

## Dynamical phase transition in n-cluster spin models

Saeid Ansari<sup>\*1</sup>, Rouhollah Jafari<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Engineering Sciences and Physics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Iran

<sup>2</sup>Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran

Received: 22.07.2019    Final revised: 14.09.2019    Accepted: 28.10.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14922](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14922)

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



### Abstract

In this paper, we consider a spin chain with cluster interaction which is under the transverse magnetic field. We also study its dynamical behavior as the magnetic field changes suddenly. This system has an exact solution by means of Jordan-Wigner transformations. We show that if the magnetic field changes in such a way that its initial and final value are in two different equilibrium phases, then the rate function of return probability diverges periodically in time. In case this divergence is in time, it is called dynamical phase transition. If the quench has been done within the same phase, dynamical phase transition will not occur. Furthermore, we have shown that Fisher zero lines cross the imaginary axes when the dynamical phase transition occurs.

**Keywords:** Phase transition, N-cluster model, Quantum dynamics

---

\* Corresponding Author: saeid.ansari@gmail.com

گذار فاز دینامیکی در مدل اسپینی  $n$ -خوشه‌ایسعید انصاری<sup>1\*</sup>، روح‌ا... جعفری<sup>2</sup>

<sup>1</sup> گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین‌زهره، بوئین‌زهره، ایران  
<sup>2</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران

دریافت: 1398/04/31 ویرایش نهائی: 1398/06/23 پذیرش: 1398/08/06

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14922](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14922)

## چکیده

در این مقاله رفتار دینامیکی زنجیره اسپینی با برهم‌کنش خوشه‌ای، که تحت تأثیر میدان مغناطیسی عرضی است، را در اثر تغییر ناگهانی میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌دهیم. این سیستم با استفاده از تبدیلات جردن-ویگنر دارای حل دقیق است. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر تغییرات میدان مغناطیسی به گونه‌ای باشد که مقدار اولیه و نهایی آن در دو فاز تعادلی مختلف باشند، تابع نرخ احتمال بازگشت در دوره‌های زمانی متناوب و آگرا می‌شود که این واگرایی در زمان، گذار فاز دینامیکی نامیده می‌شود. در صورتی که تغییر میدان در فاز یکسان انجام شود، گذار فاز دینامیکی رخ نمی‌دهد. همچنین بررسی خطوط صفرهای فیشر نشان می‌دهد که در صورت بروز گذار فاز دینامیکی خطوط صفرهای فیشر محور موهومی را قطع خواهند کرد.

کلیدواژه‌گان: گذار فاز، مدل  $n$ -خوشه‌ای، دینامیک کوآنتومی

## مقدمه

غیرتحلیلی دارند [1]. علی‌رغم اینکه نظریه گذار فاز تعادلی، به‌ویژه برای سیستم‌های کلاسیکی مورد مطالعه وسیعی قرار گرفته است، اما رفتار سیستم‌های بس‌ذره‌ای کوآنتومی در حالت غیرتعادلی هنوز شناخته شده نیست.

اخیراً مطالعه ویژگی‌های غیرتعادلی سیستم‌های کوآنتومی مورد توجه بسیاری واقع شده است [2-7]. از موضوعات به‌روز در این حوزه می‌توان به شناخت و درک رفتار سیستمی که دور از حالت تعادل قرار گرفته اشاره کرد. از روش‌های ایجاد سیستم‌های غیرتعادلی می‌توان به‌دگرگونی ناگهانی کوآنتومی<sup>1</sup> اشاره کرد که در آن ابتدا سیستم در یک حالت اولیه خوش‌رفتار قرار دارد و سپس یک یا چند پارامتر خارجی در هامیلتونی

گذار فاز یکی از مهم‌ترین پدیده‌هایی است که در سیستم‌های بس‌ذره‌ای رخ می‌دهد. در طی گذار فاز، کمیت‌های ترمودینامیکی دچار تغییر غیرتحلیلی می‌شوند. برای مثال در اثر تغییر دما، گذار فاز مایع به‌گاز رخ می‌دهد و در طی این تحول چگالی سیستم به‌صورت ناگهانی تغییر می‌کند به‌نحوی که دانستن چگالی انرژی در یک فاز برای پیش‌بینی رفتار آن در فاز دیگر کافی نیست. یا در گذار فاز پارامغناطیس به فرومغناطیس، مغناطش تغییر غیرتحلیلی خواهد داشت. آنچه که مطالعه نظریه گذار فاز تعادلی را جذاب می‌کند این است که با وجود خوش‌رفتار بودن هامیلتونی میکروسکوپی، کمیت‌های ترمودینامیکی رفتار

\* نویسنده مسئول: saeid.ansari@gmail.com

<sup>1</sup> Quantum quench

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

این مقاله تحت مجوز کپی‌رایت کامنز تخصصی 4.0 بین‌المللی می‌باشد



[11,13]. مشابه به آنچه که در مورد سیستم کلاسیکی انجام می‌دهیم، قدم بعدی تعیین رفتار غیرتحلیلی  $f(z)$  و یا به عبارت دیگر یافتن صفرهای  $Z(z)$  است که صفرهای فیشر<sup>3</sup> نامیده می‌شوند [11,13,14,16]. لازم به ذکر است که این گذار فازهای دینامیکی را می‌توان با استفاده از رفتارهای غیرتحلیلی تابع نرخ احتمال بازگشت<sup>4</sup> (پژواک لاشمیت<sup>5</sup>) نیز تعیین نمود که با  $R(t) = -\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \ln |L(t)|^2$  تعریف می‌شود [11,14,17-20].

نتایج تحلیلی اولیه به دست آمده برای گذار فاز دینامیکی در مدل آیزینگ عرضی یک بعدی [11]، در تحقیقات متعددی هم برای مدل‌های انتگرال‌پذیر [16,20,21,22] و هم انتگرال‌ناپذیر [13,14,16,17,19] مورد تأیید قرار گرفته و نشان داده شده است که گذار فاز دینامیکی اکثراً هنگامی رخ می‌دهد که دگرگونی ناگهانی از نقطه بحرانی کوآنتومی تعادلی عبور کند؛ یعنی مقدار اولیه و نهایی پارامتری که دچار تغییر می‌شود، در دو فاز تعادلی مختلف قرار داشته باشد. این مطالعات به سیستم‌های با ابعاد بیشتر [23,24]، پارامتر نظم توپولوژیکی دینامیکی [25] و همچنین دگرگونی تدریجی<sup>6</sup> [26] نیز تعمیم داده شده است.

از جمله سیستم‌های اسپینی، مدل آیزینگ با برهم‌کنش خوشه‌ای است؛ چنین سیستمی را می‌توان در آزمایشگاه توسط اتم‌های فوق سردی که در یک شبکه اپتیکی قرار گرفته‌اند ایجاد نمود [27-30]. پیشرفت‌های صورت گرفته در این حوزه بستر جدیدی را برای تحقیق درباره دینامیک غیرتعادلی پدیده‌های بحرانی کوآنتومی فراهم کرده است. آنچه بررسی سیستم‌های اسپینی با برهم‌کنش خوشه‌ای را دارای اهمیت می‌کند، وجود فازهای توپولوژیک در آنها است [31] که این ویژگی

ناگهان تغییر می‌کند و در نتیجه این تغییر، دینامیک سیستم توسط عملگر تحول زمانی یکانی توصیف می‌شود [18,9]. دینامیک غیرتعادلی سیستمی که دگرگونی کوآنتومی در آن رخ داده را می‌توان با روش‌های متفاوتی توصیف کرد که از مکانیک آماری تعادلی اقتباس شده‌اند. اولین بار فیشر [10] مشاهده کرد که گذار فاز در یک سیستم ترمودینامیکی با تعیین رفتار غیرتحلیلی در چگالی انرژی آزاد سیستم در حالت تعادل مشخص می‌شود که اطلاعات آن را می‌توان با تجزیه و تحلیل صفرهای تابع پارش در صفحه دمای موهومی به دست آورد. این صفرهای تابع پارش، محور حقیقی را در حد ترمودینامیک قطع می‌کنند. این نقاط تقاطع نشانگر غیرتحلیلی بودن چگالی انرژی آزاد سیستم هستند.

در تحقیقات اخیر، ایده گذار فاز دینامیکی<sup>1</sup> مطرح شده است که در آن رفتار غیرتحلیلی انرژی آزاد دینامیکی در صفحه زمان موهومی مورد بررسی قرار می‌گیرد [11]. این ایده از تشابه بین تابع پارش کانونی سیستم تعادلی  $Z(\beta) = \text{Tr} \exp[-\beta H]$  و تابع پارش مرزی کوآنتومی  $Z(z) = \langle \psi_0 | \exp[-zH] | \psi_0 \rangle$  گرفته شده [12] که، برای  $z = it$ ، مشابه دامنه لاشمیت<sup>2</sup> (LA) است.

دامنه لاشمیت  $\langle \psi_0(h_1) | \exp[-iH(h_2)t] | \psi_0(h_1) \rangle$  در واقع دامنه همپوشانی حالت کوآنتومی اولیه  $|\psi(h_1)\rangle$  با حالت تحول یافته زمانی خودش است که تحت تأثیر هامیلتونی پس از دگرگونی  $H(h_2)$ ، دچار تحول زمانی شده است. در صفحه زمان موهومی  $(z)$ ، چگالی انرژی آزاد دینامیکی به شکل  $f(z) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \ln Z(z) / N$  تعریف می‌شود که در آن  $N$  تعداد درجات آزادی سیستم است [15-15].

<sup>4</sup> Rate function of return probability

<sup>5</sup> Loschmidt echo

<sup>6</sup> Slow quench

<sup>1</sup> Dynamical phase transition

<sup>2</sup> Loschmidt amplitude

<sup>3</sup> Fisher zeros

که در آن  $c_j$  و  $c_j^\dagger$  به ترتیب عملگرهای فنا و خلق فرمیون بدون اسپین در موقعیت  $j$  هستند.

همیلتونی فوق شبیه به همیلتونی مدل آیزینگ کوآنتومی در میدان خارجی است [35]. تفاوت اصلی این دو مدل در این است که مدل آیزینگ شامل جملاتی است که در آن فرمیون‌های مجاور با هم برهم کنش دارند، اما در مدل خوشه‌ای هر فرمیون با فرمیونی که در موقعیت  $n+1$  قرار دارد برهم کنش می‌کند. شاید این‌طور به نظر برسد که همیلتونی فوق را می‌توان با جابه‌جایی جملات به صورتی نوشت که در آن فرمیون‌های مجاور هم برهم کنش داشته باشند و بدین ترتیب جملات همیلتونی مدل آیزینگ به دست آید؛ اما باید توجه داشت که در اثر جابه‌جایی عملگرهای فرمیونی، جملات دیگری به همیلتونی اضافه می‌شوند و در نتیجه همیلتونی حاصل با مدل آیزینگ متفاوت خواهد بود.

برای قطری کردن همیلتونی ابتدا با استفاده از تبدیلات فوریه، عملگرهای فرمیونی را در فضای اندازه حرکت نمایش می‌دهیم

$$H^{(n)} = \sum_{k>0} \left[ a^{(n)} (c_k^\dagger c_k - c_{-k}^\dagger c_{-k}) + i b^{(n)} (c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - c_{-k} c_k) \right]$$

$$a^{(n)} = -2(J \cos((n+1)k) - h)$$

$$b^{(n)} = -2J \sin((n+1)k)$$

3

که در آن  $n=0, \dots, \frac{L}{2}-1$ ،  $k = \frac{\pi(2n+1)}{L}$  و  $L$

تعداد کل نقاط شبکه است. در حد ترمودینامیک مدهای

مجاز  $k$  در بازه  $k \in [-\pi, \pi]$  قرار خواهند داشت.

با استفاده از پایه نامبو<sup>1</sup> و با تعریف اسپینور دو مؤلفه‌ای

فرمیونی

باعث می‌شود این سیستم‌ها ساده‌ترین ابزار برای به‌کارگیری در محاسبات کوآنتومی باشند [32] و به همین دلیل مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. ما در این مقاله گذار فاز دینامیکی زنجیره اسپینی با برهم کنش خوشه‌ای را که تحت تأثیر میدان مغناطیسی عرضی است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### مدل $n$ -خوشه‌ای و دگرگونی ناگهانی در میدان عرضی

دسته‌ای از مدل‌های اسپین  $1/2$  در یک بعد را در نظر می‌گیریم که دارای برهم کنش خوشه‌ای هستند و در میدان مغناطیسی خارجی قرار دارند. در این سیستم، هر ذره با ذره‌ای که در موقعیت  $n+1$  بعد از خودش قرار دارد برهم کنش می‌کند. چنین سیستمی با همیلتونی زیر شکل نمایش داده می‌شود [33]:

$$H^{(n)} = -J \sum_j \sigma_j^x O_{j+n+1}^z \sigma_{j+n+1}^x + h \sum_j \sigma_j^z \quad 1$$

که

$$O_{j+n+1}^z = \bigotimes_{k=1}^n \sigma_{j+k}^z$$

$\sigma_j^\alpha$  عملگرهای پائولی،  $J$  پارامتر جفت‌شدگی و  $h$  بزرگی میدان مغناطیسی خارجی است.

با استفاده از تبدیلات جردن-ویگنر [34] می‌توان همیلتونی فوق را به صورت سیستمی از فرمیون‌های بدون برهم کنش و فاقد اسپین تبدیل کرد [35-39]. خواهیم داشت:

$$H^{(n)} = -J \sum_j (c_j^\dagger c_{j+n+1} + c_j^\dagger c_{j+n+1}^\dagger + \text{h.c.}) + h \sum_j (2c_j^\dagger c_j - 1) \quad 2$$

<sup>1</sup> Nambu formalism

در این بخش رفتار غیر تعادلی سیستم را که به واسطه اعمال دگرگونی ناگهانی کوآنتومی در میدان مغناطیسی عرضی به وجود می آید مورد بررسی قرار می دهیم. فرض می کنیم سیستم در زمان های  $t < 0$ ، در میدان مغناطیسی اولیه  $h = h_i$  در حالت پایه  $|\psi_0^{(n)}\rangle = |\psi_i^{(n)}\rangle$  هامیلتونی  $H_i^{(n)} = H^{(n)}(h_i)$  قرار دارد و در  $t = 0$  میدان مغناطیسی به طور آنی به  $h_f$  تغییر داده می شود. به منظور بررسی نحوه تحول زمانی ویژه حالت ها و تعیین گذار فاز دینامیکی، دامنه لاشمیت را محاسبه می کنیم. این تابع در واقع اندازه تصویر بردار حالت تحول یافته زمانی  $|\psi_0^{(n)}(t)\rangle$  نسبت به حالت اولیه  $|\psi_0^{(n)}\rangle$  است:

9

$$L_k(t) = \langle \psi_0^{(n)} | \psi_0^{(n)}(t) \rangle = \langle \psi_0^{(n)} | e^{-zH_k^{(n)}(h_f)} | \psi_0^{(n)} \rangle$$

که در آن  $H^{(n)}(h_f)$ ، هامیلتونی بعد از تغییر ناگهانی میدان مغناطیسی، با ویژه حالت های  $|\psi_0^{(n)}(h_f)\rangle$  است و  $z = it + t'$  کمیت زمانی مختلط است که از دو بخش حقیقی و موهومی تشکیل شده است. لازم به ذکر است که حالت اولیه سیستم ویژه حالت هامیلتونی بعد از دگرگونی ناگهانی نیست. به عبارت دیگر به دلیل تغییر ناگهانی پارامتر هامیلتونی، سیستم فرصت کافی برای گذار به حالت پایه هامیلتونی جدید را نداشته و همچنان در حالت پایه هامیلتونی اولیه باقی می ماند و فقط تحول زمانی سیستم توسط هامیلتونی تغییر یافته کنترل می شود. بعد از انجام محاسبات، دامنه لاشمیت به شکل زیر به دست می آید

$$L_k(t) = e^{-i(\varepsilon_k^{(n)}(h_f) - \varepsilon_k^{(n)}(h_i))} \left\{ \cos^2(\theta_k^{(n)}(h_i) - \theta_k^{(n)}(h_f)) + e^{-2z\varepsilon_k^{(n)}(h_f)} \sin^2(\theta_k^{(n)}(h_i) - \theta_k^{(n)}(h_f)) \right\}$$

10

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \Psi_k^\dagger = (c_k^\dagger \quad c_{-k}) \quad 4$$

$$\{\Psi_{k\alpha}, \Psi_{k'\alpha'}\} = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\beta,\beta'}$$

می توان هامیلتونی را به شکل زیر نوشت:

5

$$H^{(n)} = \sum_{\alpha,\beta} \Psi_{k\alpha}^\dagger H_{\alpha\beta} \Psi_{k\beta} = (c_k^\dagger \quad c_{-k}) \begin{pmatrix} 2(h - J \cos k) & -2iJ \sin k \\ 2iJ \sin k & 2(h - J \cos k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}$$

که با قطری کردن هامیلتونی  $H_{\alpha\beta}$  انرژی سیستم به سادگی قابل محاسبه است:

$$\varepsilon^{(n)} = \pm 2\sqrt{(h - J \cos(n+1)k)^2 + J^2 \sin^2(n+1)k}$$

6

به همین ترتیب می توان ویژه حالت پایه بهنجار شده را نیز به دست آورد:

$$|\psi_0^{(n)}\rangle = (-i \sin \theta^{(n)} + \cos \theta^{(n)} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger) |0_k, 0_{-k}\rangle$$

7

که در آن

$$\cos \theta^{(n)} = \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon^{(n)} + a^{(n)}}{b^{(n)}} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad 8$$

با استفاده از روابط فوق می توان نشان داد که گذار فاز (بسته شدن گاف انرژی) در نقطه  $h = 1$  رخ می دهد. به عبارت دیگر در حالتی که  $h < 1$  باشد سیستم در فاز خوشه ای قرار دارد که با افزایش میدان مغناطیسی، سیستم در نقطه گذار فاز دچار گذار فاز کوآنتومی شده و وارد فاز پارامغناطیس می شود [33].

دامنه لاشمیت و تابع احتمال

$$z_m^{*(n)} = \frac{1}{\varepsilon_k^{(n)}(h_f)} \left\{ (2m+1)\pi + i \ln \left[ \cot^2(\phi_k^{(n)}) \right] \right\},$$

$$(m \in \mathbb{Z})$$

12

در شکل 1 نمودار مربوط به  $z_m^{*(n)}$  برای خوشه‌های مختلف و برای چند مقدار  $m$  رسم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هنگامی سیستم دچار گذار فاز دینامیکی می‌شود که  $z_m^{*(n)}$  محور حقیقی را قطع می‌کند، به عبارت دیگر  $\text{Re}(z^*) = 0$ . در ظاهر به نظر می‌رسد که نمودار مربوط به مدل آیزینگ و  $n$ -خوشه‌ای دارای تعداد گذار فازهای یکسانی باشند، اما در مدل خوشه‌ای خط‌های نزدیک به همی وجود دارند که برای نمونه در یکی از نمودارهای شکل 1 نشان داده شده است و تعداد آنها تناسب خطی با عدد خوشه،  $n$  دارد که به معنی متعدد بودن مدهای مجاز جهت ایجاد گذار فاز دینامیکی است.

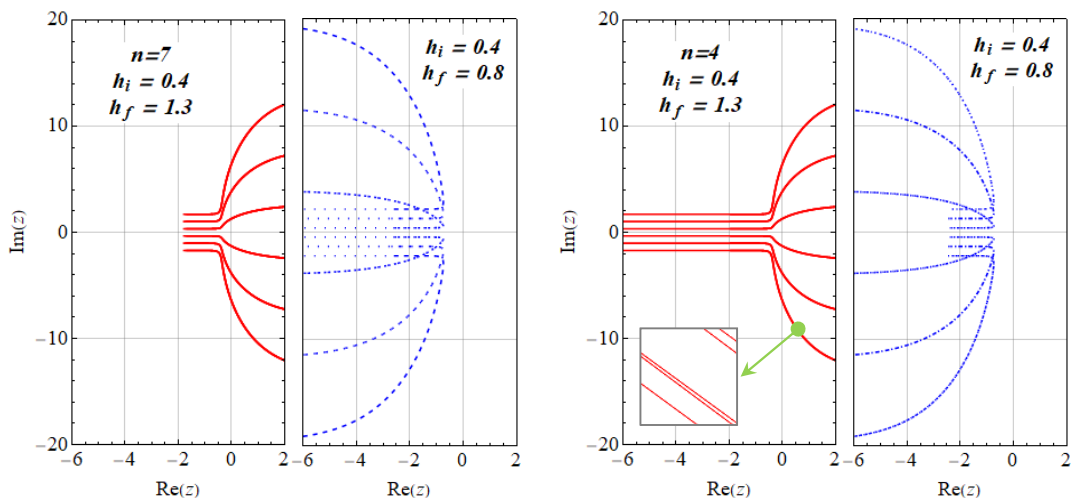
که در آن اندیس‌های  $i$  و  $f$  به ترتیب نشان‌دهنده مقدار کمیت‌ها قبل ( $h \mapsto h_i$ ) و بعد ( $h \mapsto h_f$ ) از دگرگونی ناگهانی هستند. تمام ویژگی‌های غیرتحلیلی دامنه لاشمیت در جایی نمایان می‌شود که مقدار حقیقی آن در صفحه زمان مختلط برابر صفر شود.

### صفرهای فیشر

گذار فاز کوآتومی هنگامی رخ می‌دهد که بردار حالت تحول زمانی یافته بر بردار حالت اولیه عمود شود. به عبارت دیگر گذار فاز کوآتومی در، به اصطلاح، صفرهای فیشر اتفاق می‌افتد، یعنی هنگامی که  $L_k(z^*) = 0$ ، که به معنی برقراری رابطه زیر است

$$\cos^2(\phi_k^{(n)}) + e^{-2i\varepsilon_k^{(n)}(h_f)t} \sin^2(\phi_k^{(n)}) = 0 \quad 11$$

که در آن برای راحتی  $\phi_k^{(n)} = \theta_k^{(n)}(h_i) - \theta_k^{(n)}(h_f)$  تعریف کرده‌ایم. جواب معادله فوق به صورت زیر خواهد بود



شکل 1. نمودارهای صفرهای فیشر برای مدل خوشه‌ای،  $n = 4$  (دو نمودار سمت راست) و  $n = 7$  (دو نمودار سمت چپ) در دو حالت دگرگونی ناگهانی در فاز یکسان (خط چین) و در دو فاز مختلف (خط). نمودارها برای پنج مقدار مختلف  $m = \{-3, \dots, 2\}$  رسم شده است.

قطع نخواهند کرد. بنابراین، برای وجود گذار فاز باید بخش حقیقی  $z_m^{*(n)}$  برابر صفر باشد. این اتفاق در

اگر دگرگونی ناگهانی ناشی از تغییر میدان مغناطیسی در فاز یکسان باشد خطوط هیچ‌گاه محور حقیقی را

در این صورت تابع احتمال برابر خواهد بود با

$$|L(t)|^2 = 1 - A_k^{(n)} \sin^2(\varepsilon_k^{(n)} t), \quad 17$$

$$A_k^{(n)} = \sin^2(2\phi_k^{(n)})$$

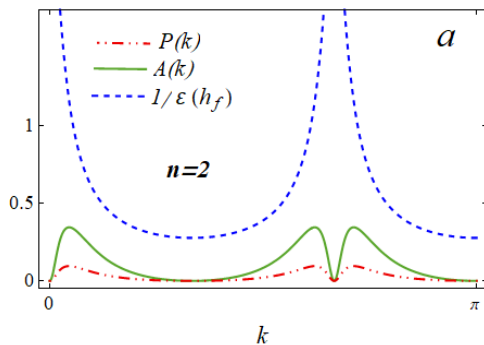
تابع فوق تنها هنگامی می‌تواند برابر صفر شود که  $A_k^{(n)} \sin^2(\varepsilon_k^{(n)} t)$  برابر یک، یعنی مقدار بیشینه آن، باشد و در این صورت باید  $A_k^{(n)} = 1$ . توجه داریم که این حالت صرفاً در شرایطی می‌تواند رخ دهد که دگرگونی ناگهانی مربوط به دو فاز مختلف باشد، در غیر این صورت مقدار  $A_k^{(n)}$  هیچ‌گاه به عدد یک نخواهد رسید. به این ترتیب می‌توان تعداد مدهایی که  $A_k^{(n)} = 1$  می‌شود را تعیین کرد. می‌توان نوشت:

$$A_k^{(n)} = \sin^2(2\phi_k^{(n)}) = 4\sin^2(\phi_k^{(n)})(1 - \sin^2(\phi_k^{(n)}))$$

$$= 4P_k^{(n)}(1 - P_k^{(n)}), \quad P_k^{(n)} = \sin^2(\phi_k^{(n)})$$

اشغال‌شدگی حالت برانگیخته است [40]. بنابراین شرط گذار فاز ایجاب می‌کند که

$$\sin^2(\phi_k^{(n)}) = P_k^{(n)} = \frac{1}{2} \quad 19$$



صورتی رخ می‌دهد که تکانه  $k^*$  وجود داشته باشد که شرط زیر را برآورده کند:

$$\cot^2(\phi_{k^*}^{(n)}) = 1 \Rightarrow \phi_{k^*}^{(n)} = \frac{\pi}{4} \quad 13$$

و با استفاده از آن مدهای مورد نظر برای گذار فاز دینامیکی را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\cos((n+1)k^*) = \frac{J^2 + h_i h_f}{J(h_i + h_f)} \quad 14$$

رابطه فوق تنها هنگامی برقرار است که مقدار میدان مغناطیسی قبل و بعد از دگرگونی ناگهانی مربوط به دو فاز تعادلی مختلف باشند، یعنی مقدار یکی از آنها بیشتر از مقدار بحرانی ( $h=1$ ) و دیگری کمتر از آن.

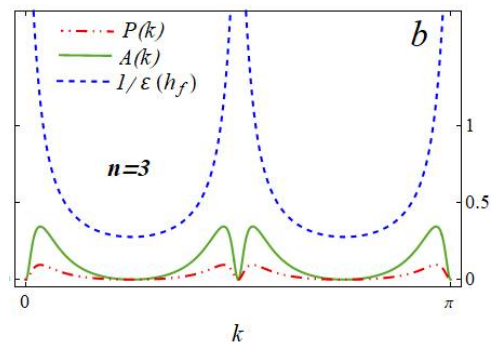
### تابع احتمال

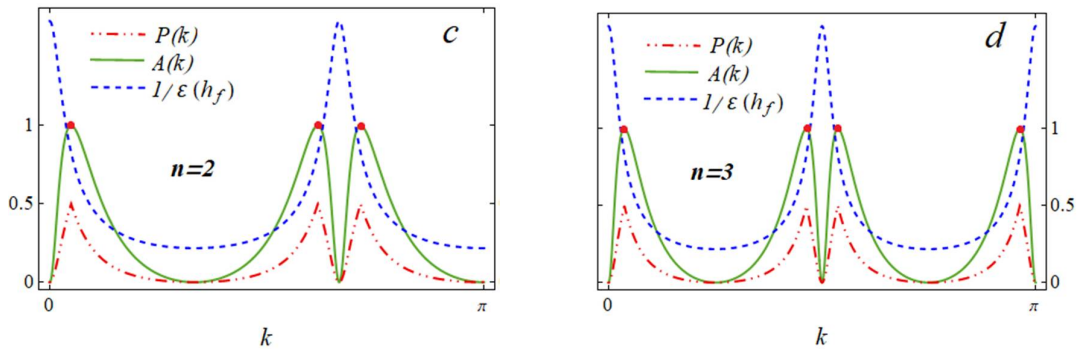
دامنه لاشمیت را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک عدد مطلق در یک فاز نوشت

$$L(t) = |L(t)| e^{iz_k(t)} \quad 15$$

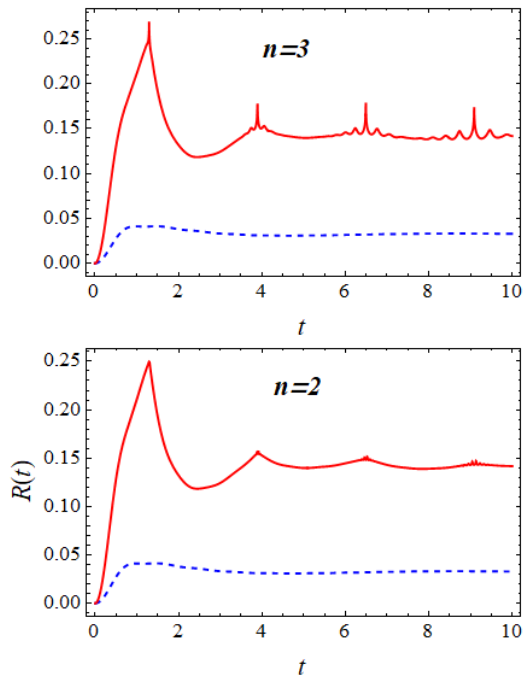
که مقدار مطلق آن به شکل زیر به دست می‌آید

$$|L(t)| = (1 - 2\sin^2(\phi_k^{(n)})\sin^2(\varepsilon_k^{(n)} t)) - i(\sin^2(\phi_k^{(n)})\sin(2\varepsilon_k^{(n)} t)) \quad 16$$





شکل 2. مقایسه بین  $A(k)$ ،  $P(k)$  و  $1/\varepsilon_k^{(n)}(h_f)$  در حالتی که میدان‌های اولیه و نهایی در دو فاز تعادلی یکسان ( $a$  و  $b$ ) و مختلف ( $c$  و  $d$ ) هستند. دایره‌های توپر روی نمودار  $A^{(n)}$  نشانگر تعداد مدهایی است که شرط گذار فاز دینامیکی را برآورده می‌کند.



شکل 3. تابع احتمال بازگشت برحسب زمان برای شبکه به‌بزرگی  $N=1000$  و برای خوشه‌های،  $n$  مختلف در حالتی که میدان‌های اولیه و نهایی در فاز تعادلی یکسان (خط چین) و در دو فاز مختلف (خط) هستند.

### تابع نرخ احتمال بازگشت

تابع نرخ احتمال بازگشت که با رابطه

$$R(t) = -\frac{1}{N} \ln[|L(t)|^2] \quad 20$$

در شکل 2 نمودار مقایسه بین  $A(k)$  و  $P(k)$  و  $1/\varepsilon_k^{(n)}(h_f)$  در حالتی که میدان‌های اولیه و نهایی در دو فاز تعادلی یکسان و مختلف هستند برای خوشه‌های متفاوت رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تعداد مدهایی که در آن شرط ایجاد گذار فاز دینامیکی برآورده می‌شود، یعنی  $A_k^{(n)} = 1$ ، برابر با  $n+1$  است که در شکل 2 با دایره‌های توپر (قرمز رنگ) روی نمودار  $A^{(n)}$  مشخص شده‌اند. تعداد این مدها بیانگر تعداد مقیاس‌های زمانی است که در آن گذار فاز دینامیکی رخ می‌دهد، ولی با توجه به شکل شماره 2 می‌توان دید که عکس انرژی برای مدهایی که در آنها دامنه بیشینه می‌شود یکسان است. در نتیجه در بخش بعد نشان خواهیم داد که مقیاس‌های زمانی برای گذار فاز دینامیکی همگی یکسان بوده و صرفاً یک مقیاس زمانی وجود دارد.

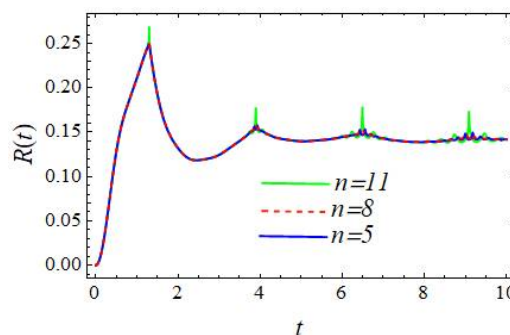


فاز دینامیکی در سیستم است. همچنین نشان داده شد با وجود اینکه سیستم‌های اسپینی با برهم‌کنش‌های خوشه‌ای متفاوت دارای صفرهای فیشر متفاوتی از نظر تعداد هستند، ولی مقیاس زمانی گذار فاز دینامیکی برای همگی آنها یکسان هست. این به معنی یکسان بودن رفتار دینامیکی این سیستم‌ها است در حالی که جزئیات برهم‌کنش میکروسکوپی آنها باهم متفاوت است.

### مرجع‌ها

- [1] R. Jafari, Thermodynamic properties of the one-dimensional extended quantum compass model in the presence of a transverse field, *The European Physical Journal B* **85** (2012) 167.
- [2] S. Montes, A. Hamma, Phase diagram and quench dynamics of the cluster-XY spin chain, *Physical Review E* **86** (2012) 021101.
- [3] J. Häppölä, G.B. Halász, A. Hamma, Universality and robustness of revivals in the transverse field XY model, *Physical Review A* **85** (2012) 032114.
- [4] W.H. Zurek, U. Dorner, P. Zoller, Dynamics of a quantum phase transition, *Physical Review Letters* **95** (2005) 105701.
- [5] D.M. Kennes, V. Meden, R. Vasseur, Universal quench dynamics of interacting quantum impurity systems, *Physical Review B* **90** (2014) 115101.
- [6] R. Jafari, H. Johannesson, Loschmidt echo revivals: critical and noncritical, *Physical Review Letters* **118** (2017) 015701.
- [7] R. Jafari, H. Johannesson, Decoherence from spin environments: Loschmidt echo and quasiparticle excitations, *Physical Review B* **96** (2017) 224302.
- [8] A.K. Chandra, A. Das, B.K. Chakrabarti, *Quantum Phase Transitions in Transverse Field Spin Models: From Statistical Physics to Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2015).

تعریف می‌شود. در زمان‌هایی که سیستم گذار فاز کوآنتومی دارد  $R(t)$  رفتار غیرتحلیلی خواهد داشت. در شکل 3 نمودار تابع نرخ برحسب زمان برای خوشه‌های مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نقاط نوک‌تیز نمودار بیانگر واگرایی  $R(t)$  به صورت دوره‌ای در زمان‌های مشخص هستند. مطابق آنچه که در شکل 4 دیده می‌شود، مقیاس زمانی گذار فاز دینامیکی برای سیستم‌های خوشه‌ای مختلف  $(n)$ ، یکسان است.



شکل 4. تابع احتمال بازگشت برحسب زمان برای شبکه به‌بزرگی  $N=1000$  و برای خوشه‌های  $n=5, 8, 11$  در حالتی که میدان‌های اولیه و نهایی در دو فاز تعادلی مختلف هستند.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله نشان دادیم که اگر میدان مغناطیسی عرضی در مدل خوشه‌ای به‌نحوی دچار تغییر شود که مقدار اولیه و نهایی آن در دو فاز تعادلی مختلف باشند باعث ایجاد واگرایی در تابع نرخ احتمال بازگشت در زمان‌های  $t_m^{(n)}$  خواهد شد. از آنجا که این واگرایی در زمان مشابه واگرایی کمیت‌های ترمودینامیکی در سیستم‌های تعادلی است، این رفتار را گذار فاز دینامیکی می‌نامند. در صورتی که دگرگونی ناگهانی میدان مغناطیسی در فاز یکسانی باشد خطوط صفرهای فیشر محور حقیقی را قطع نخواهند کرد و در یک نیم‌صفحه قرار می‌گیرند که نشان‌دهنده عدم وجود گذار

- [21] R. Jafari, Dynamical quantum phase transition and quasi particle excitation, *Scientific Reports* **9** (2019) 2871.
- [22] R. Jafari, H. Johannesson, A. Langari, M.A. Martin-Delgado, Quench dynamics and zero-energy modes: The case of the Creutz model, *Physical Review B* **99** (2018) 054302.
- [23] S. Vajna, B. Dóra, Topological classification of dynamical phase transitions, *Physical Review B* **91** (2015) 155127.
- [24] M. Schmitt, S. Kehrein, Dynamical quantum phase transitions in the Kitaev honeycomb model, *Physical Review B* **92** (2015) 075114.
- [25] J.C. Budich, M. Heyl, Dynamical topological order parameters far from equilibrium, *Physical Review B* **93** (2016) 085416.
- [26] S. Sharma, U. Divakaran, A. Polkovnikov, A. Dutta, Slow quenches in a quantum Ising chain: Dynamical phase transitions and topology, *Physical Review B* **93** (2016) 144306.
- [27] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases, *Review of Modern Physics* **80** (2008) 885.
- [28] D. Chen, M. White, C. Borries, B. DeMarco, Quantum quench of an atomic mott insulator, *Physical Review Letters* **106** (2011) 235304.
- [29] D. Chen, C. Meldgin, B. DeMarco, Bath-induced band decay of a hubbard lattice gas, *Physical Review A* **90** (2014) 013602.
- [30] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, M. Vengalattore, Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems, *Review of Modern Physics* **83** (2011) 863–883.
- [31] J.K. Pachos, M.B. Plenio, Three-spin interactions in optical lattices and criticality in cluster Hamiltonians, *Physical Review Letters* **93** (2004) 056402.
- [32] H.J. Briegel, R. Raussendorf, Persistent entanglement in arrays of interacting particles, *Physical Review Letters* **86** (2001) 910.
- [33] G. Zonzo, S.M. Giampaolo, N-cluster models in a transverse magnetic field, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* (2018) 063103.
- [9] M. Kolodrubetz, B.K. Clark, D.A. Huse, Nonequilibrium dynamic critical scaling of the quantum Ising chain, *Physical Review Letters* **109** (2012) 015701.
- [10] J.C. Halimeh, V. Zauner-Stauber, Dynamical phase diagram of quantum spin chains with long-range interactions, *Physical Review B* **96** (2017) 134427.
- [11] M. Heyl, A. Polkovnikov, S. Kehrein, Dynamical quantum phase transitions in the transverse-field Ising model, *Physical Review Letters* **110** (2013) 135704.
- [12] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur, S. Skorik, Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories, *Nuclear Physics B* **453** (1995) 581–618.
- [13] S. Vajna, B. Dóra, Disentangling dynamical phase transitions from equilibrium phase transitions, *Physical Review B* **89** (2014) 161105.
- [14] F. Andraschko, J. Sirker, Dynamical quantum phase transitions and the Loschmidt echo: A transfer matrix approach, *Physical Review B* **89** (2014) 125120.
- [15] U. Divakaran, S. Sharma, A. Dutta, Tuning the presence of dynamical phase transitions in a generalized XY spin chain, *Physical Review E* **93** (2016) 052133.
- [16] M. Heyl, Dynamical quantum phase transitions: a review, *Reports on Progress in Physics* **81** (2018) 054001.
- [17] S. Sharma, S. Suzuki, A. Dutta, Quenches and dynamical phase transitions in a non-integrable quantum Ising model, *Physical Review B* **92** (2015) 104306.
- [18] V. Zauner-Stauber, J.C. Halimeh, Probing the anomalous dynamical phase in long-range quantum spin chains through Fisher-zero lines, *Physical Review E* **96** (2017) 062118.
- [19] J. Lang, B. Frank, J.C. Halimeh, Dynamical quantum phase transitions: a geometric picture, *Physical Review Letters* **121** (2018) 130603.
- [20] J. Lang, B. Frank, J.C. Halimeh, Concurrence of dynamical phase transitions at finite temperature in the fully connected transverse-field Ising model, *Physical Review B* **97** (2018) 174401.

- [34] P. Jordan, E.Z. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, *Physik* **47** (1928) 631-651.
- [35] E. Barouch, B.M. McCoy, M. Dresden, Statistical mechanics of the XY model. I, *Physical Review A* **2** (1970) 1075.
- [36] E. Lieb, T. Shultz, D. Mattis, Two soluble models of an antiferromagnetic chain, *Annual Physics* **16** (1961) 407-466.
- [37] P. Smacchia, L. Amico, P. Facchi, R. Fazio, G. Florio, S. Pascazio, V. Vedral, Statistical mechanics of the cluster Ising model, *Physical Review A* **84** (2011) 022304.
- [38] S.M. Giampaolo, B. Hiesmayr, Topological and nematic ordered phases in many-body cluster-Ising models, *Physical Review A* **92** (2015) 012306.
- [39] E. Barouch, B.M. McCoy, Statistical mechanics of the XY model. II. spin-correlation functions, *Physical Review A* **3** (1971) 786.
- [40] M. Kolodrubetz, B.K. Clark, D.A. Huse, Nonequilibrium dynamic critical scaling of the quantum Ising chain, *Physical Review Letters* **109** (2012) 015701.