

بازبهنجارش کوآنتومی سنجه همدوسی در مدل آیزینگ عرضی

لیلا بالازاده، قادر نجارباشی *

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دریافت: 1396/09/16 ویرایش نهائی: 1397/09/15 پذیرش: 1397/11/24

چکیده

در این مقاله به بررسی نظریه گروه بازبهنجارش کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای یک‌بعدی از ذرات اسپین $1/2$ می‌پردازیم. به این منظور، روابط بازگشتی را برای بازبهنجارش کوآنتومی سنجه همدوسی در حالت پایه به کار می‌گیریم. نمودار سنجه همدوسی بر حسب شدت میدان عرضی به‌ازای تعداد مراحل بازبهنجارش بیشتر، آشکارسازی نقطه گذار فاز کوآنتومی مدل آیزینگ میدان عرضی را نشان می‌دهد که مبین آن است که سنجه همدوسی می‌تواند نشانگر مناسبی برای گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد. همچنین رفتار واگرایی حاکم بر مشتق سنجه همدوسی را در مجاورت نقطه بحرانی، به دست می‌آوریم. با وجود آن که سنجه همدوسی به پایه‌ای که ماتریس چگالی نوشته شده است، بستگی دارد، نتایج نشان می‌دهد که نقطه گذار فاز کوآنتومی آشکار شده توسط سنجه همدوسی مستقل از پایه انتخابی است.

کلیدواژگان: بازبهنجارش کوآنتومی، سنجه همدوسی، گذار فاز کوآنتومی، مدل آیزینگ

مقدمه

هندسی در مدل آیزینگ عرضی با رویکرد بازبهنجارش کوآنتومی بررسی شده و هرکدام قادر به شناسایی نقطه بحرانی این مدل شده‌اند [3-5]. این توابع به‌اضافه توابع دیگری از قبیل سنجه درهم‌تیدگی منفیت، وفاداری کوآنتومی حالت پایه، ناهمخوانی کوآنتومی هندسی و غیره در انواع مدل‌های اسپینی در این رویکرد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [6 و 7]. در صورتی که بازبهنجارش کوآنتومی یک تابع همبستگی کوآنتومی در حالت پایه سیستم دارای رفتار غیر تحلیلی در مجاورت نقطه بحرانی باشد، می‌توان گفت این تابع همبستگی می‌تواند نشانگر مناسبی برای گذارهای فازی کوآنتومی باشد. بنابراین اهمیت دارد که این توابع را شناخته و با رویکرد نظریه گروه بازبهنجارش کوآنتومی مورد

در سال‌های اخیر مسئله آشکارسازی و شناسایی نقاط گذار فاز کوآنتومی [1] با استفاده از توابع همبستگی کوآنتومی مانند درهم‌تیدگی کوآنتومی مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. به‌علاوه نظریه گروه بازبهنجارش کوآنتومی که توسط ویلسون در سال 1975 مطرح شد [2]، نقش مهمی در تعیین رفتار بحرانی سیستم‌های کوآنتومی دارد. ثابت شده است که اعمال روابط بازگشتی نظریه گروه بازبهنجارش بر توابع همبستگی کوآنتومی منجر به آشکارسازی نقاط بحرانی کوآنتومی می‌شود. توابع همبستگی مختلفی از قبیل سنجه درهم‌تیدگی تلافی، ناهمخوانی کوآنتومی و فاز

* نویسنده مسئول: najarbashi@uma.ac.ir

گذارهای فازی حالت پایه سیستم در اثر تغییرات پارامترهای مرتبط سیستم را گذارهای فازی کوآنتومی می‌نامیم، پس می‌توان گفت $\lambda = 1$ نقطه گذار فاز کوآنتومی این مدل هست. به منظور اعمال نظریه گروه بازبهنجارش کوآنتومی، زنجیره N مکانی را به $N/2$ بلوک دو اسپینی تقسیم می‌کنیم (شکل 1)، در این صورت هامیلتونین سیستم به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$H = H^B + H^{BB} \quad 2$$

در اینجا جمله اول، هامیلتونین داخل بلوک $H^B = \sum_{I=1}^{N/2} h_I^B$ است که مجموع هامیلتونین‌های تک تک بلوک‌ها h_I^B هست و داریم:

$$h_I^B = -J(\sigma_{1,I}^x \sigma_{2,I}^x + \lambda \sigma_{1,I}^z) \quad 3$$

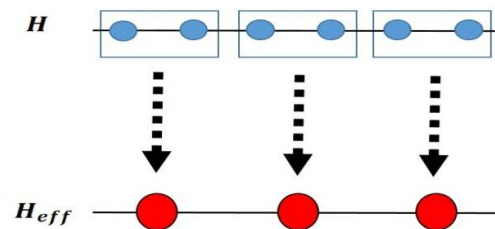
جمله دوم، هامیلتونین برهم‌کنش بین بلوک‌ها هست که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$H^{BB} = -J \sum_{I=1}^{N/2} (\sigma_{2,I}^x \sigma_{1,I+1}^x + \lambda \sigma_{2,I}^z) \quad 4$$

در اینجا $\sigma_{i,I}^\alpha$ نشانگر مؤلفه α از ماتریس پاولی متعلق به اولین مکان در بلوک I -ام هست. هامیلتونین داخل یک بلوک به فرم ماتریسی زیر درمی‌آید:

$$h_I^B = \begin{pmatrix} -J\lambda & 0 & 0 & -J \\ 0 & -J\lambda & -J & 0 \\ 0 & -J & J\lambda & 0 \\ -J & 0 & 0 & J\lambda \end{pmatrix} \quad 5$$

بررسی قرار دهیم. سنجه‌های همدوسی از جمله توابع همبستگی هستند که تاکنون با این رویکرد مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. در این مقاله یکی از تعاریف سنجه همدوسی را به عنوان تابع همبستگی کوآنتومی انتخاب کرده، در حالت پایه مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای یک‌بعدی از اسپین‌های $1/2$ تحت نظریه گروه بازبهنجارش کوآنتومی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.



شکل 1. یک مرحله بازبهنجارش کوآنتومی با بلوک‌بندی دوتایی اسپین‌ها.

بازبهنجارش کوآنتومی مدل آیزینگ عرضی

هامیلتونین مدل آیزینگ عرضی در زنجیره‌ای دوره‌ای از N ذره اسپین $1/2$ به شکل زیر هست:

$$H = -J \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \lambda \sigma_i^z) \quad 1$$

در اینجا i نشانگر مکان اسپین، $J > 0$ ثابت جفت‌شدگی همسایگی نزدیک، λ شدت میدان مغناطیسی عرضی و (σ_i^α) ($\alpha = x, y, z$) ماتریس‌های پاولی متعلق به اسپین i -ام هستند.

با توجه به حل دقیق [8,9]، پارامتر نظم این سیستم (مغناطش) در حالت پایه از مقدار غیر صفر به‌ازای $\lambda < 1$ (فاز فرومغناطیس) به مقدار صفر به‌ازای $\lambda > 1$ (فاز پارامغناطیس) تغییر می‌کند. با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
 P_0 \sigma_{1,I}^x P_0 &= 2ab \tilde{\sigma}_I^x, \\
 P_0 \sigma_{2,I}^x P_0 &= (a^2 + b^2) \tilde{\sigma}_I^x, \\
 P_0 \sigma_{1,I}^z P_0 &= (a^2 - b^2) I, \\
 P_0 \sigma_{2,I}^z P_0 &= (a^2 - b^2) \tilde{\sigma}_I^z.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

که در اینجا $a = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$ و همچنین

$\tilde{\sigma}_I^x$, $\tilde{\sigma}_I^z$ و I ماتریس‌های پاؤلی و عملگر واحد متعلق به فضای دو حالته بعد از بلوک‌بندی می‌باشند. هر مرحله که این بلوک‌بندی انجام گیرد، یک مرحله بازبهنجارش کوانتومی صورت می‌گیرد و مجموعه هامیلتونین‌های زیر را خواهیم داشت که بالانویس n تعداد مراحل بازبهنجارش اعمال شده را نشان می‌دهد.

$$\{H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}, \dots, H^{(n)}, \dots\}.$$

با استفاده از روابط بالا، هامیلتونین مؤثر بعد از یک مرحله بازبهنجارش به شکل زیر درمی‌آید:

$$H^{(1)} = -J^{(1)} \sum_{i=1}^{N/2} (\tilde{\sigma}_i^x \tilde{\sigma}_{i+1}^x + \lambda^{(1)} \tilde{\sigma}_i^z) \tag{11}$$

که در اینجا مشاهده می‌شود هامیلتونین به دست آمده به فرم هامیلتونین اولیه هست و در نتیجه با مقایسه هامیلتونین‌های قبل از بازبهنجارش و بعد از بازبهنجارش به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$J^{(1)} = \frac{J}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \lambda^{(1)} = \lambda^2 \tag{12}$$

نقطه بحرانی، نقطه ثابت روابط بازگشتی است که با حل $\lambda = \lambda^2$ به دست می‌آید که برابر با جواب حل دقیق تحلیلی $\lambda_c = 1$ هست. با هر مرحله اعمال

ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای این ماتریس به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 |e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} (q|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), E_1 = -J\sqrt{1+\lambda^2}, \\
 |e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} (q|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), E_2 = -J\sqrt{1+\lambda^2}, \\
 |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (r|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), E_3 = J\sqrt{1+\lambda^2}, \\
 |e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (r|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), E_4 = J\sqrt{1+\lambda^2},
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

که در اینجا $q = \lambda + \sqrt{1+\lambda^2}$ و $r = \lambda - \sqrt{1+\lambda^2}$ برقرار است. عملگر تصویر با استفاده از دو ویژه‌بردار تبهگن حالت پایه با انرژی $-J\sqrt{1+\lambda^2}$ ساخته می‌شود:

$$P_0^I = |e_1\rangle_I \langle\uparrow\uparrow| + |e_2\rangle_I \langle\downarrow\downarrow|. \tag{7}$$

این عملگر، فضای حالت دو اسپین داخل بلوک را به یک اسپین دو حالته شامل حالت‌های $|\uparrow\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\downarrow\rangle$ تصویر می‌کند. عملگر تصویر کل بلوک‌ها خواهد بود:

$$P_0 = \prod_{I=1}^{N/2} P_0^I \tag{8}$$

با اعمال عملگر تصویر کلی به هامیلتونین اولیه، هامیلتونین مؤثر به دست می‌آید:

$$H_{eff} = P_0 H P_0 \tag{9}$$

روابط تأثیر عملگر تصویر روی ماتریس‌های پاؤلی مکان‌های اول و دوم هر بلوک خواهد بود:

که در اینجا $F(x) = \frac{1}{2} \left| \frac{x}{q\sqrt{1+\lambda^2}} \right|$ همچنین روابط

زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} Q &= qe^{2i\alpha} \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ R &= e^{2i\alpha} \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + q \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \\ W &= (q - e^{2i\alpha}) \sin(\beta). \end{aligned} \quad 17$$

مشاهده می‌شود که سنجه هم‌دوسی به شدت میدان عرضی λ و پارامترهای پایه انتخابی $\{\alpha, \beta\}$ بستگی دارد. با توجه به اینکه شدت میدان عرضی در هر مرحله از بازبهنجارش کوآنتومی تغییر می‌کند، پس سنجه هم‌دوسی تابعی از تعداد مراحل بازبهنجارش کوآنتومی هست.

ابتدا به بررسی سنجه هم‌دوسی محاسبه شده در پایه استاندارد می‌پردازیم که با جای‌گذاری $(\alpha = 0, \beta = 0)$ در رابطه 16 به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \quad 18$$

در شکل 2، سنجه هم‌دوسی محاسبه شده در پایه استاندارد (رابطه 18) برحسب شدت میدان عرضی و به‌ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n رسم شده است. با توجه به شکل 2 مشاهده می‌شود که نقطه $\lambda = 1$ ، نقطه ثابت نمودارها در تمام مراحل بازبهنجارش است. همچنین به‌ازای $n = 9$ در نقطه $\lambda = 1$ سنجه هم‌دوسی به‌طور ناگهانی از مقدار یک به مقدار صفر تغییر می‌کند. این نتیجه در تطابق با فاز فرومغناطیس (هم‌دوس) در ناحیه $\lambda < 1$ و فاز

بازبهنجارش کوآنتومی ضرایب جدیدی تولید می‌شوند که توابعی از ضرایب یک مرحله قبل می‌باشند:

$$\lambda^{(n+1)} = (\lambda^{(n)})^2, J^{(n+1)} = \frac{J^{(n)}}{\sqrt{1+(\lambda^{(n)})^2}} \quad 13$$

بازبهنجارش کوآنتومی سنجه هم‌دوسی

در این بخش به بررسی سنجه هم‌دوسی در حالت پایه مدل آیزینگ عرضی می‌پردازیم. تعریف‌های مختلفی برای سنجه هم‌دوسی وجود دارد که در اینجا ما از تعریف زیر استفاده می‌کنیم [10]:

$$C(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| \quad 14$$

کلی‌ترین شکل پایه‌های کیوبیت در کره بلوخ برحسب پایه‌های استاندارد به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) |\downarrow\downarrow\rangle, \\ |n_{\perp}\rangle &= -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad 15$$

حالت پایه مدل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= a |\uparrow\uparrow\rangle + b |\downarrow\downarrow\rangle \\ &= A |nn\rangle + B |m_{\perp}\rangle + C |n_{\perp}n\rangle + D |n_{\perp}n_{\perp}\rangle. \end{aligned}$$

با محاسبه سنجه هم‌دوسی برای رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C &= F(QR) + F(\bar{Q}\bar{R}e^{4i\alpha}) + F(QW) + \\ &F(\bar{Q}\bar{W}e^{4i\alpha}) + F(R\bar{W}e^{2i\alpha}) + F(\bar{R}W e^{2i\alpha}) + \\ &2F(W\bar{W}e^{2i\alpha}), \end{aligned} \quad 16$$

سنجه همدوسی در مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی هست و در مراحل به اندازه کافی بزرگ بازبهنجارش کوآنتومی، نمودار سنجه همدوسی بر حسب شدت میدان عرضی رفتار پله مانند پیدا می کند. در شکل 4، سنجه همدوسی بهنچار شده در زنجیره ای به طول $N = 1024$ ($n = 9$) به ازای پایه های مختلف رسم شده است. شکل 4 نشان می دهد با وجود آن که سنجه همدوسی به پایه ای که ماتریس چگالی نوشته شده است، بستگی دارد اما نقطه گذار فاز کوآنتومی آشکار شده توسط سنجه همدوسی، مستقل از پایه انتخابی است.

در شکل 5 نحوه رفتار مختصه کمینه مشتق سنجه همدوسی، λ_{min} را حول نقطه بحرانی λ_c بر حسب طول زنجیره مدل آیزینگ عرضی N ، بررسی می کنیم. یافته های عددی از بررسی شکل 5 نشانگر رفتار مقیاسی زیر هست

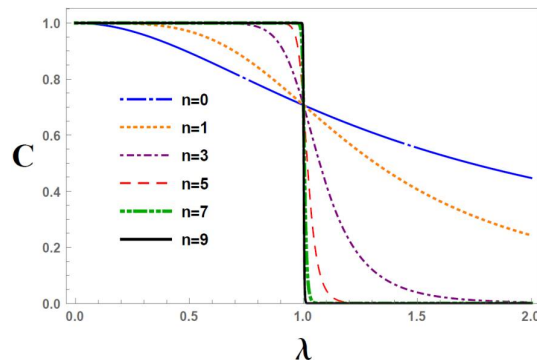
$$\lambda_{min} = \lambda_c + N^{-0.97} \quad 19$$

رابطه بالا نشان می دهد که در حد ترمودینامیکی، $N \rightarrow \infty$ ، λ_{min} به λ_c میل می کند.

در شکل 6 نمودار لگاریتمی $\left| \frac{dC}{d\lambda} \right|_{min}$ بر حسب طول زنجیره مدل آیزینگ عرضی N ، رسم شده است که نموداری خطی است و رفتار مقیاسی زیر را نشان می دهد:

$$\left| \frac{dC}{d\lambda} \right|_{min} \sim N^{1.003} \quad 20$$

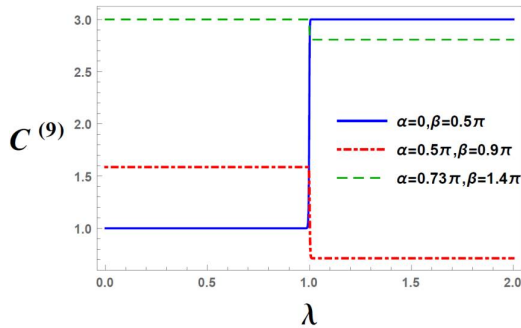
پارامغناطیس (غیرهمدوس) در ناحیه $\lambda > 1$ هست. این مطلب نشان می دهد که $\lambda = 1$ نقطه گذار فاز کوآنتومی این مدل هست.



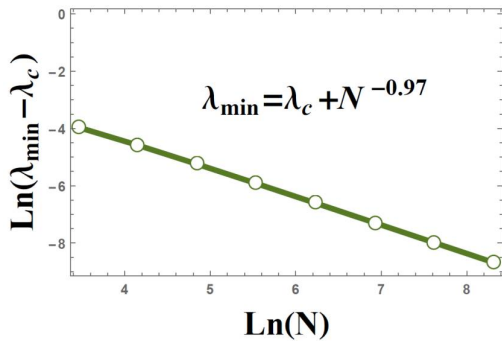
شکل 2. سنجه همدوسی (محاسبه شده در پایه استاندارد) برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی بر حسب λ شدت میدان عرضی و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n .

همچنین در شکل 3 مشتق اول سنجه همدوسی محاسبه شده در پایه استاندارد بر حسب شدت میدان عرضی به ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی رسم شده است که مشاهده می شود به ازای مراحل بهنچارش بیشتر، رفتار تیزتری در مجاورت نقطه بحرانی ظاهر می شود. به این ترتیب مثال تأییدگری پیدا شد که با رویکرد بازبهنجارش کوآنتومی سنجه همدوسی قادر به شناسایی نقطه گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی هستیم. همان طور که در مقدمه ذکر شد، سایر توابع همبستگی کوآنتومی مانند سنجه تلافی درهم تنیدگی، ناهمخوانی کوآنتومی و فاز هندسی نیز قادر به شناسایی نقطه گذار فاز کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی می باشند [3-5].

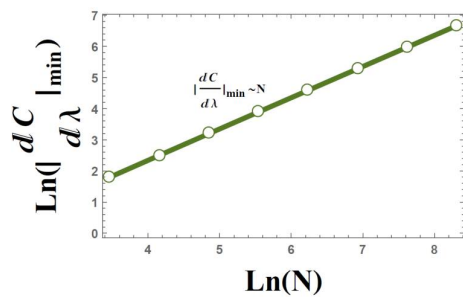
اگر سنجه همدوسی را در هر پایه دیگری حساب کنیم، مشاهده می شود که نقطه $\lambda = 1$ نقطه ثابت نمودارهای



شکل 4. سنجه همدوسی بهنجار شده در زنجیره‌ای به طول $N = 1024$ محاسبه شده در پایه‌های مختلف برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی بر حسب شدت میدان عرضی λ .



شکل 5. رفتار مقیاسی $|\lambda_{\min} - \lambda_c|$ بر حسب طول زنجیره مدل آیزینگ عرضی N ، که در اینجا نقطه اکسترم نمودار شکل 3 هست.



شکل 6. نمودار لگاریتمی $\frac{dC}{d\lambda}_{\min}$ بر حسب طول زنجیره مدل آیزینگ

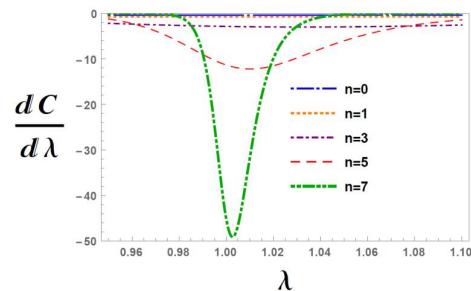
عرضی N . نمودار خطی است و رفتار مقیاسی $\sim N^{1.003}$ را $\frac{dC}{d\lambda}_{\min}$ نشان می‌دهد.

طبق رابطه 20، $\left. \frac{dC}{d\lambda} \right|_{\min}$ در حد ترمودینامیکی واگرا می‌شود و توان N ، رفتار واگرایی آن را در مجاورت نقطه بحرانی نشان می‌دهد.

در آخر لازم به ذکر است که سنجه‌های همدوسی دیگری نیز معرفی شده است. به عنوان نمونه سنجه همدوسی مبتنی بر آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{C}(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho) \quad 21$$

که در اینجا $S(\rho)$ آنتروپی فون نویمان می‌باشد و ρ_{diag} ماتریسی است که با حذف عناصر غیرقطری ماتریس چگالی ρ به دست می‌آید. نویسندگان این مقاله، این سنجه را نیز برای مدل آیزینگ عرضی بررسی کرده‌اند، از آنجایی که نتایج به دست آمده توسط سنجه 21 مانند نقطه و نمای بحرانی، مشابه می‌باشد، از ذکر آن در این مقاله خودداری شده است.



شکل 3. مشتق اول سنجه همدوسی (پایه استاندارد) برای حالت پایه مدل آیزینگ عرضی بر حسب شدت میدان عرضی و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوآنتومی n .

نتیجه گیری

در این مقاله، زنجیره‌ای یک‌بعدی از اسپین‌های $1/2$ با مدل آیزینگ عرضی را با رویکرد بلوک‌بندی دوتایی نظریه گروه بازهنجارش مورد بررسی قرار دادیم. یکی از تعاریف سنجه همدوسی را در حالت پایه سیستم مطالعه کرده، روابط بازگشتی نظریه گروه بازهنجارش کوآنتومی را به آن اعمال کردیم. با توجه به نمودار سنجه همدوسی محاسبه شده در پایه استاندارد و مشتق اول آن برحسب شدت میدان عرضی مشاهده می‌شود که به‌ازای تعداد مراحل بازهنجارش بیشتر، رفتار غیر تحلیلی در مجاورت نقطه بحرانی کوآنتومی ظاهر می‌شود. این رفتار تأیید می‌کند که سنجه همدوسی می‌تواند نشانگر مناسبی برای آشکارسازی گذار فازی کوآنتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد. همچنین نمودار سنجه همدوسی محاسبه شده در پایه‌های مختلف نشان می‌دهد که با وجود آنکه سنجه همدوسی به پایه‌ای که ماتریس چگالی نوشته شده است، بستگی دارد، اما نقطه گذار فاز کوآنتومی آشکار شده توسط سنجه همدوسی مستقل از پایه انتخابی است.

مرجع‌ها

- group to quantum-information systems, *Description Physical Review A* **76** (2007) 060304.
- [4] Xiu-Xing. Zhang, Hong-Rong. Li, The renormalization of geometric quantum discord in the transverse Ising model, *Modern Physics Letters B* **29** 3 (2015) 1550002.
- [5] R. Jafari, Quantum renormalization group approach to geometric phases in spin chains, *Physics Letters A* **377** (2013) 3279-3282.
- [6] A. Langari, F. Pollmann, M. Siahatgar, Ground-state fidelity of the spin-1 Heisenberg chain with single ion anisotropy: quantum renormalization group and exact diagonalization approaches, *Journal of Physics: Condens. Matter* **25** (2013) 406002.
- [7] J. Maziero *et al.*, Quantum and classical thermal correlations in the XY spin-12 chain, *Physical Review A* **82** (2010) 012106.
- [8] M.A. Martin-Delgado, G. Sierra, Real Space Renormalization Group Methods and Quantum Groups, *Physical Review Letters* **76** (1996) 1146-1149.
- [9] P. Pfeuty, The one-dimensional Ising model with a transverse field, *Annals of Physics* **57** (1970) 79-90.
- [10] T. Baumgratz, M. Cramer, M.B. Plenio, Quantifying Coherence, *Physical Review Letters* **113** (2014) 140401.
- [1] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [2] K.G. Wilson, The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem, *Reviews of Modern Physics* **47** (1975) 773.
- [3] M. Kargarian, R. Jafari, A. Langari, Renormalization of concurrence: The application of the quantum renormalization