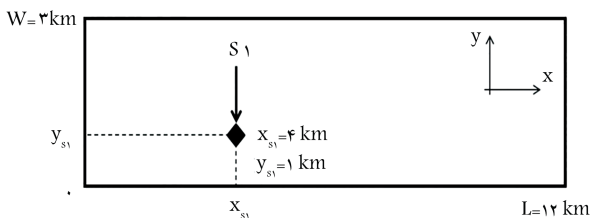
$x_{s1}$  و  $y_{s1}$  مختصات مکانی مربوط به تخلیه منبع آلاینده در دامنه است.

ضابطه‌ی مربوط به الگوی زمانی تخلیه مطابق رابطه‌ی ۱۵ است:

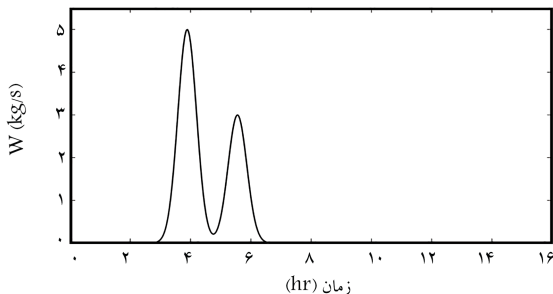
$$W(t) = \delta \exp\left(-\gamma \frac{(t - 14000)^2}{\delta \times 10^6}\right) + \beta \exp\left(-\gamma \frac{(t - 20000)^2}{\delta \times 10^6}\right) \quad (15)$$

مشخصات جریان و انتقال آلاینده و ابعاد دامنه در مثال اول، در جدول ۱ بیان شده است:

نتایج حاصل از مقایسه‌ی حل تحلیلی GITT با حل تحلیلی GFM به صورت کانتورهای غلظت در میدان سرعت در دامنه در شکل ۴ ارائه شده است. لازم به ذکر است که کانتورهای غلظت بیانگر توزیع غلظت در کل دامنه در یک زمان مشخص است. در شکل ۴، خطوط کانتور رنگی مربوط به نتایج حاصل از حل تحلیلی GITT، خطوط کانتور خط‌چین نتایج حاصل از حل تحلیلی GFM و خطوط برداری مربوط به میدان سرعت برآیند در دامنه هستند. در شکل ۴ (الف) ۱، ب ۱، ج ۱ و د ۱) مربوط به نحوه‌ی حرکت و انتشار ابر آلودگی با استفاده از هر دو حل تحلیلی در کل دامنه در زمان‌های ۹، ۸، ۷ و ۱۰ ساعت است. در شکل ۴ (الف) ۲، ب ۲، ج ۲ و د ۲) به ترتیب متناظر با آنها به منظور نمایش بهتر مقادیر غلظت خطوط کانتور بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب و مقایسه‌ی حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی GFM است.



الف) موقعیت مکانی منابع آلاینده در دامنه؛



ب) الگوی زمانی تخلیه منابع آلاینده در مثال اول.

شکل ۳. مشخصات منبع آلاینده در مثال اول.

$$G_{i,j}(t) = \frac{\gamma}{h\sqrt{LW}} \sum_{l=1}^{n_s} W_l(t) \sin\left(\frac{\gamma l - 1}{2L} \pi x_{s1}\right) \cos\left(\frac{j - 1}{W} \pi y_{s1}\right) \quad (12)$$

$i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N$

با توجه به رابطه‌ی ۱۲، ضرایب  $D, C, E$  با اعمال خاصیت تعامد به دست آمده‌اند. با توجه به فرم دستگاه ODE رابطه‌ی ۱۱، تعداد کل معادلات ODE برابر با  $M \times N$  خواهد بود که  $M$  و  $N$  حدود بالای سیگما هستند. به این ترتیب معادله‌ی دیفرانسیل جزئی اصلی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد که تنها متغیر مستقل آن  $t$  (زمان) است و حل آن به مراتب ساده‌تر از حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی است. به منظور حل دستگاه ODE حاصله به شرط اولیه‌ی تبدیل یافته نیاز است. لذا باید شرط اولیه‌ی معادله‌ی ۶ را با توجه به تبدیل مستقیم روش GITT به فرم تبدیل شده درآورد. فرم تبدیل یافته‌ی شرط اولیه  $(\bar{c}_{i,j}(0))$  عبارت است از:

$$\bar{c}_{i,j}(0) = \int_0^W \int_0^L c(x, y, 0) \tilde{\Omega}_{i,j}(x, y) dx dy \quad (13)$$

که با توجه به صفر بودن شرط اولیه در این مسئله،  $\bar{c}_{i,j}(0)$  برابر صفر خواهد بود. در این تحقیق دستگاه ODE نهایی رابطه‌ی ۱۱ با استفاده از روش‌های عددی حل شد. پاسخ در حقیقت بردار مجهولات  $(\bar{c}_{m,n}(t))$  خواهد بود و نهایتاً با اعمال معکوس تبدیل انتگرالی از رابطه‌ی ۹،  $c(x, y, t)$  تعیین خواهد شد.

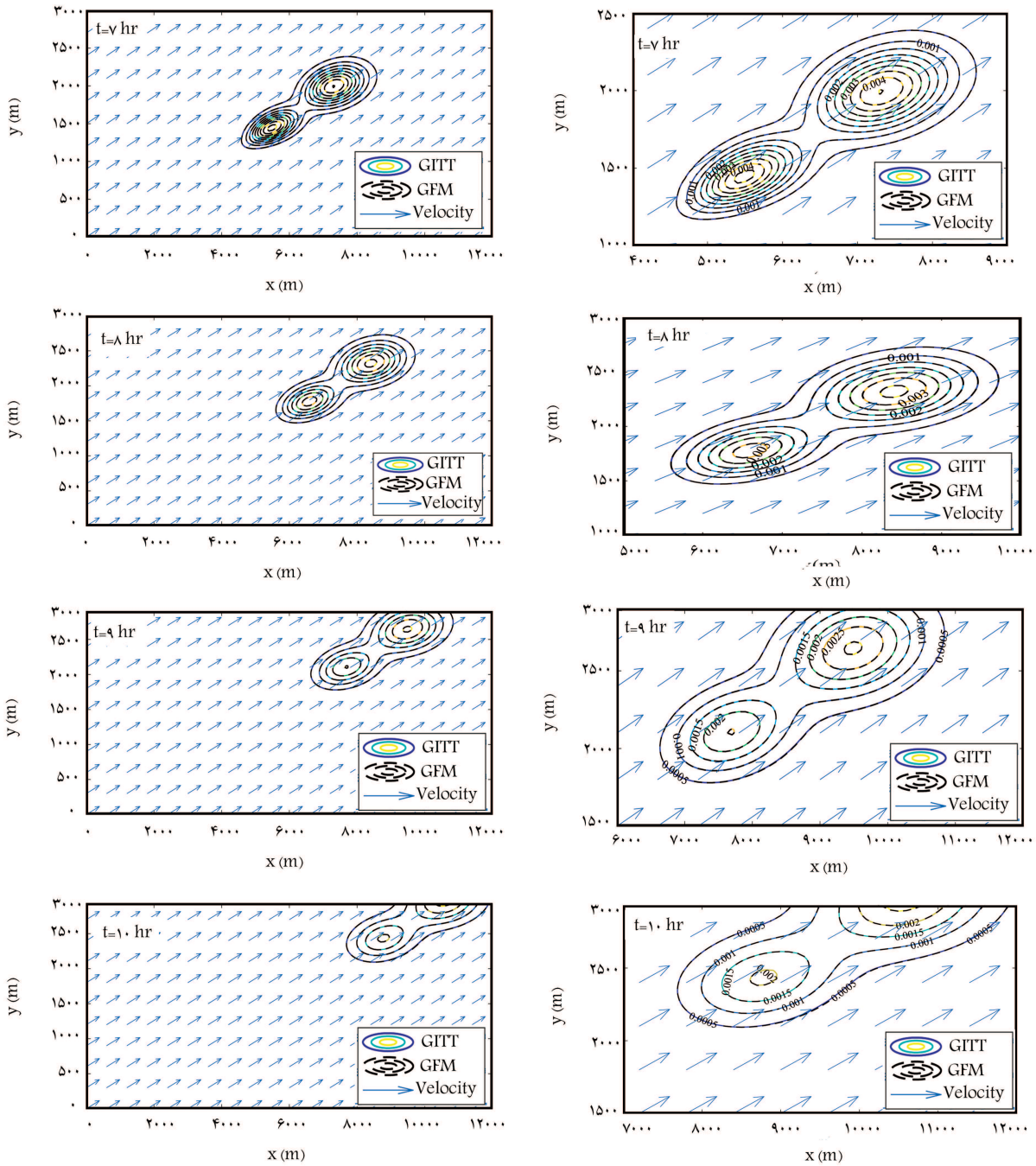
$$c(x, y, t) = \frac{\gamma}{\sqrt{LW}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{m,n}(t) \cdot \sin\left(\frac{\gamma m - 1}{2L} \pi x\right) \cos\left(\frac{n - 1}{W} \pi y\right), \quad (14)$$

$$\begin{cases} m = 1, 2, \dots, M \\ n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

در ادامه حل تحلیلی استخراج شده مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج حاصله با حل تحلیلی حاصل از روش تابع گرین (GFM) در دامنه‌ی دوبعدی مقایسه شده و نتایج در قالب کانتورهای غلظت ارائه خواهد شد.

### ۳. بحث و نتایج

به منظور ارزیابی حل تحلیلی استخراج شده با استفاده از روش GITT، نتایج در قالب دو مثال فرضی مجزا با استفاده از حل تحلیلی پیشنهادی و حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در حالت دوبعدی با استفاده از روش تابع گرین [۳۹، ۴۰] استخراج شده است. در مثال اول فعالیت یک منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوی زمانی تخلیه به صورت یک ضابطه‌ی مشخص در یک دامنه‌ی دوبعدی در نظر گرفته شده و نتایج حل به روش GITT با حل تحلیلی به روش GFM مقایسه شد. در مثال دوم دو منبع آلاینده با الگوهای زمانی دلخواه در دو نقطه‌ی متفاوت در دامنه‌ی دوبعدی در نظر گرفته شده و مجدداً نتایج حاصله از هر دو روش GITT و GFM با یکدیگر مقایسه شد. لازم به ذکر است که در این تحقیق غلظت ورودی از شرط مرزی و شرط اولیه صفر لحاظ شده و هدف بررسی توزیع آلودگی ناشی از منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی فعال در داخل دامنه‌ی دوبعدی است. در ادامه شرایط و خصوصیات جریان برای هر دو مثال به تفکیک بیان و نتایج ارائه خواهد شد.



شکل ۴. کانتورهای غلظت مربوط به مقایسه حل تحلیلی GITT با حل تحلیلی GFM در زمانهای ۷، ۸، ۹ و ۱۰ ساعت در مثال اول.

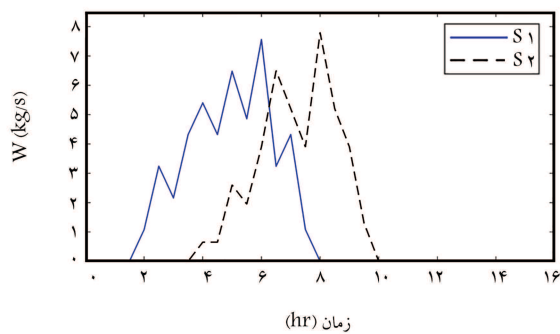
جدول ۱. مقادیر مربوط به پارامترهای جریان و انتقال آلاینده در مثال اول.

$L$	$W$	$u$	$v$	$h$	$Dx$	$Dy$
(km)	(km)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m <sup>2</sup> /s)	(m <sup>2</sup> /s)
۱۲	۳	۰/۳	۰/۰۹	۵	۱۰	۱

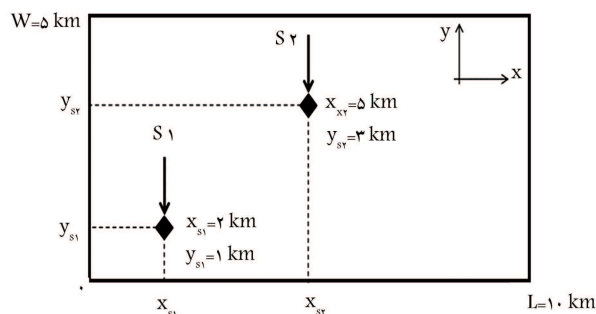
آمد که بیانگر انطباق کامل نتایج حل تحلیلی پیشنهادی و حل تحلیلی GFM است. یادآور می‌شویم که خطای ناچیز به دست آمده به علت محدودیت نرم‌افزار محاسباتی در اتخاذ تعداد ارقام اعشاری (تا ۱۶ رقم اعشار) در فرایند محاسبات است. با دقت در شکل ۴، (الف تا د، ابر آلودگی با گذشت زمان از ۷ ساعت

مطابق شکل ۴، کانتورهای غلظت حاصل از حل تحلیلی با GITT در این تحقیق با حل تحلیلی GFM کاملاً برهم منطبق‌اند؛ این امر نشان‌گر عملکرد مطلوب حل تحلیلی پیشنهادی است. همچنین شاخص‌های آماری ضریب همبستگی ( $R^2$ ) برابر با ۱ و میانگین خطای نسبی (MRE) برابر با ۰/۵ درصد به دست





ب) الگوی زمانی تخلیه منابع آلاینده در مثال دوم.



الف) موقعیت مکانی منابع آلاینده در دامنه؛

شکل ۵. مشخصات منابع آلاینده در مثال دوم.

جدول ۲. مقادیر مربوط به پارامترهای جریان و انتقال آلاینده در مثال دوم.

$L$ (km)	$W$ (kg/s)	$u$ (m/s)	$v$ (m/s)	$h$ (m)	$D_{\infty}$ (m <sup>2</sup> /s)	$D_y$ (m <sup>2</sup> /s)
۱۰	۵	۰٫۳	۰٫۱	۵	۱۰	۱

بر یکدیگر منطبق اند و این امر نشان دهنده رضایت بخش بودن عملکرد حل تحلیلی استخراج شده در این تحقیق در مدل سازی تحلیلی توزیع و انتشار غلظت ناشی از منابع آلاینده نقطه‌یی متعدد با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه محدود و دوبعدی است. شاخص‌های آماری ضریب همبستگی ( $R^2$ ) برابر ۱ و میانگین خطای نسبی (MRE) برابر ۰٫۷ درصد به دست آمد که تطابق کامل هر دو حل تحلیلی را نشان می‌دهد. یادآور می‌شود نامنظم بودن الگوی زمانی مربوط به بارگذاری منابع آلاینده نقطه‌یی بدان معناست که ضابطه‌ی ریاضی مشخصی برای الگوی بارگذاری وجود ندارد. لذا حل تحلیلی پیشنهادی انعطاف پذیر است و قابلیت بالایی در اتخاذ الگوهای بارگذاری دلخواه دارد. با دقت در کانتورهای غلظت حاصله شکل ۶ می‌توان دریافت که در ساعت ۱۰ شکل الف ۱، بلافاصله بعد از اتمام بارگذاری غلظت از هر دو منبع آلاینده در دامنه، گرادیان غلظت در محیط بالاست. مطابق با کانتورهای غلظت نشان داده شده در شکل ۶، به تدریج با گذشت زمان از ۱۰ ساعت تا ۱۵ ساعت (شکل‌های ۶ الف تا ۶ د)، کانتورهای غلظت در اثر عامل پخشیدگی در جهت طولی و عرضی در محیط دچار افت مقدار غلظت شده و ابر آلودگی در محیط پخش شده و در جهت بردارهای سرعت برآیند حرکت می‌کند و به تدریج گرادیان غلظت در محیط آفند کاهش می‌یابد تا این که نهایتاً از محیط خارج می‌شود. مطابق شکل ۶، کانتورهای غلظت در ساعت ۱۴ و ساعت ۱۵ (شکل‌های ۶ ج و ۶ د) به تدریج در حال خارج شدن از دامنه هستند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

انتشار آلودگی در منابع آب‌های سطحی و زیرزمینی که اخیراً به یکی از مهم‌ترین مشکلات زیست‌محیطی مبدل شده، با استفاده از معادله‌ی انتقال جرم مورد بررسی قرار می‌گیرد. حل‌های تحلیلی به منظور درک بهتر ماهیت فیزیکی مسئله، تخمین پارامترهای مؤثر در فرایند انتقال جرم، ارائه‌ی حل دقیق و صریح و نیز صحت‌سنجی حل‌های عددی با محبوبیت همراه‌اند. اما هرچه فیزیک مسئله به شرایط واقعی نزدیک‌تر می‌شود استخراج حل‌های تحلیلی بسیار سخت و در

تا ۱۰ ساعت در اثر پدیده‌ی جابه‌جایی ناشی از سرعت، در جهت بردار سرعت برآیند در دامنه حرکت کرده و تحت تأثیر پدیده پراکندگی ابر آلودگی در محیط بازر شده و مقادیر خطوط کانتور و به تبع آن گرادیان غلظت در محیط بعد از اتمام زمان بارگذاری کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که میزان بازشدگی ابر آلودگی با توجه به بیشتر بودن ضریب پخش در جهت طولی بیشتر از بازشدگی آن در جهت عرضی است.

#### ۲.۳. مثال دوم: عبارت منبع به صورت دو منبع آلاینده‌ی فعال در

##### دامنه‌ی با الگوهای زمانی نامنظم

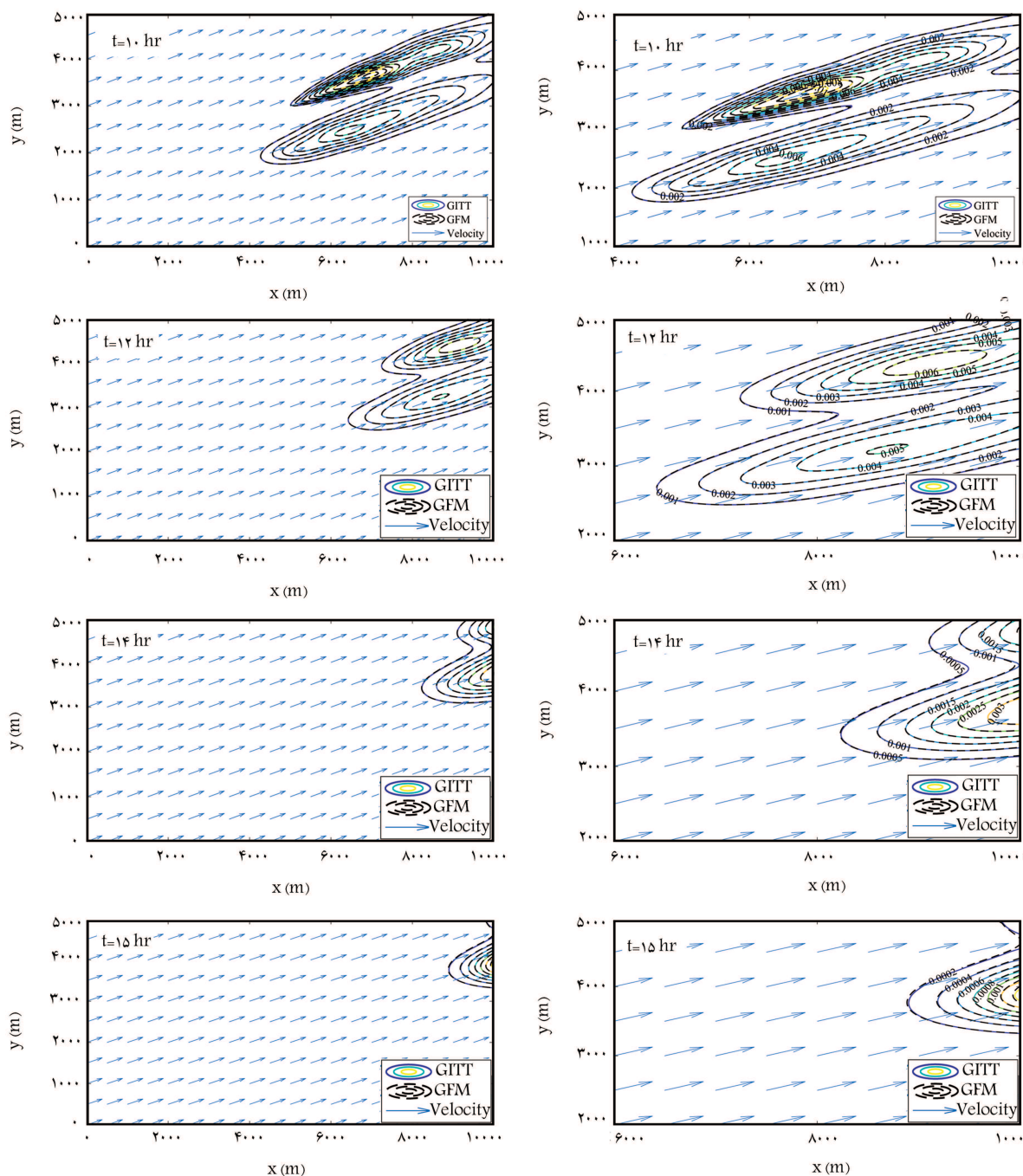
در این مثال، دو منبع آلاینده نقطه‌یی با الگوهای زمانی بارگذاری نامنظم در دو نقطه مجزا در دامنه‌ی در نظر گرفته‌ایم. در ادامه به منظور ارزیابی عملکرد حل تحلیلی پیشنهادی، نتایج حاصل از آن با حل تحلیلی GFM مقایسه شده و کانتورهای غلظت در زمان‌های مختلف استخراج و ارائه شده است. موقعیت مکانی مربوط به دو منبع آلاینده نقطه‌یی در دامنه و نیز الگوهای زمانی مربوط به هر یک از آنها در شکل ۵ ارائه شده است.

همچنین مقادیر مربوط به ابعاد دامنه، پارامترهای جریان و انتقال آلاینده مطابق با جدول ۲ است:

نتایج حاصل از مقایسه‌ی حل تحلیلی پیشنهادی با حل تحلیلی GFM به صورت کانتورهای غلظت در زمان‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵ ساعت در شکل ۶ ارائه شده است. همان‌طور که پیشتر بیان شد، به طور مشابه خطوط کانتور رنگی نتایج حل تحلیلی با GITT، خطوط کانتور خط چین مربوط به نتایج حل تحلیلی GFM و خطوط برداری بیانگر میدان سرعت برآیند هستند. همچنین شکل‌های ۶ الف ۱، ۶ ج ۱ و ۶ د ۱ بیانگر توزیع و انتشار کانتورهای غلظت در کل دامنه است و شکل‌های ۶ الف ۲، ۶ ج ۲ و ۶ د ۲ به ترتیب به صورت نظیر به نظیر، به منظور نمایش واضح‌تر مقادیر غلظت خطوط کانتور و نیز مقایسه‌ی میزان انطباق هر دو راه‌حل ارائه شده است.

مطابق شکل ۶، نتایج حاصل از حل تحلیلی با GITT و حل تحلیلی GFM





شکل ۶. کانتورهای غلظت مربوط به مقایسه‌ی حل تحلیلی GITT با حل تحلیلی GFM در مثال دوم در زمان‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۵ ساعت در مثال دوم.

حالاتی عموماً از حل‌های عددی استفاده می‌شود. در واقع استخراج حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم برای چنین شرایط پیچیده‌ی نوعی نوآوری در این تحقیق است. به منظور ارزیابی حل تحلیلی حاصله، دو مثال فرضی مجزا تعریف شد و نتایج حاصل از حل تحلیلی استخراج شده با روش GITT با حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم با استفاده از GFM مقایسه شد؛ و نتایج در قالب کانتورهای غلظت در زمان‌های متفاوت ارائه شد. در مثال اول عبارت منبع شامل تنها یک منبع آلاینده با الگوی زمانی ضابطه‌مند (به صورت یک تابع زمانی نمایی مرکب) در نظر گرفته شد. در مثال دوم عبارت منبع شامل دو منبع آلاینده در دو نقطه با فاصله از یکدیگر در دامنه و با الگوهای بارگذاری نامنظم در نظر گرفته شد. در هر دو مثال شاخص‌های

مواردی غیرممکن می‌شود. روش GITT یک روش بسیار قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن است. این روش بر پایه‌ی انتخاب مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی مناسب استوار است و هدف آن تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی به یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی است که حل آن به مراتب ساده‌تر است. در این تحقیق، حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در حالت دوبعدی به ازای فعالیت منابع آلاینده‌ی نقطه‌ی متعدد با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه‌ی محدود در کانال‌های روباز، با استفاده از روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته (GITT) به دست آمد. گفتنی است برای چنین حالات پیچیده‌ی حل تحلیلی وجود ندارد و برای چنین

حل تحلیلی حاصل از GFM است. به این ترتیب حل تحلیلی استخراج شده با روش GITT قابلیت اتخاذ هر تعداد منبع آلایندهی نقطه‌یی با الگوهای زمانی دلخواه را دارد و می‌توان از آن به عنوان یک حل تحلیلی مینا در دامنه‌ی دوبعدی محدود، به منظور صحت‌سنجی حل‌های عددی بهره جست.

آماری ضریب همبستگی ( $R^2$ ) و درصد میانگین خطای نسبی (MRE) محاسبه شد. ضریب همبستگی برابر با ۱ و میانگین خطای نسبی نیز کم‌تر از ۷ درصد به دست آمد. مقادیر حاصل از شاخص‌های آماری و مطابقت کانتورهای غلظت نشان‌دهنده‌ی انطباق کامل حل تحلیلی حاصل از GITT در تحقیق حاضر و

### پانوشتها

1. advection-dispersion-reaction equation (ADRE)
2. First Ficks Law
3. source
4. sink
5. Green's function method (GFM)
6. integral transform technique (ITT)
7. generalized integral transform technique (GITT)
8. planetary boundary layer (PBL)
9. ordinary differential equation (ODE)
10. forward transform
11. inverse transform
12. orthogonality
13. norm
14. self-adjoint

### منابع (References)

1. Batu, V., *Applied flow and solute transport modeling in aquifers: fundamental principles and analytical and numerical methods*. 2005: CRC Press.
2. Chapra, S.C., *Surface water-quality modeling*. Waveland (1997) press.
3. Craig, J.R. and Read, W. W. "The future of analytical solution methods for groundwater flow and transport simulation", *XVIII International Conference on Water Resources* (2010). McGraw-Hill New York (1997).
4. Guerrero, J.P., et al., "Analytical solutions of the one-dimensional advection-dispersion solute transport equation subject to time-dependent boundary conditions", *Chemical engineering journal*, **221** pp. 487-491 (2013).
5. van Genuchten, M.T., et al. "Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation", *Journal of Hydrology Hydromechanics*, **61**(2) pp. 146-160 (2013).
6. Yadav, R. and Roy, J.J. "One-dimensional solute transport in a homogenous porous media with pulse type input source", *International Journal of Mathematical*. **8**(12), pp.228-237 (2017).
7. Moranda, A., Cianci, R. and Paladino, O. J. "Analytical solutions of one-dimensional contaminant transport in soils with source production-decay", *Soil Systems*, **2**(3), pp. 40 (2008).
8. Ellsworth, T. and Butters, G. J. "Three-dimensional analytical solutions to the advection-dispersion equation in arbitrary Cartesian coordinates", *Water resources research*, **29**(9), pp. 3215-3225 (1993).
9. Aral, M.M. and Liao, B. "Analytical solutions for two-dimensional transport equation with time-dependent dispersion coefficients", *Journal of Hydrologic Engineering*, **1**(1), pp. 20-32 (1996).
10. Yeh, G.T., AT123D: Analytical transient one-, two-, and three-dimensional simulation of waste transport in the aquifer system. Oak Ridge National Lab., TN USA (1981).
11. Basha, H. "Analytical model of two-dimensional dispersion in laterally nonuniform axial velocity distributions", *Journal of Hydraulic Engineering*, **123**(10), pp. 853-862 (1997).
12. Zoppou, C. and Knight, J. J. "Analytical solution of a spatially variable coefficient advection-diffusion equation in up to three dimensions", *Applied Mathematical Modelling*, 1999. **23**(9), pp. 667-685 (1999).
13. Wortmann, S., et al. "A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL", *Atmospheric Environment*, **39**(12),: pp. 2171-2178 (2005).
14. Costa, C., et al. "Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer", *Atmospheric Environment*, **40**(29), pp. 5659-5669 (2006).
15. De Barros, F., Mills, W. and R.J. Cotta, R. J. "Integral transform solution of a two-dimensional model for contaminant dispersion in rivers and channels with spatially variable coefficients", *Environmental Modelling Software*, **21**(5), pp. 699-709 (2006).
16. de Barros, F.P. and Cotta, R.M.J. "Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels", *Applied Mathematical Modelling*, **31**(12), pp. 2719-2732 (2007).
17. Chen, J.S., Ni, C.F. and Liang, C.P. "Analytical power series solutions to the two-dimensional advection-dispersion equation with distance-dependent dispersivities", *Hydrological Processes: An International Journal*, **22**(24), pp. 4670-4678 (2008).
18. de Almeida, G.L., et al., "Integral transform solutions for atmospheric pollutant dispersion", *Environmental Modelling*, **13**(1), pp. 53-65 (2008).
19. Cassol, M., Wortmann, S. and Rizza, U. "Analytic modeling of two-dimensional transient atmospheric pollutant dispersion by double GITT and Laplace Transform techniques", *Environmental Modelling Software*, **24**(1), pp. 144-151 (2009).

20. Guerrero, J.P., et al. "Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique", *International Journal of Heat Mass Transfer*, **52**(13-14), pp. 3297-3304 (2009).
21. Chen, J.-S., et al. "Analytical solutions to two-dimensional advection-dispersion equation in cylindrical coordinates in finite domain subject to first-and third-type inlet boundary conditions", *Journal of Hydrology*, **405**(3-4), pp. 522-531 (2011).
22. Yadav, R. and Jaiswal, D.K.J. "Two-dimensional solute transport for periodic flow in isotropic porous media: an analytical solution", *Hydrological Processes: An International Journal*, **26**(22), pp. 3425-3433 (2012).
23. Wadi, A.S., Dimian, M.F. and Ibrahim, F.N.J. "Analytical solutions for one-dimensional advection-dispersion equation of the pollutant concentration", *Journal of earth system science*, **123**(6), pp. 1317-1324 (2014).
24. Mojtabi, A. and Deville, M.O.J. "One-dimensional linear advection-diffusion equation: Analytical and finite element solutions", *Computers Fluids*, **107**, pp. 189-195 (2015).
25. Chen, J.-S., et al. "An analytical model for simulating two-dimensional multispecies plume migration", *Hydrology Earth System Sciences*, **20**(2), pp. 733-753 (2016).
26. Suk, H.J. "Generalized semi-analytical solutions to multispecies transport equation coupled with sequential first-order reaction network with spatially or temporally variable transport and decay coefficients", *Advances in water resources*, **94**, pp. 412-423 (2016).
27. Chen, K., Zhan, H. and Zhou, R. "Subsurface solute transport with one-, two-, and three-dimensional arbitrary shape sources", *Journal of contaminant hydrology*, **190**, pp. 44-57 (2016).
28. Chen, J.-S., et al. "Analytical model for advective-dispersive transport involving flexible boundary inputs, initial distributions and zero-order productions", *Journal of Hydrology*, **554**, pp. 187-199 (2017).
29. Mashhadgarme, N., Mazaheri, M. and Mohammad-Vali Samani, J. "Analytical solutions to one- and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method", *Sharif Journal of Civil Engineering*, **33-2**, pp. 77-91 (2017).
30. Kumar, L.K. "An analytical approach for one-dimensional advection-diffusion equation with temporally dependent variable coefficients of hyperbolic function in semi-infinite porous domain", *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, **4**(6), pp.1454-1460 (2017).
31. Kumar, P. and Sudheendra, S.J. "Mathematical solution of transport of pollutant in unsaturated porous media with retardation factor", *International Journal of Applied Engineering Research*, **13**(1), pp. 100-104 (2018).
32. Sanskritayn, A. et al. "Analytical solution of two-dimensional advection-dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green's function method", *Environmental Fluid Mechanics*, **18**(3), pp. 739-757 (2018).
33. Yadav, R. and Yadav, V.J. "Three-dimensional analytical models for time-dependent coefficients through uniform and varying plane input source in semi-infinite adsorbing porous media", *Pollution*, **5**(1), pp. 81-98 (2019).
34. Yadav, R. and Kumar, Z.J. "Solute transport for pulse type input point source along temporally and spatially dependent flow", *Pollution*, **5**(1), pp. 53-70. (2019)
35. FISCHER, H. et al. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, Inc., New York (1979).
36. Cotta, R.M., Knupp, D.C. and Naveira-Cotta, C.P. "Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems", 2016: Springer(2016).
37. Cotta, and M.D. Mikhailov, R.M. "Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation", Wiley Chichester (1997).
38. Cotta, R.M. "Integral transforms in computational heat and fluid flow", CRC Press (1993).
39. Xu, Z., Travis, J.R. and Breitung, W. "Green's function method and its application to verification of diffusion models of GASFLOW Code", Forschungszentrum Karlsruhe (2007).
40. Polyanin, A.J. "Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists", Bova Raton: Chapman Hall/CRC, (2002).