

ناپایداری مدولاسیونی امواج الکترومغناطیسی غیرخطی در توری براگ

پلاسمایی

جعفر برهانیان*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، صندوق پستی 179، اردبیل، ایران

دریافت: 1396/05/16 ویرایش نهایی: 1397/11/30 پذیرش: 1397/12/25

چکیده

انتشار غیرخطی امواج الکترومغناطیسی در توری براگ پلاسمایی در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادلات ماکسول همراه با مدل سیالی پلاسمای و در رژیم نسبیتی ضعیف، دو معادله جفت شده به دست آمد که حاکم بر تحولات پوش امواج پیشرونده و پسرونده در یک پلاسمای سرد نامغناطیده می‌باشند که چگالی زمینه آن به فرم یک توری براگ مدوله شده است. سپس جواب‌های غیرخطی به صورت امواج تخت با دامنه ثابت در نظر گرفته شده و پایداری آنها نسبت به یک اختلال کوچک مورد بررسی قرار گرفته است. وابستگی نرخ رشد و همچنین پنجره ناپایداری به پارامترهای مربوطه سیستم مورد کنکاش قرار گرفته است.

کلیدواژگان: ناپایداری مدولاسیونی، امواج الکترومغناطیسی، توری براگ پلاسمایی

مقدمه

دست‌کاری و شکل‌دهی پالس‌های لیزری نسل بعد از محیطی استفاده گردد که آستانه آسیب آن بالا باشد. طی سالیان اخیر محیط پلاسمای به عنوان یک جایگزین مناسب برای تقویت پالس لیزری مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [4 و 5]. علاوه بر این پلاسمای محیط مناسب با آستانه آسیب بسیار بالا برای دست‌کاری و شکل‌دهی پالس لیزری نیز می‌باشد. به عنوان مثال آینه پلاسمایی نه فقط به عنوان یک انعکاس دهنده بلکه به عنوان یک قطعه جایگزین برای بهبود کتراست پالس استفاده شده است [6]. توری پلاسمایی مورد دیگری است که برای کنترل قطبش پالس [7]، به عنوان مدولاتور اپتیکی [8]، مترام سازی پالس [9]، دست‌کاری پالس [10] و تشکیل سالتون [11] مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

طی چند دهه اخیر تکنولوژی لیزر پیشرفت‌های به‌سزایی داشته است به گونه‌ای که شاهد تولید پالس‌های با شدت بالا و طول بسیار کوتاه بوده‌ایم. این پیشرفت بیشتر مدیون تکنیک تقویت پالس چیرپ¹ (CPA) بوده است [1]. در این روش با استفاده از المان‌های اپتیکی به خصوص توری‌ها پالس لیزری چیرپ شده و پس از تقویت مترام سازی انجام می‌گیرد [2]. در تکنیک CPA این مشکل وجود دارد که برای شار انرژی بالاتر از حدود 1 J/cm^2 (برای طول پالس فمتوثانیه) کریستال تقویت کننده و همچنین توری‌ها دچار آسیب جدی می‌شوند [3]. با این توضیح ایجاد پالس‌های نسل بعدی مستلزم بالا رفتن اندازه المان‌های اپتیکی و در نتیجه بالا رفتن هزینه می‌باشد. به همین خاطر سعی بر آنست که برای تقویت،

* نویسنده مسئول: Borhanian@uma.ac.ir

برای ناپایداری مدولاسیونی بسیار مهم است پاشندگی حاصل از مدولاسیون چگالی است. این خاصیت باعث می‌شود تا بتوان پاشندگی سرعت گروه و میزان عدم تطبیق فاز (طول موج) را کنترل کرد. در نتیجه آهنگ تکرار ایجاد قطار پالس‌های کوتاه نیز با این پارامتر کنترل خواهد شد. اگرچه این ناپایداری در توری براگ فیبر بررسی شده است [22] ولی این امر در پلاسما مورد کنکاش قرار نگرفته است. لذا هدف این مقاله مطالعه این موضوع خواهد بود تا بتوان تأثیر پارامترهای پلاسما و پالس را بر وقوع این ناپایداری مورد مذاقه قرار داد.

نظریهٔ مدهای جفت شده

در این بخش می‌خواهیم ابتدا در مورد تولید توری براگ پلاسمایی و سپس انتشار امواج غیرخطی در آن بحث کنیم. دو پالس لیزری با قطبش خطی و با پتانسیل برداری $\vec{A}_{1,2} = b_{1,2} \cos(k_{1,2}z - \omega_{1,2}t)\hat{x}$ در نظر بگیرید که در خلاف جهت هم منتشر می‌شوند به طوری که $k_1 = -k_2 = k$ و $\omega_1 = \omega_2$ به ترتیب عدد موج و فرکانس آنها و $b_{1,2}$ نیز دامنهٔ آنها است. در اثر نیروی اثرگذار وارد بر الکترون‌ها چگالی زمینهٔ آنها دچار اختلالی به شکل $N_0 = 1 - \delta N_0$ خواهد شد که در آن

$$\delta N_0 = 2\kappa \cos(2kz)(1 - \cos t) \quad 1$$

و $\kappa = k^2 b_1 b_2$ تعریف شده است. لازم به ذکر است که در عبارت فوق چگالی با چگالی زمینهٔ n_0 ، زمان با فرکانس پلاسما $\omega_{p0} = (n_0 e^2 / m_e \epsilon_0)^{1/2}$ ، طول با ω_{p0} / c و پتانسیل برداری نیز با $m_e c^2 / e$ بی‌بعد شده‌اند که در آن e بار الکترون، m_e جرم آن و c سرعت نور است. در به دست آوردن رابطهٔ فوق فرض شده است که غیرخطیت ضعیف بوده به طوری که

ایده تشکیل توری پلاسمایی به طور نظری ابتدا توسط بوتون و ران در سال 1991 [12] مطرح شد و سپس در سال‌های بعد توسط دیگران [13-16] مورد توجه جدی‌تر قرار گرفت. در این ایده، نیروی اثرگذار حاصل از برهم‌کنش دو پالس لیزری شدید که در جهت مخالف هم منتشر می‌شوند، چگالی زمینهٔ پلاسما را مدوله کرده و محیطی مانند توری براگ، شبیه آن چیزی که در یک فیبر نوری نیز ایجاد می‌شود، به وجود می‌آورند. بسته به دامنه و طول موج پالس‌های برهم‌کنش کننده، مدولاسیون می‌تواند عمیق¹ و یا سطحی² باشد. یکی از مهمترین مشخصهٔ توری براگ وجود باند گاف فوتونیک است که باعث بروز پدیده‌های فیزیکی جالبی مانند دوپایداری، سوئیچینگ، ناپایداری مدولاسیونی و تولید سالیتون خواهد شد [17].

از میان پدیده‌های اشاره شده در بالا، ناپایداری مدولاسیونی از جمله مهمترین پدیده‌ها می‌باشد که به طور نظری مورد توجه فیزیک غیرخطی و پلاسما بوده و به عنوان عامل ایجاد ساختارهای غیرخطی جایگزیده مانند امواج سالیتونی و امواج راگو [18] شناخته شده است. ناپایداری مدولاسیونی در اثر سوار کردن اختلال بر امواج غیرخطی تحت می‌تواند به وجود بیاید. چنانچه شرایط فراهم باشد اختلال رشد پیدا کرده و باعث ایجاد قطاری از پالس‌های کوتاه خواهد شد. این پدیده می‌تواند در محیط‌های مختلف مانند سیالات [19]، محیط‌های اپتیکی [20] و پلاسما [21] به وقوع بپیوندد. چنانچه معادلهٔ حاکم بر انتشار امواج غیرخطی در یک محیط معادلهٔ شرودینگر غیرخطی باشد، آنگاه این ناپایداری حاصل تعامل بین غیرخطیت و پاشندگی است. برای وقوع ناپایداری لازم است پاشندگی و غیرخطیت هر دو مثبت یا منفی باشند. یکی از خصوصیات مهم توری پلاسمایی مانند توری فیبر که

¹ Deep grating

² Shallow grating

می‌توان فاکتور نسبیته را به صورت $\gamma = 1 + A^2 / 2$ تقریب زد. با در نظر گرفتن تقریبات بالا معادله 2 به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 \right) \bar{A} = \left(\delta n - \delta N_0 - \frac{1}{2} A^2 \right) \bar{A} \quad 6$$

اکنون اگر مدولاسیون چگالی زمینه سطحی باشد با خطی‌سازی معادلات سیالی 3-5 و ترکیب آنها خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) \delta n \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A^2}{\partial z^2} \quad 7$$

در نظریه مدهای جفت شده فرض بر آنست که یک میدان دلخواه در یک محیط ناهمگن را می‌توان برحسب مدهای محیط همگن متناظر بسط داد. ناهمگنی باعث مبادله انرژی بین این مدها شده و در نتیجه دامنه آنها تابعی از زمان و مکان خواهد بود. ولی چنانچه حداقل به صورت تقریبی تطابق فازی بین دو یا چند مد وجود داشته باشد آنگاه تبادل انرژی بیشتر بین آنها بوده و جفت شدگی با سایر مدها را می‌توان در نظر نگرفت. بر این اساس پتانسیل برداری به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود

8

$$\bar{A}(z, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[A_1 e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + A_2 e^{-i(\beta_0 z + \omega_0 t)} + c.c \right]$$

که در آن $A_{1,2}(z, t)$ دامنه امواج پیش‌رونده و پس‌رونده بوده، ω_0 فرکانس مرکزی و $\beta_0 = (\omega_0^2 - 1)^{1/2}$ نیز عدد موج مرکزی است. با قرار دادن رابطه 8 در معادله 7 در پایین‌ترین مرتبه، اختلال چگالی به صورت زیر به دست می‌آید

$|b_{1,2}| < 1$ باشد. لازم به ذکر است که اختلال وارد بر چگالی یون‌ها در مقایسه با اختلال چگالی الکترون‌ها ناچیز بوده و از آن صرف‌نظر شده است [13]. اگر $\delta N_0 \ll 1$ باشد آنگاه مدولاسیون را سطحی و در غیر این صورت عمیق گویند. حال می‌خواهیم انتشار پالس لیزری را در چنین پلاسمایی مطالعه کنیم. برای حصول چنین نتیجه‌ای از نظریه مدهای جفت شده [23] استفاده خواهیم کرد. در تقریب یک بعدی و همچنین تقریب سیالی معادلات حاکم بر انتشار امواج الکترومغناطیسی نسبیته به صورت زیر می‌باشند [24]

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \frac{N \bar{A}}{\gamma} \quad 2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = N - 1 \quad 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial (Nu)}{\partial z} = 0 \quad 4$$

$$\frac{\partial (\gamma u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\phi - \gamma) \quad 5$$

که در آن فاکتور نسبیته $\gamma = ((1 + A^2) / (1 - u^2))^{1/2}$ ، u مؤلفه سرعت الکترون‌ها در امتداد انتشار موج، $A(\phi)$ پتانسیل برداری (پتانسیل اسکالر) و N چگالی پلاسما می‌باشد. در معادلات بالا همچنین سرعت با سرعت نور و پتانسیل اسکالر نیز با $m_e c^2 / e$ بی‌بعد شده‌اند. در رژیم نسبیته ضعیف که $|A| < 1$ است می‌توان فرض کرد $N = 1 - \delta N_0 + \delta n$ که در آن $\delta n \ll 1$ می‌باشد. لازم به ذکر است که δN_0 در چگالی زمینه پلاسما است که توسط دو پالس اولیه ایجاد می‌شود در حالی که δn اختلالی است در چگالی پلاسما که توسط پالس سوم ایجاد می‌شود. یعنی ابتدا دو پالس پرتوان محیط خنثی را تبدیل به پلاسما کرده و چگالی آن‌را مدوله می‌کنند و سپس پالس سوم در این محیط منتشر می‌شود. همچنین در این رژیم

صرف نظر کرده و نتیجه نهایی به صورت زیر گزارش

می شود

$$i\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial t}\right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \kappa A_2 e^{-2i\delta\beta z} + (Q_1 |A_1|^2 + Q_2 |A_2|^2) A_1 = 0 \quad 13$$

$$i\left(-\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial t}\right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \kappa A_1 e^{2i\delta\beta z} + (Q_1 |A_2|^2 + Q_2 |A_1|^2) A_2 = 0 \quad 14$$

که در آن $Q_j = q_j / 2\beta_0$ بوده، $\kappa = k^2 b_1 b_2 / 2\beta_0$ ضریب جفت شدگی و $\beta_m = (d^m \beta / d\omega^m)_{\omega=\omega_0}$

می باشد. در به دست آوردن معادلات فوق از تقریب پوش کند تغییر در فضای فوریه یعنی شرط $\partial^2 A_j(z, \omega) / \partial z^2 \ll \beta_0 \partial A_j(z, \omega) / \partial z$ استفاده شده است [25]. چنانچه از تبدیل زیر استفاده شود

$$A_1 = U_1 e^{-i\delta\beta z}; \quad A_2 = U_2 e^{i\delta\beta z} \quad 15$$

و از پاشندگی سرعت گروه (β_2) نیز صرف نظر گردد آنگاه به جفت معادلات حاکم بر تحولات مدهای جفت شده در توری براگ پلاسمایی دست پیدا خواهیم کرد

$$i\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial t}\right) + \delta\beta U_1 + \kappa U_2 + (Q_1 |U_1|^2 + Q_2 |U_2|^2) U_1 = 0 \quad 16$$

$$i\left(-\frac{\partial U_2}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U_2}{\partial t}\right) + \delta\beta U_2 + \kappa U_1 + (Q_1 |U_2|^2 + Q_2 |U_1|^2) U_2 = 0 \quad 17$$

در معادلات بالا Q_1 ضریب خود مدولاسیون فازی¹ (SPM) و Q_2 نیز ضریب مدولاسیون فاز متقابل² (XPM) می باشند. با استفاده از جفت معادلات فوق

9

$$\delta n = \frac{\beta_0^2}{2(4\beta_0^2 + 3)} A_1^2 e^{2i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \frac{\beta_0^2}{2(4\beta_0^2 + 3)} A_2^2 e^{-2i(\beta_0 z + \omega_0 t)} - \beta_0^2 A_1 A_2^* e^{2i\beta_0 z} + c.c.$$

اکنون برای اینکه با گذشت چندین دوره مدولاسیون دامنه تأثیرگذار باشد و موجب تبادل مؤثر انرژی بین دو موج پیشرونده و پسرونده گردد لازم است حداقل یک شرط شبه تشدید یا تطابق فاز وجود داشته باشد. با توجه به نحوه تغییرات زمانی و مکانی δN_0 و عبارات مربوط به δn و A^2 خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right) A_1 e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} = [-k^2 b_1 b_2 A_2 e^{-2i\delta\beta z} - (q_1 |A_1|^2 + q_2 |A_2|^2) A_1] e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \quad 10$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right) A_2 e^{-i(\beta_0 z + \omega_0 t)} = [-k^2 b_1 b_2 A_1 e^{2i\delta\beta z} - (q_1 |A_2|^2 + q_2 |A_1|^2) A_2] e^{-i(\beta_0 z + \omega_0 t)} \quad 11$$

که در آن

$$q_1 = \frac{3}{8} - \frac{\beta_0^2}{2(4\omega_0^2 - 1)}; \quad q_2 = \frac{3}{8} + \beta_0^2 \quad 12$$

بوده و $\delta\beta = \beta_0 - k$ نشانگر عدم تطابق فازی است. اکنون برای به دست آوردن معادلات نهایی برای دامنه های $A_{1,2}$ و منظور کردن مرتبه های مختلف پاشندگی می توان معادلات بالا را ابتدا در فضای فوریه نوشته و پس از اعمال کردن عملگرهای سمت چپ دوباره به فضای زمانی برگرداند. جزئیات این مرحله در مرجع [25] به تفصیل بیان شده است لذا از تکرار آن

² Cross-Phase Modulation

¹ Self-Phase Modulation

ناپایداری مدولاسیونی

در این بخش هدف مطالعه ناپایداری مدولاسیونی امواج تخت (پیوسته) با دامنه ثابت ولی بزرگ می‌باشد. لذا ابتدا باید جواب تخت را برای معادلات 16 و 17 پیدا کرده و سپس دینامیک اختلالات وارد بر آن مطالعه شود. اگر جوابی به صورت زیر برای این جفت معادله در نظر گرفته شود

$$U_1 = V_1 e^{inz}; U_2 = V_2 e^{inz} \quad 18$$

که در آن دامنه ثابت و حقیقی و η طول موج اختلال است، با قرار دادن عبارات فوق در معادلات 16 و 17 و تعریف پارامترهای جدید $f = V_2 / V_1$ (نسبت دامنه دو موج) و $W_0 = V_1^2 + V_2^2$ (توان دو موج)، و پس از انجام عملیات جبری خواهیم داشت

$$\eta = \frac{1}{2} \kappa \left(f - \frac{1}{f} \right) + \frac{(Q_1 - Q_2)(f^2 - 1)W_0}{2(f^2 + 1)} \quad 19$$

$$\delta\beta = -\frac{1}{2} \kappa \left(f + \frac{1}{f} \right) - \frac{1}{2} W_0 (Q_1 + Q_2) \quad 20$$

حال اختلال کوچک ϵ_j ($|\epsilon_j| \ll V_j$) را بر امواج تخت سوار می‌کنیم

$$U_1 = (V_1 + \epsilon_1) e^{inz}; \quad 21$$

$$U_2 = (V_2 + \epsilon_2) e^{inz}$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادلات 16 و 17 و خطی سازی نسبت به ϵ_j و استفاده از روابط 19 و 20 خواهیم داشت

$$i \left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} \right) - \kappa f \epsilon_1 + \kappa \epsilon_2 + \quad 22$$

$$G[Q_1(\epsilon_1 + \epsilon_1^*) + Q_2 f(\epsilon_2 + \epsilon_2^*)] = 0$$

$$i \left(-\frac{\partial \epsilon_2}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} \right) - \frac{\kappa}{f} \epsilon_2 + \kappa \epsilon_1 + \quad 23$$

$$G[Q_1 f^2(\epsilon_2 + \epsilon_2^*) + Q_2 f(\epsilon_1 + \epsilon_1^*)] = 0$$

می‌توان تحولات دو پالس پیش‌رونده و پس‌رونده را در در توری براگ پلاسمایی هم در رژیم خطی و هم در رژیم غیرخطی مورد بحث قرار داد. چنانچه از جملات غیرخطی صرف نظر شود آنگاه تحلیل معادلات به دست آمده نشان می‌دهد که رابطه پاشندگی خطی امواج تخت در توری براگ پلاسمایی به صورت $\beta = \pm \sqrt{\delta\beta^2 - \kappa^2}$ است [9 و 17]. بنابراین توری پلاسمایی باند گاف فوتونیک به فرم $-\kappa < \delta\beta < \kappa$ دارد که امواج الکترومغناطیسی مجاز به انتشار در توری پلاسمایی را نیستند. همچنین سرعت گروه به وسیله رابطه $v_g = \pm v_{g0} \sqrt{1 - \kappa^2 / \delta\beta^2}$ و پاشندگی سرعت گروه نیز مطابق رابطه $\beta_2 = -\text{sign}(\delta\beta) \kappa^2 / v_{g0}^2 (\delta\beta^2 - \kappa^2)^{3/2}$ تعیین می‌گردد که در آن $v_{g0} = \beta_0 / \omega_0$ است [17]. دو رابطه اخیر خواص جالبی برای توری براگ از خود بروز می‌دهند. از جمله اینکه سرعت پالس در نزدیکی‌های باند گاف بسیار کوچک شده و همچنین خواص پاشندگی توری براگ رفتاری متفاوت نسبت به محیط همگن از خود بروز می‌دهد. بدین معنی که پاشندگی سرعت گروه علامت خود را در عبور از باند گذر پایین به باند گذر بالا تغییر می‌دهد. یعنی نوع پاشندگی محیط (عادی یا غیرعادی) در عبور از باند گاف تغییر می‌کند. چنانچه جملات غیرخطی در معادلات جفت شده 16 و 17 حفظ شوند پدیده‌های غیرخطی زیادی قابل پیش‌بینی خواهد شد. از این میان در ادامه به ناپایداری مدولاسیونی پرداخته می‌شود.

پسرونده وجود دارد، لذا زمان است که برای هر دو در گذر می‌باشد. پس برای مطالعه ناپایداری و نرخ رشد (بهره) آن فرض می‌شود λ حقیقی بوده و Ω یا معادل آن S بتواند مختلط باشد.

ریشه‌های معادله پاشندگی 25 وابسته به پنج پارامتر f, W_0, κ, ω_0 و λ می‌باشند. f بیانگر نحوه توزیع توان کل W_0 بین امواج پیشرونده و پسرونده می‌باشد. وقتی $|f| > 1$ ($|f| < 1$) باشد موج پسرونده (پیشرونده) غالب می‌باشد. از طرف دیگر $f < 0$ ($f > 0$) برای شاخه بالایی (شاخه پایینی) منحنی پاشندگی خطی اتفاق می‌افتد و متناظر با پاشندگی منفی یا غیرعادی (مثبت یا عادی) است. همچنین $f = \pm 1$ نیز مربوط به دو لبه باند گاف است که در آنجا پاشندگی بیشینه مقدار خود را دارا است. $f = -1$ ($f = 1$) مربوط به پایین‌ترین (بالا‌ترین) نقطه شاخه بالایی (پایینی) منحنی پاشندگی می‌باشد. برای کسب اطلاعات به مرجع [22] مراجعه گردد. با توجه به اینکه تحلیل انجام شده در رژیم نسبی ضعیف و برای توری با مدولاسیون سطحی اعتبار دارد لذا نسبت به انتخاب مقادیر W_0 و κ محدودیت وجود دارد بدین معنی که W_0 همیشه کوچکتر از یک و κ خیلی کوچکتر از نیم در نظر گرفته شود. در اینجا حد بالا برای W_0 یک و برای κ نیز 0/1 در نظر گرفته خواهد شد.

در مطالعه ناپایداری مدولاسیونی بررسی دو موضوع اهمیت دارد. اولی یافتن نواحی از فضای پارامتری است که ناپایداری می‌تواند روی دهد (پنجره ناپایداری) و دیگری وابستگی نرخ رشد ناپایداری به پارامترهای مختلف سیستم است. معادله جبری 25 دارای چهار جواب است. شرط وقوع ناپایداری این است که حداقل

که در آن $G = W_0 / (1 + f^2)$ است. اکنون اگر فرض کنیم ϵ_j به صورت زیر باشد

$$\epsilon_j = c_j e^{i(\lambda z - \Omega t)} + d_j e^{-i(\lambda z - \Omega t)} \quad 24$$

آنگاه با قرار دادن رابطه فوق در معادلات 22 و 23 به یک دستگاه معادلات جبری خطی همگن به شکل $[M][Y] = 0$ دست پیدا خواهیم کرد که در آن $[Y]^T = [c_1, d_1, c_2, d_2]$ بوده، بالانویس T به معنی ترانپوز و مؤلفه‌های ماتریس M_{ij} به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned} M_{11} &= M_{22} = G Q_1; M_{33} = M_{44} = G Q_1 f^2 \\ M_{12} &= G Q_1 - \beta_1 \Omega - f \kappa + \lambda \\ M_{13} &= M_{31} = M_{42} = M_{24} = G Q_2 f \\ M_{14} &= M_{41} = M_{32} = M_{23} = G Q_2 f + \kappa \\ M_{21} &= G Q_1 + \beta_1 \Omega - f \kappa - \lambda \\ M_{34} &= (G Q_1 f^3 - \beta_1 \Omega f - f \lambda - \kappa) / f \\ M_{43} &= (G Q_1 f^3 + \beta_1 \Omega f + f \lambda - \kappa) / f \end{aligned}$$

شرط وجود جواب برای دستگاه معادلات جبری همگن فوق این است که دترمینان ضرایب صفر باشد که منجر به معادله چند جمله‌ای زیر خواهد شد

$$S^4 + \alpha_2 S^2 + \alpha_1 S + \alpha_0 = 0 \quad 25$$

که در آن $S = \beta_1 \Omega = \Omega / v_{g0}$ بوده و ضرایب α_j به شکل زیر تعریف شده‌اند

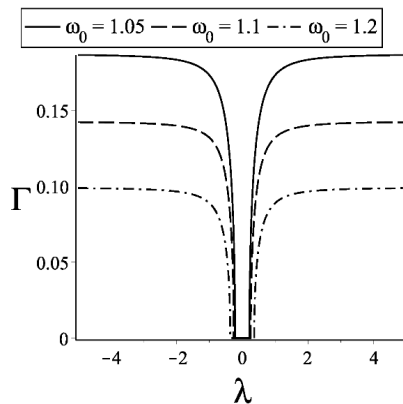
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \lambda^2 [4Gf^3 \kappa (Q_1 + Q_2) - f^4 \kappa^2 + \\ & \quad 2f^2 \kappa^2 + f^2 \lambda^2 - \kappa^2] / f^2 \\ \alpha_1 &= 2\kappa^2 \lambda (1 - f^2) / f^2 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = [4Gf^3 \kappa (Q_1 - Q_2) - f^4 \kappa^2 - 2f^2 \kappa^2 - 2f^2 \lambda^2 - \kappa^2] / f^2$$

مطالعه ناپایداری مدولاسیونی در توری براگ پلاسمایی بر پایه معادله پاشندگی 25 استوار است. چون در توری پلاسمایی همزمان پالس الکترومغناطیسی پیشرونده و

$$\Gamma_{f=1} = \sqrt{\kappa(2Q_1G - \kappa)} \quad 28$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که برای $f = 1$ بهره ناپایداری مدولاسیونی تقریباً مستقل از طول موج اختلال اعمالی می‌باشد. تغییرات نرخ رشد برحسب عدد موج برای ω_0 مختلف در شکل 1 به نمایش گذاشته شده است. همان‌طور که مشخص است برای طول موج‌های بزرگ نرخ رشد به آن وابسته نیست که در توافق با رابطه 28 نیز می‌باشد. با دور شدن از چگالی بحرانی نرخ رشد کاهش می‌یابد. همچنین در بازه کوچکی حول $\lambda = 0$ ناپایداری وجود ندارد که این بازه توسط رابطه 27 به صورت دقیق معین می‌گردد.



شکل 1. تغییرات نرخ رشد برای $f=1$ ، $W_0 = 0.8$ و $\kappa = 0.1$.

اکنون ملاحظیات فوق را برای حالت $f = -1$ (بیشینه پاشندگی غیرعادی) بررسی می‌کنیم. نتایج بررسی عددی نشان می‌دهد که در این حالت رابطه $\alpha_2^2 \approx |4\alpha_0|$ برقرار است. در نتیجه با توجه به رابطه 26 شرط وقوع ناپایداری این است که $\alpha_2 > 0$ باشد. این اتفاق در بازه کوچکی حول $\lambda = 0$ اتفاق می‌افتد. با نگاه به رابطه مربوط به α_2 به راحتی می‌توان دریافت که شرط وقوع

یکی از جواب‌ها دارای بخش مجازی باشد. نرخ رشد و یا بهره را به صورت $\Gamma = |\text{Im}(S_m)|$ تعریف می‌کنیم که در آن S_m ریشه‌ای است که دارای بزرگترین بخش مجازی است. برای شروع ابتدا به حالت خاصی می‌پردازیم که در آن $f = \pm 1$ (لبه‌های گاف) است. در این حالت $\alpha_1 = 0$ بوده و معادله 25 دارای جواب‌هایی به صورت زیر است

$$S_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_0}} \quad 26$$

از رابطه فوق مشخص است چنانچه آرگومان هر یک از رادیکال‌ها منفی باشد آنگاه ناپایداری به وقوع خواهد پیوست.

برای حالتی که $f = 1$ (بیشینه پاشندگی عادی) است با توجه به رفتار ضرایب $Q_{1,2}$ برحسب ω_0 (معادل با β_0)، به غیر از پلاسمای با چگالی زمینه نزدیک به چگالی بحرانی (ω_0 در همسایگی یک)، برای همه مقادیر پارامترها داریم $\alpha_0 > 0$ ، $\alpha_2 < 0$ و $\alpha_2^2 > 4\alpha_0$. بنابراین احتمال ناپایداری مدولاسیونی فقط برای پلاسمای با چگالی زمینه نزدیک به چگالی بحرانی امکان پذیر خواهد بود. برای چگالی نزدیک به چگالی بحرانی یعنی در حد $\omega_0 \rightarrow 1^+$ ، $Q_2 \rightarrow 2Q_1$ و یک آستانه توان برای وقوع ناپایداری به صورت $W_0 > \kappa / Q_1$ وجود دارد. علاوه بر آن ناپایداری فقط برای طول موجی رخ می‌دهد که شرط زیر را ارضا کند [22]

$$|\lambda| > (\kappa + Q_1G) \sqrt{\kappa / (2Q_1G - \kappa)} \quad 27$$

آنگاه نرخ رشد ناپایداری برای λ بزرگ چنین خواهد بود [22]

اگرچه در بالا ناپایداری مدولاسیونی برای حالت خاص $f = \pm 1$ بررسی شد ولی شمای کلی برای $f \neq \pm 1$ تغییر آنچنانی ندارد. با این حال تأثیر پارامترهای دیگر را می‌توان برای نقاط خارج از لبه غلاف $|f| \neq 1$ مورد مطالعه قرار داد. در این حالت جواب‌های معادله پاشندگی 25 پیچیده‌تر است چرا که $\alpha_1 \neq 0$ می‌باشد. در حالت کلی چهار جواب معادله 25 را می‌توان به شکل زیر نوشت [26]

$$S_{1,2} = \frac{\sqrt{D-\alpha_2} \pm \sqrt{-\alpha_2 - D - 2\sqrt{D^2 - 4\alpha_0}}}{2} \quad 30$$

$$S_{3,4} = \frac{-\sqrt{D-\alpha_2} \pm \sqrt{-\alpha_2 - D + 2\sqrt{D^2 - 4\alpha_0}}}{2} \quad 31$$

که در آن D جواب حقیقی معادله زیر است

$$D^3 - \alpha_2 D^2 - 4\alpha_0 D + 4\alpha_2 \alpha_0 - \alpha_1^2 = 0 \quad 32$$

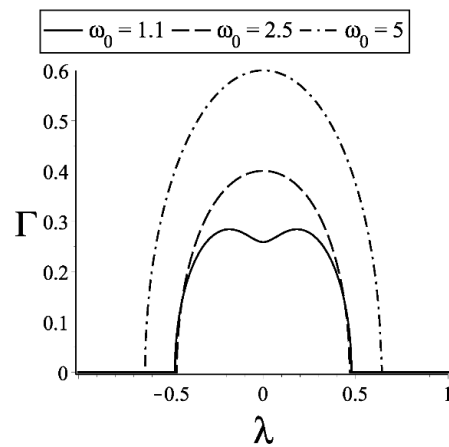
به دلیل تعداد زیاد پارامترها نمی‌توان به صورت تحلیلی شرایط وقوع ناپایداری و نرخ رشد را تعیین کرد، به همین دلیل از روش‌های عددی برای بررسی موضوع کمک خواهیم گرفت. ابتدا حالت $f > 0$ (پاشندگی عادی) را در نظر می‌گیریم. نتایج عددی نشان می‌دهند که در این حالت وابستگی نرخ رشد به f و $1/f$ یکسان است. لذا بررسی‌های خود را محدود به مقادیری از f می‌نماییم که کوچکتر از یک می‌باشد. رفتار نرخ رشد نسبت به تغییرات λ برای $0 < f < 1$ شبیه آن چیزی است که برای $f = 1$ بررسی شد لذا از تکرار آن پرهیز می‌شود. شکل 3 تغییرات نرخ رشد برحسب فرکانس بی‌بعد ω_0 را برای مقادیر مختلف f نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با دور شدن از چگالی بحرانی نرخ رشد شدیداً کاهش پیدا می‌کند.

ناپایداری این است که $\lambda < \sqrt{2\kappa W_0(Q_2 - Q_1) - 2\kappa^2}$ باشد.

در این حالت نیز نرخ رشد ناپایداری توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد (برای علامت منفی)

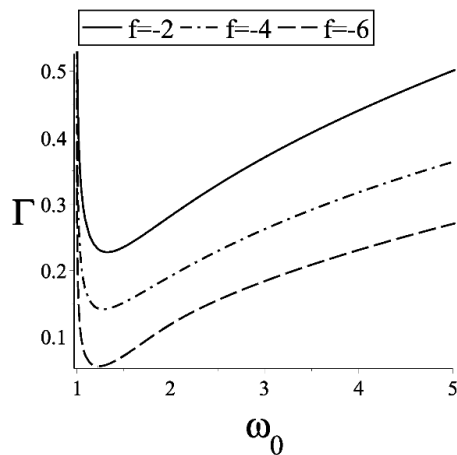
$$\Gamma_{f=-1} = \sqrt{4\kappa W_0(Q_2 - Q_1) - 4\kappa^2 - 2\lambda^2} \quad 29$$

همان‌طور که واضح است برخلاف حالت $f = 1$ ، اکنون نرخ رشد به طول موج اختلال نیز بستگی دارد. رفتار نرخ رشد برای حالت $f = 1$ برحسب عدد موج و برای چگالی‌های مختلف در شکل 2 نشان داده شده است. واضح است که اولاً ناپایداری فقط به‌ازای مقادیری از عدد موج روی می‌دهد که شرط گفته شده در بالا را ارضا کند و ثانیاً با دور شدن از چگالی بحرانی (کاهش چگالی) نرخ رشد افزایش می‌یابد. همچنین پنجره ناپایداری برای پلاسما رقیق‌تر بزرگتر است.



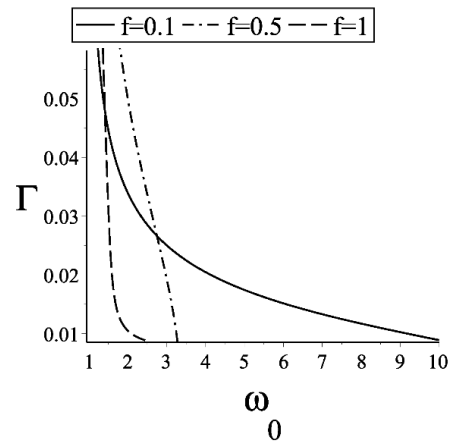
شکل 2. تغییرات نرخ رشد برای $f = -1$ ، $W_0 = 0.8$ و $\kappa = 0.1$.

شدن مدولاسیون چگالی، نرخ رشد کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. ولی برای توان‌های بالاتر نرخ رشد افزایش یافته به یک مقدار بیشینه رسیده و سپس کاهش یافته و دوباره رو به افزایش می‌گذارد. بنابراین در توان‌های بالاتر عمق مشخصی برای مدولاسیون چگالی وجود دارد که به‌ازای آن نرخ رشد کمینه مقدار خود را دارا است.

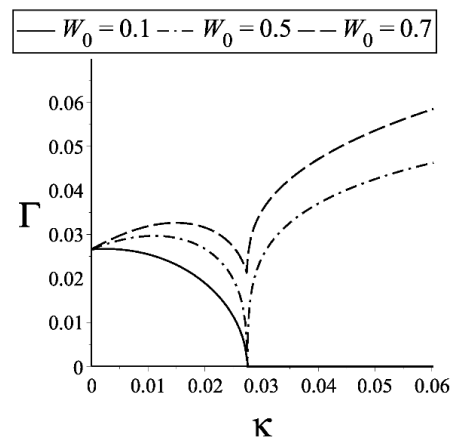


شکل 5. تغییرات نرخ رشد برای برحسب فرکانس برای مقادیر مختلف $f < 0$ برای $\lambda = 0.25$ و $\kappa = 0.1$ ، $W_0 = 0.8$

مانند حالت $f = -1$ ، وقتی $f < 0$ است ناپایداری زمانی به‌وقوع می‌پیوندد که عدد موج حول یک همسایگی $\lambda = 0$ قرار گیرد (رجوع شود به شکل 2). این همسایگی با افزایش ω_0 ، W_0 و κ افزایش می‌یابد. باز هم نرخ رشد برای f و $1/f$ یکسان می‌باشد. اگر خود را محدود به $f < -1$ کنیم خواهیم دید ناپایداری برای تمام مقادیر ω_0 مقدور است. در نزدیکی‌های چگالی بحرانی نرخ رشد بزرگ بوده با کاهش چگالی (با افزایش فرکانس) به یک نقطه کمینه رسیده و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین در پلاسمای با



شکل 3. تغییرات نرخ رشد برای برحسب فرکانس برای مقادیر مختلف $f > 0$ برای $\lambda = 10$ و $\kappa = 0.1$ ، $W_0 = 0.8$



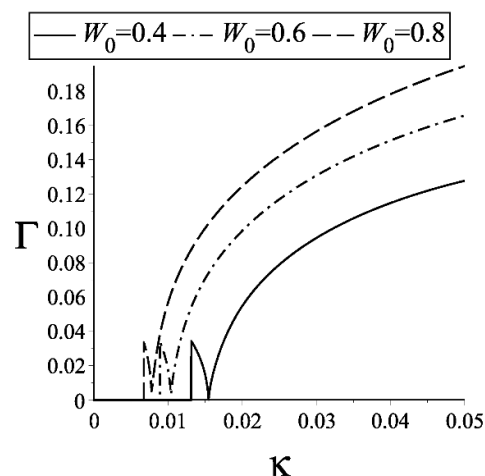
شکل 4. تغییرات نرخ رشد برای برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان و برای $\lambda = 10$ ، $\omega_0 = 1.5$ ، $f = 0.5$

همچنین بازه‌ای از چگالی که در آن احتمال وقوع ناپایداری وجود دارد با افزایش f کاهش می‌یابد. بدین معنی که وقتی توزیع توان بین دو موج پیشرونده و پسرونده متفاوت‌تر باشد آنگاه پنجره ناپایداری بزرگتر است. همچنین تغییرات نرخ رشد برحسب ضریب جفت شدگی و برای مقادیر مختلف توان W_0 در شکل 4 به‌نمایش گذاشته شده است. برای توان‌های پایین با افزایش ضریب جفت‌شدگی یعنی با عمیق‌تر

گرفت. با شروع از معادلات ماکسول و استفاده از مدل سیالی برای پلاسما سرد نامغناطیده که چگالی زمینه آن توسط دو باریکه لیزری دچار مدولاسیونی به شکل یک توری براگ شده است، نشان داده شد که چنانچه شرط تطابق فاز یا حداقل شبه تطابق فاز وجود داشته باشد آنگاه تحولات امواج پیش‌رونده و پس‌رونده به وسیله یک جفت معادله غیرخطی حاکمیت می‌شود. برای مطالعه ناپایداری مدولاسیونی جوابی به شکل امواج تخت با دامنه غیرخطی و ثابت برای این معادلات در نظر گرفته شد. سپس اختلال کوچکی بر این جواب‌ها سوار کرده و دینامیک آن مورد بررسی قرار گرفت. شرط سازگاری منجر به یک معادله جبری درجه چهار برای فرکانس اختلالات گردید که با استفاده از آن می‌توان شرایط وقوع ناپایداری و همچنین نرخ رشد (بهره) ناپایداری را مورد تحلیل قرار داد. مباحث ذکر شده هم برای حالت خاص $f = \pm 1$ (نسبت توزیع توان بین موج پیش‌رونده و پس‌رونده را بیان می‌کند) که در آن سیستم بیشترین میزان پاشندگی را از خود نشان می‌دهد و هم برای حالت‌هایی که $|f| \neq 1$ است جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است.

برای حالتی که $f = 1$ (بیشینه پاشندگی عادی) است ناپایداری فقط برای چگالی زمینه نزدیک به چگالی بحرانی و عدد موج اختلال دور از همسایگی صفر می‌تواند رخ دهد. در این حالت نرخ رشد برای عدد موج بزرگ مستقل از آن بوده و با دور شدن از چگالی زمینه پلاسما از چگالی کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که نتایج فوق برای حالت $f = -1$ (بیشینه پاشندگی غیرعادی) عکس می‌باشد یعنی ناپایداری فقط برای مقادیری از عدد موج اختلال اتفاق می‌افتد که در همسایگی صفر قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر برای طول موج‌های کوچک ناپایداری رخ نمی‌دهد. همچنین نرخ رشد با دور شدن چگالی پلاسما از چگالی بحرانی

چگالی زمینه نزدیک به چگالی بحرانی و یا در پلاسما با چگالی پایین نرخ رشد بالا خواهد بود. در این حالت نیز هرچقدر توزیع توان بین موج پیش‌رونده و پس‌رونده ناعادلانه‌تر باشد آنگاه نرخ رشد بالاتر است.



شکل 6. تغییرات نرخ رشد برای برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان و برای $f = -2$ ، $\omega_0 = 1.2$ ، $\lambda = 0.1$.

در شکل 6 نیز تغییرات نرخ رشد برحسب ضریب جفت شدگی برای مقادیر مختلف توان به نمایش گذاشته شده است. مشاهده می‌شود که یک ضریب جفت شدگی آستانه وجود دارد که ناپایداری برای مقادیر بزرگتر از آن اتفاق می‌افتد. با افزایش توان مقدار این آستانه کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که واضح است مانند حالت $f > 0$ نرخ رشد ابتدا با افزایش K کاهش یافته سپس به یک مقدار کمینه رسیده و دوباره رو به افزایش می‌گذارد.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله ناپایداری مدولاسیونی امواج تخت غیرخطی در توری براگ پلاسمایی مورد تحلیل قرار

بررسی ناپایداری مدولاسیونی در توری براگ پلاسمایی و همچنین در توری فیبر نمایانگر تفاوت‌ها و تشابهاتی است. بدین معنی که در هر دو محیط، برخلاف محیط همگن، امکان وقوع ناپایداری مدولاسیونی هم در رژیم پاشندگی عادی و هم غیرعادی وجود دارد. همچنین در هر دو محیط شرط توان آستانه برای ایجاد ناپایداری در رژیم عادی متصور است در حالی که برای رژیم غیرعادی این شرط لازم نیست. اگرچه شمای کلی تحلیل و نتایج حاصله برای دو محیط شبیه به‌نظر می‌رسد ولی مقایسه پنجره ناپایداری و نرخ رشد در دو محیط نشانگر تفاوت‌هایی نیز می‌باشد. تغییر محیط از فیبر به پلاسما باعث نمودار شدن پارامترهایی در نرخ رشد و پنجره ناپایداری می‌شود که این پارامترها عموماً وابسته به چگالی پلاسما می‌باشند (به‌عنوان مثال روابط 27 و 28 مقاله حاضر با روابط 29 و 30 مرجع [22] مقایسه شود). این وابستگی یکی از مزایای محیط پلاسما است چرا که بدون صرف هزینه می‌توان به‌راحتی چگالی پلاسما را (مثلاً با تغییر فشار) تغییر داد در حالی که برای محیط فیبر این امر مستلزم ساخت دوباره فیبر می‌باشد که هزینه و زمان‌بر است. ضمن اینکه محیط پلاسما برای هر شدت موجی دارای دوام است در حالی که توری فیبر در شدت‌های بالای پالس لیزری دچار آسیب شده و کارایی خود را از دست می‌دهد. اعمال میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند تعداد پارامترهای پلاسما را افزایش داده و در نتیجه کنترل‌پذیری پلاسما را افزایش دهد که خود می‌تواند در یک تحقیق جداگانه بررسی شود. در نهایت باید متذکر شد که پلاسما مورد بحث در این مقاله می‌تواند از برهم‌کنش پالس پرتوان لیزری با محیط‌های گازی یا جامد به‌وجود بیاید.

افزایش می‌یابد. رفتار نرخ رشد و پنجره ناپایداری نسبت به طول موج اختلال برای حالتی که $|f| \neq 1$ کمابیش مانند $f = \pm 1$ است. نکته قابل ذکر برای حالت $|f| \neq 1$ این است که رفتار نرخ رشد و پنجره ناپایداری برای حالت‌های f و $1/f$ یکسان است. وقتی $f > 0$ باشد (پاشندگی عادی) با افزایش آن پنجره ناپایداری بزرگتر می‌شود بدین معنی که برای مقادیر متنوع‌تری از چگالی زمینه پلاسما (یا فرکانس موج) ناپایداری قابل حصول است. با افزایش ضریب جفت‌شدگی نرخ رشد ابتدا افزایش یافته سپس کاهش و به یک مقدار کمینه رسیده و بعد از آن دوباره رو به افزایش می‌گذارد. همچنین با افزایش توان امواج تخت، نرخ رشد نیز افزایش می‌یابد. اکنون اگر $f < 0$ باشد (پاشندگی غیرعادی) آنگاه نرخ رشد برای پلاسما رقیق‌تر و یا برای پلاسما با چگالی نزدیک به چگالی بحرانی بزرگتر است. در این حالت افزایش قدر مطلق f میزان نرخ رشد را کاهش می‌دهد که برخلاف حالت قبل است. در این وضعیت ناپایداری نه به‌ازای تمام مقادیر ضریب جفت‌شدگی بلکه به‌ازای مقادیری از آن رخ می‌دهد که بزرگتر از یک مقدار آستانه باشد. این آستانه با افزایش توان کاهش یافته ولی نرخ رشد افزایش می‌یابد. همان‌طور که از روابط مربوطه می‌توان فهمید ضرایب غیرخطی در توری براگ پلاسمایی همیشه مثبت است (رجوع شود به رابطه 12). از طرف دیگر می‌دانیم که اگر ناپایداری مدولاسیونی به‌وسیله معادله شرودینگر تفسیر شود آنگاه شرط وقوع ناپایداری این است که ضرایب پاشندگی و غیرخطیت هم علامت باشند. یعنی اگر ضریب غیرخطیت مثبت باشد آنگاه ناپایداری فقط برای پاشندگی غیرعادی ممکن است. در حالی که برای توری براگ پلاسمایی ناپایداری برای پاشندگی عادی نیز اتفاق می‌افتد.

[12] M. Botton, A. Ron, Efficiency enhancement of a plasma filled backward wave oscillator by self-induced distributed feedback, *Physical Review Letters* **66** (1991) 2468-2471.

[13] Z.M. Sheng, J. Zhang, D. Umstadter, Plasma density gratings induced by intersecting laser pulses in underdense plasmas, *Applied Physics B* **77** (2003) 673-680.

[14] H.Y. Chen, Y. Yin, et. al., Moving electron density gratings induced in the beat-wave field of two counter-propagating laser pulses, *Physics of Plasmas* **17** (2010) 083112.

[15] M. Durand, A. Jarnac, et. al., Dynamics of plasma gratings in atomic and molecular gases, *Physical Review E* **86** (2012) 036405.

[16] G. Lehmann, K.H. Spatschek, Transient Plasma Photonic Crystals for High-Power Lasers, *Physical Review Letters* **116** (2016) 225002.

[17] G.P. Agrawal, *Applications of nonlinear fiber optics 2nd Edition*, Academic Press, New York, (2008).

[18] V.E. Zakharov, L.A. Ostrovsky, Modulational instability: the beginning, *Physica D* **238** (2009) 540-548.

[19] T.B. Benjamin, K. Hasselmann, Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, *Proceedings of the Royal Society A* **299** (1967) 59-75.

[20] L.A. Ostrovsky, Propagation of wave packets and space-time self-focusing in nonlinear medium, *Soviet Physics JETP* **24** (1967) 797-800.

[21] A. Hasegawa, Observation of self-trapping instability of a plasma cyclotron wave in a computer experiment, *Physical Review Letters* **24** (1970) 1165-1168.

[22] C.M. De Sterke, Theory of modulational instability in fiber Bragg

مرجع‌ها

[1] D. Strickland, G. Mourou, Compression of amplified chirped optical pulse, *Optics Communications* **56** (1985) 219-221.

[2] G. Mourou, T. Tajima, S.V. Bulanov, Optics in relativistic regime, *Review of Modern Physics* **78** (2006) 309-371.

[3] An-Chun Tien, S. Backus, et. al., Short-pulse laser damage in transparent materials as a function of pulse durations, *Physical Review Letters* **82** (1999) 3883-3886.

[4] S. Suckewer, Ultra-intense laser: Beyond a pettawat, *Nature Physics* **7** (2011) 11-12.

[5] G. Mourou, J. Fisch, et. al., Exawat-Zettawat pulse generation and applications, *Optics Communications* **285** (2012) 720-724.

[6] C. Thaury, F. Quere, et. al., Plasma mirrors for ultrahigh-intensity optics, *Nature Physics* **3** (2007) 424-429.

[7] P. Michel, L. Divol, D. Turnbull, J.D. Moody, Dynamic control of the polarization of intense laser beams via optical wave mixing in plasmas, *Physical Review Letters* **113** (2014) 205001.

[8] Lu-Le Yu, Yao Zhao, et. al., Plasma optical modulator for intense lasers, *Nature Communications* **7** (2016) 11893.

[9] H.C. Wu, Z.M. Sheng, J. Zhang, Chirped pulse compression in nonuniform plasma gratings, *Applied Physics Letters* **87** (2005) 201502.

[10] H.C. Wu, Z.M. Sheng, Q.J. Zhang, J. Zhang, Manipulating ultrashort intense laser pulses by plasma Bragg gratings, *Physics of Plasmas* **12** (2005) 113103.

[11] S.X. Luan, Q.J. Zhang, Z.M. Sheng, The formation of relativistic electromagnetic solitons in plasma Bragg gratings induced by two counter-propagating laser pulses, *Applied Physics B* **93** (2008) 793-799.

- [25] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics 4th Edition*, Academic Press, New York, (2007).
- [26] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Mathematical handbook of formulas and table 3rd edition*, Mc Graw-Hill, New York (2009).
- gratings, *Journal of the Optica Society of America B* **15** (1998) 2660-2667.
- [23] A. Yariv, P. Yeh, *Photonics 6th Edition*, Oxford Univerity Press, Oxford, (2007).
- [24] J. Borhanian, Nonlinear birefringence in plasmas: Polarization dynamics, vector modulational instability and vector solitons, *Physics of Plasmas* **21** (2014) 062312.