معیار تشخیص درهم‌تنیدگی کامل چند قسمتی در سیستم‌های متغیر-پیوسته

یحیی اکبری کوربلاغ*، مهسا اژدرقلم

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

دریافت: 1397/02/18 ویرایش نهائی: 1397/11/28 پذیرش: 1397/12/25

چکیده

در سیستم‌های چند قسمتی، درهم‌تنیدگی انواع مختلفی دارد که یک نوع مهم آن درهم‌تنیدگی کامل است. به‌دلیل اهمیت درهم‌تنیدگی کامل در فرآیندهای اطلاعات کوآنتومی، برای تشخیص آن معیارهای متعددی ارائه شده است. یکی از آنها معیاری است که Shchukin و همکاران در سال 2015 معرفی کرده‌اند. آنها ابتدا یک نامساوی به‌دست آورده‌اند که اگر یک حالت کوآنتومی متغیر-پیوسته چند قسمتی آن را به‌ازای همه تقسیم‌های دو قسمتی نقض کند، کاملاً درهم‌تنیده است. از آنجا که استفاده از این نامساوی مستلزم بهینه‌سازی عددی است و با افزایش تعداد قسمت‌ها به‌کار بردن آن دشوارتر می‌شود، آنها در ادامه با استفاده از این نامساوی یک شرط تحلیلی برای درهم‌تنیدگی کامل ارائه داده‌اند که هر چند بهترین شرط ممکن نیست ولی مشکلات نامساوی اصلی را ندارد. در این مقاله، با استفاده از این نامساوی اصلی، یک شرط تحلیلی برای درهم‌تنیدگی کامل ارائه می‌دهیم که کران پایین آن بزرگتر از کران پایین شرط تحلیلی آنها است و بنابراین می‌تواند حالت‌های کاملاً درهم‌تنیدهٔ بیشتری را تشخیص دهد. به‌علاوه، قدرت تشخیص آن با قدرت تشخیص نامساوی اصلی مذکور یکسان است و مشکلات استفاده از آن را ندارد. این مطلب را با بررسی یک مثال توضیح می‌دهیم.

کلیدواژگان: حالت‌های کوآنتومی، معیار درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیدگی کامل، حالت گاُوسی

مقدمه

تشخیص درهم‌تنیدگی سیستم‌های چند قسمتی یک مسئله اساسی در علم اطلاعات کوآنتومی است. درهم‌تنیدگی‌های چند قسمتی در حوزهٔ وسیعی از فرآیندهای پردازش اطلاعات کوآنتومی از قبیل ترابرد کوآنتومی [1،۲] و رمزنگاری کوآنتومی کاربرد زیادی دارند [3].

در سیستم‌های چند قسمتی، درهم‌تنیدگی می‌تواند انواع مختلفی داشته باشد. هر نوع خاص درهم‌تنیدگی با گروه‌هایی از قسمت‌ها مشخص می‌شود که حالت آنها جداپذیر است. اگر یک سیستم $n-$قسمتی و مجموعهٔ اندیس $\{1,2,....,n\}$ را در نظر بگیریم، آنگاه هر نوع خاص درهم‌تنیدگی با یک افراز این مجموعه مشخص می‌شود. افراز $I=\{I_1,I_2,.....,I_k\}$ به‌ازای $k\geq 2$ که در آن زیر مجموعه‌های I_i غیر تهی و مجزا بوده و اجتماع آنها برابر با مجموعه $\{1,2,....,n\}$ است، یک حالت k -جداپذیر را توصیف می‌کند. حالت متناظر با $k=n$ را کاملاً جداپذیر می‌نامند و حالت‌های متناظر با $k=2$ حالت‌های جداپذیر دو قسمتی نامیده می‌شوند. حالت‌هایی که جداپذیر دو قسمتی نباشند به‌حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده معروف هستند [4]. تشخیص

*نویسنده مسئول: yakbari@azaruniv.ac.ir

حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده به‌علت کاربرد فراوان آنها، مسئلهٔ مهمی است. بنابراین، برای ارائه معیارهایی جهت تشخیص این حالت ها تلاش‌های زیادی صورت گرفته است [4-7].

در این مقاله، شرط تحلیلی ارائه شده در مرجع [4] برای تشخیص حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده را ارتقا می‌دهیم به‌طوری که بتواند تعداد بیشتری حالت کاملاً درهم‌تنیده را تشخیص دهد.

شرط جداپذیری حاصل از کران کوآنتومی

در این بخش، شرط جداپذیری معرفی شده در مقاله [4] را به‌طور خلاصه مرور می‌کنیم. سیستمی را در نظر می‌گیریم که شامل n مد الکترومغناطیسی (نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی) است. مد iام با عملگرهای $\hat{x}_i$ و $\hat{p}_i$ توصیف می‌شود که دارای رابطهٔ جابه‌جایی $[\hat{x}_i, \hat{p}_i]=i$ هستند. برای توصیف این سیستم $n-$مده از بردار $2n$ مؤلفه‌ای $\hat{r}=(\hat{x}, \hat{p})$ استفاده می‌کنیم که در آن $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ و $\hat{p}=(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n)$ است. اکثر معیارهای تشخیص درهم‌تنیدگی کامل برای سیستم‌های $n-$مده با کران پایین کمیت G سر و کار دارند که به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$G=\langle \hat{r}^T M \hat{r}\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\left\langle \left\{\hat{r}_i, \hat{r}_j\right\}\right\rangle = Tr(M\gamma) \tag{1}$$

که در آن $M=(M_{ij})_{i,j=1}^{2n}$ یک ماتریس $2n\times 2n$ حقیقی، متقارن و مثبت معین بوده و $\left\langle\left\{\hat{r}_i, \hat{r}_j\right\}\right\rangle=(1/2)\left\langle \hat{r}_i\hat{r}_j+\hat{r}_j\hat{r}_i\right\rangle$ است. علاوه بر این، $\gamma=(\left\langle\left\{\hat{r}_i, \hat{r}_j\right\}\right\rangle)_{i,j=1}^{2n}$ ماتریس کواریانس حالت سیستم است. در عمل معمولاً یک مورد خاص ماتریس M به‌کار می‌رود که بلوک‌های غیر قطری آن صفر هستند. اگر بلوک‌های قطری M را با $X=(M_{ij})_{i,j=1}^{n}$ و $P=(M_{ij})_{i,j=n}^{2n}$ نشان دهیم که ماتریس‌های $n\times n$ متقارن و مثبت نیمه معین هستند، در این مورد خاص، کمیت G به‌صورت زیر خواهد بود:

$$G=\left\langle \hat{x}^T X\, \hat{x}+\hat{p}^T P\, \hat{p}\right\rangle = Tr(X\gamma_{xx})+Tr(P\gamma_{pp}) \tag{2}$$

که $\gamma_{xx}=(\langle x_i x_j\rangle)_{i,j=1}^{n}$ و $\gamma_{pp}=(\langle p_i p_j\rangle)_{i,j=1}^{n}$ بلوک‌های قطری ماتریس کواریانس حالت سیستم هستند. همان‌طور که در مرجع [4] نشان داده شده است، کمینهٔ کمیت G روی همه حالت‌های ممکن سیستم به‌صورت زیر است

$$\min_{\rho} G = Tr(\sqrt{\sqrt{X}\,P\sqrt{X}}) \tag{3}$$

که آن را کران کوآنتومی می‌نامند و با $B(X,P)$ نشان می‌دهند. بنابراین، به‌ازای همهٔ حالت‌های سیستم چند قسمتی، نامساوی زیر برقرار است

$$Tr(X\gamma_{xx})+Tr(P\gamma_{pp})\ge B(X,P) \tag{4}$$

برای رسیدن به معیاری برای حالت‌های جداپذیر متناظر با افراز $I=\{I_1, I_2, \ldots.., I_k\}$ که آنها را حالت‌های $I-$جداپذیر می‌نامیم، از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر مدها ی i و j جدا پذیر باشند، آنگاه $\langle p_i p_j\rangle=\langle x_i x_j\rangle=0$ است [4]. بنابراین، برای حالت های $I-$جداپذیر می‌توان تساوی زیر را نوشت

$$Tr(X\gamma_{xx})+Tr(P\gamma_{pp})=Tr(X_u\gamma_{xx})+Tr(P_v\gamma_{pp}) \tag{5}$$

که در آن، X_u همان ماتریس X است ولی با این تفاوت که در آن درآیه‌های متناظر با درآیه‌های صفر γ_{xx} با اعداد حقیقی دلخواه u_i طوری جاگذاری شده‌اند که X_u متقارن و مثبت نیمه معین باشد. ارتباط بین ماتریس‌های P_v و P نیز به‌صورت مشابه است. با

اعمال نامساوی4 برای هر حالت $I-$جداپذیر، شرط زیر به‌دست می‌آید

$$G(X,P) \ge B_I(X,P) = \max_{\mathbf{u},\mathbf{v}} Tr(\sqrt{\sqrt{X}P\sqrt{X}}) \quad 6$$

این شرط همان نامساوی اصلی مرجع [4] است. توجه کنید که به‌ازای بردارهای $\mathbf{u}_0$ و $\mathbf{v}_0$ که مؤلفه‌های آنها، به‌ترتیب، درآیه‌های متناظر در خود ماتریس‌های X و P هستند ، $X_{u_0} = X$ و $P_{v_0} = P$ است. بنابراین، به‌ازای هر افرا ز I نامساوی $B_I(X,P) \ge B(X,P)$ همواره برقرار است. وانگهی، این نامساوی به‌ازای اکثر ماتریس‌های X و P به‌صورت اکید برقرار است. از این‌رو، کران نامساوی6 قویتر از کران نامساوی4 است و تعدادی از حالت‌هایی که $I-$جداپذیر نیستند می‌توانند به‌ازای یک جفت ماتریس معین X و P، نامساوی6 را نقض کنند. اگر ماتریس‌های X و P وجود داشته باشند به‌طوری که نامساوی6 به‌ازای تمام تجزیه‌های دو قسمتی به‌طور هم‌زمان نقض شود، در این صورت حالت مورد نظر کاملاً درهم‌تنیده است.

معیار درهم‌تنیدگی کامل

روشن است که استفاده از معادلهٔ6 برای تشخیص درهم‌تنیدگی کامل، مستلزم بهینه سازی عددی است که باید برای هر تقسیم دو قسمتی سیستم، جداگانه انجام شود. از سوی دیگر، با افزایش تعداد قسمت‌های سیستم، تعداد تقسیم‌های دو قسمتی نیز به‌سرعت افزایش می‌یابد. بنابراین، کاربرد معادلهٔ6 در سیستم‌های با تعداد قسمت‌های زیاد دشوارتر می‌شود. برای رفع این مشکل، در مرجع [4] با استفاده از معادلهٔ6 یک شرط تحلیلی به‌دست آورده‌اند که نقض آن به‌وسیلهٔ یک حالت حاکی از درهم‌تنیدگی کامل آن است. اما این شرط تحلیلی بهترین شرط ممکن نیست و به‌ازای هر تعداد قسمت مفروض، کران پایین حاصل از آن کوچکتر از کران پایین حاصل از معادلهٔ6 به‌روش بهینه سازی عددی است. در این بخش، می‌خواهیم براساس معیار جداپذیری معادلهٔ6 یک شرط تحلیلی به‌دست آوریم که نقض آن حاکی از درهم‌تنیدگی کامل است ولی بر خلاف شرط تحلیلی مرجع [4]، کران پایین حاصل از آن به‌ازای هر تعداد قسمت مفروض، برابر با کران پایین حاصل از معادلهٔ6 است و بنابراین قدرت تشخیص آن بیشتر از قدرت تشخیص شرط تحلیلی مرجع [4] است. برای این منظور، همانند مرجع [4]، کمیت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$G_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} \left\langle \left(x_i + x_j\right)^2 + \left(p_i - p_j\right)^2 \right\rangle \quad 7$$

که همان کمیت کلی G معادلهٔ2 به‌ازای ماتریس‌های $X = X_n$ و $P = P_n$ است که به‌صورت زیر معرفی می‌شوند

$$X_n = \begin{pmatrix} n\text{-}1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & n\text{-}1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & n\text{-}1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & n\text{-}1 \end{pmatrix} \quad 8$$

$$P_n = \begin{pmatrix} n-1 & \text{-}1 & \ldots & \text{-}1 & \text{-}1 \\ \text{-}1 & n-1 & \ldots & \text{-}1 & \text{-}1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{-}1 & \text{-}1 & \ldots & n-1 & \text{-}1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & \ldots & \text{-}1 & n-1 \end{pmatrix} \quad 9$$

از آنجا که ماتریس‌های X_n و P_n متقارن هستند، کافی است که فقط تجزیه‌های دو قسمتی به‌شکل $1,\ldots,k \,|\, k+1,\ldots,n$ را به‌ازای $k \le \frac{n}{2}$ بررسی کنیم. برای ساده‌سازی محاسبات، همهٔ درایه‌های u_i در X_n و v_i در P_n را صفر انتخاب می‌کنیم و ماتریس‌های حاصل را با $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ نشان می‌دهیم. چون ماتریس‌های $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ با هم جا به‌جا پذیرند،

جمله $Tr\sqrt{\sqrt{X_{n,k}}P_{n,k}\sqrt{X_{n,k}}}$ به‌صورت ساده‌تر $Tr\sqrt{X_{n,k}P_{n,k}}$ در می‌آید و به‌راحتی قابل محاسبه است. برای محاسبه این جمله، ابتدا ویژه‌مقادیر حاصلضرب $X_{n,k}P_{n,k}$ را به‌دست می‌آوریم. ماتریس‌های $X_{n,k}$ و $P_{n,k}$ دارای شکل زیر هستند

$$X_{n,k}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1 & 0\\ 0 & \mathrm{A}_2\end{pmatrix} \text{ و } P_{n,k}=\begin{pmatrix}\mathrm{B}_1 & 0\\ 0 & \mathrm{B}_2\end{pmatrix}$$

که در آن داریم

$$A_1=(n-2)I_k+A_1'$$
$$A_2=(n-2)I_{n-k}+A_2'$$
$$B_1=nI_k-A_1'$$
$$B_2=nI_{n-k}-A_2'$$

در روابط بالا، A_1' و A_2'، به‌ترتیب، ماتریس‌های $k\times k$ و $(n-k)\times(n-k)$ هستند که تمام درایه‌های آنها برابر با یک هستند. بنا براین، به‌دست می‌آوریم

$$X_{n,k}P_{n,k}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 & 0\\ 0 & \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\end{pmatrix}$$
$$=n(n-2)I_n-\begin{pmatrix}(k-2)A_1' & 0\\ 0 & (n-k-2)A_2'\end{pmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که برای به‌دست آوردن ویژه‌مقادیر ماتریس حاصلضرب، فقط کافی است ویژه‌مقادیر ماتریس زیر را بیابیم

$$\begin{pmatrix}(k-2)A_1' & 0\\ 0 & (n-k-2)A_2'\end{pmatrix}.$$

چون این ماتریس فقط دو سطر مستقل دارد، بنابراین فقط دو ویژه‌مقدار مخالف صفر دارد و بقیه ویژه‌مقادیر آن صفر هستند. به‌راحتی می‌توان نشان داد که دو ویژه‌مقدار مخالف صفر این ماتریس برابر هستند با $k(k-2)$ و $(n-k)(n-k-2)$. بنابراین، ماتریس $X_{n,k}P_{n,k}$ دارای $(n-2)$ ویژه‌مقدار به‌صورت $n(n-2)$، یک ویژه‌مقدار به‌صورت $n(n-2)-k(k-2)$ و یک ویژه‌مقدار به‌صورت $n(n-2)-(n-k)(n-k-2)$ است.

از این‌رو، به‌دست می‌آوریم:

$$Tr\sqrt{X_{n,k}P_{n,k}}=(n-2)\sqrt{n(n-2)}+\sqrt{(n-1)^2-(k-1)^2}+\sqrt{k(2n-3)-k(k-1)}$$

واضح است که مینیموم این عبارت در بازهٔ $1\le k\le\frac{n}{2}$ به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آید. بنابراین، هر حالت دو-جداپذیر باید در نامساوی زیر صدق کند:

$$G_n\ge(n-2)\sqrt{n(n-2)}+(n-1)+\sqrt{2n-3} \qquad (10)$$

این معادله، نتیجهٔ اصلی این مقاله است که یک شرط تحلیلی است که نقض آن به‌وسیلهٔ یک حالت حاکی از درهم‌تنیدگی کامل آن حالت است.

کران پایین شرط تحلیلی معادلهٔ10 برای G_n به‌ازای یک n مفروض، با کران حاصل از معادلهٔ6 به‌روش بهینه سازی عددی برابر است ولی از کران پایین شرط تحلیلی مرجع [4] بزرگتر است. پس شرط تحلیلی معادلهٔ10 قوی‌تر از شرط تحلیلی مرجع [4] است و می‌تواند نسبت به آن حالت‌های درهم‌تنیده کامل بیشتری را تشخیص دهد. برای نشان دادن این مطلب، مثالی را مطرح می‌کنیم.

مثال: حالت‌های گاٌوسی سه مده

در این مثال، خانواده‌ای از حالت‌های گاٌوسی سه مده را بررسی می‌کنیم که از طریق حالت‌های خالص GHZ-گونه به‌دست آمده‌اند [8]. ماتریس کواریانس این حالت‌ها به‌صورت زیر است

$$\gamma_\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha I)$$

که در آن

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & -c & 0 & -c \\ c & 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & b & 0 & -c \\ c & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix}$$

در این ماتریس $a>1$ است و b و c به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b = \frac{1}{4}(5a - \sqrt{9a^2 - 8})$$
$$c = \frac{1}{4}(a - \sqrt{9a^2 - 8})$$

بنابراین، γ_{xx} و γ_{pp} به صورت زیر هستند:

$$\gamma_{xx} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\alpha & c & c \\ c & a+\alpha & c \\ c & c & a+\alpha \end{pmatrix}$$
$$\gamma_{pp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+\alpha & -c & -c \\ -c & b+\alpha & -c \\ -c & -c & b+\alpha \end{pmatrix}$$

نشان داده شده است که این حالت به‌ازای $a=1.2$ در بازهٔ $0\le\alpha\le\alpha_0$ درهم‌تنیدگی کامل دارد که $\alpha_0 = 0.29756$ است [8].

حال می‌خواهیم شرط معادلهٔ10 را در مورد این حالت به‌کار ببریم. برای این حالت، $n=3$ است. پس بنا به معادله‌های8 و 9 داریم:

$$X_{n=3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$P_{n=3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

و به‌ازای $k=1$ داریم:

$$X_{n=3,k=1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$P_{n=3,k=1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

بنابراین، برای سمت چپ نامساوی10 به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} G_{n=3} &= Tr(X_n\gamma_{xx}) + Tr(P_n\gamma_{pp}) \\ &= 3(a+b) + 6(c+\alpha) \\ &= 6\alpha + \frac{3}{4}(11a - 3\sqrt{9a^2-8}) \end{aligned}$$

از سوی دیگر، سمت راست نامساوی10 به‌ازای $n=3$ برابر است با $2+2\sqrt{3}$. بنابراین، در مورد این حالت، نامساوی10 به‌شکل زیر در می‌آید:

$$6\alpha + \frac{3}{4}(11a - 3\sqrt{9a^2-8}) \ge 2+2\sqrt{3}$$

مشاهده می‌کنیم که برای $a=1.2$، این نامساوی به‌ازای $0\le\alpha\le 0.0958$ نقض می‌شود و این نشان می‌دهد که حالت مورد نظر در این بازه از مقادیر پارامتر α کاملاً درهم‌تنیده است. این در حالی است که بررسی نشان می‌دهد که شرط تحلیلی معرفی شده در مرجع [4] قادر به‌تشخیص درهم‌تنیدگی این حالت نیست.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک شرط تحلیلی برای تشخیص حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده چند قسمتی در سیستم‌های متغیر-پیوسته معرفی شده است. این شرط قادر است حالت‌های کاملاً درهم‌تنیده بیشتری را تشخیص دهد زیرا کران پایین آن بزرگتر از کران پایین شرط تحلیلی

مشابهی است که قبلاً در مرجع [4] به‌دست آمده است. امیدواریم با انتخاب مناسبتر ماتریس‌های X و P در آینده بتوانیم شرط تحلیلی بهتری را به‌دست آوریم.

مرجع‌ها

[1] F. Verstraete, H. Verschelde, Optimal Teleportation with a Mixed State of Two Qubits, *Physical Review Letters* ***90*** (2003) 097901, pp. 1-4.

[2] S. Lee, J. Joo, J. Kim, Teleportation capability, distillability, and nonlocality on three-qubit states, *Physical Review A* ***76*** (2007) 012311, pp. 1-4.

[3] R. Cleve, D. Gottesman, H.-K. Lo, How to Share a Quantum Secret, *Physical Review Letters* ***83*** (1999) 648-651

[4] E. Shchukin, P. Van Loock, Generalized conditions for genuine multipartite continuous-variable entanglement, *Physical Review A* ***92*** (2015) 042328, pp. 1-10.

[5] P. van Loock, A. Furusawa, Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement, *Physical Review A* **67** (2003) 052315, pp. 1-13.

[6] K. Nagata, T. Nakamura, J. Batle, S. Abdalla, A. Farouk, Better Entanglement Witness for Genuine Multipartite Entanglement, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 2116-2120.

[7] F. Clivaz, M. Huber, L. Lami, G. Murta, Genuine-multipartite entanglement criteria based on positive maps, *Journal Of Mathematical Physics* **58** (2017) 082201, pp. 1-24.

[8] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein and J.I. Cirac, Separability properties of three-mode Gaussian states, Physical Review A 64 (2001) 052303, pp. 1-10.