

Thermal Entanglement between Two Coupled Two-Level Atoms on Two-Photon Interaction with Codirectional Kerr Nonlinear Coupler

Bashir Mojaveri^{1,*}, Alireza Dehghani², Mohammad Ali Fasihi¹,

Touraj Mohammadpour¹

¹Department of Physics, Faculty of Science, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

²Department of Physics, Faculty of Science, Payame Noor University, Tehran, Iran

Received: 12.01.2018 Final revised: 23.06.2019 Accepted: 22.07.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14917](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14917)

Abstract

In this paper, a Hamiltonian model, which includes the interaction of two two-level atoms with a codirectional Kerr nonlinear coupler via the Raman non-degenerate two-photon transition, is introduced. The atomic interaction is assumed to be in the dipole-dipole form, and the total system is also in thermal equilibrium with the environment. The total excitation number operator, as the constant of the motion of the system, provides a decomposition of the Hilbert space of system into direct sums of invariant subspaces. As a result, the representation of the Hamiltonian becomes a block-diagonal matrix. By diagonalizing each of the blocks, we obtain eigenvalues and the corresponding eigenstates of the Hamiltonian. Then we obtain the thermal state of the system in the whole Hilbert space and within its excitation subspaces. We quantify the thermal entanglement between the atoms in the Hilbert space of the system and within its excitation subspaces using the measure of the concurrence. Finally, the effect of temperature and system parameters on the degree of thermal entanglement is investigated. The results show that in the subspaces with an odd excitation number, the atomic thermal entanglement is thermally robust and remains constant.

Keywords: codirectional Kerr nonlinear coupler, thermal entanglement, Jaynes-Cummings model, concurrence.

* Correspondin Author: bmojaveri@azaruniv.ac.ir



درهم‌تندگی گرمایی بین دو اتم دو ترازه جفت‌شده در برهم‌کنش دو فوتونی غیرتبهگن با جفت‌گر غیرخطی هم‌محور

بشیر مجاوری^{1*}، علیرضا دهقانی²، محمد علی فصیحی¹، تورج محمدپور¹

¹گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

²گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

دریافت: 1397/10/22 ویرایش نهائی: 1398/04/02 پذیرش: 1398/04/31

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14917](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14917)

چکیده

در این مقاله، هامیلتونی یک مدل، شامل برهم‌کنش دو اتم دو ترازه با یک جفت‌گر غیرخطی هم‌محور از طریق گذار دو فوتونی غیرتبهگن رامن معرفی شده است. فرض می‌شود که برهم‌کنش اتم‌ها به صورت دوقطبی-دوقطبی بوده و همچنین کل سامانه با یک منبع گرمایی در تعادل گرمایی می‌باشد. عملگر تعداد برانگیختگی کل به عنوان ثابت حرکت سامانه، تجزیه فضای هیلبرت سامانه را به جمع مستقیم زیرفضاهای ناوردافراهم می‌سازد. در نتیجه، هامیلتونی سامانه به صورت یک ماتریس بلوک قطری درمی‌آید. با قطری کردن هر کدام از بلوک‌ها ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. سپس حالت گرمایی سامانه را در فضای هیلبرت کل و هر کدام از زیرفضاهای برانگیخته به دست می‌آوریم. با استفاده از سنج تلافی، میزان درهم‌تندگی گرمایی بین اتم‌ها را در فضای کل و زیرفضاهای آن محاسبه می‌کنیم. نهایتاً تأثیر دما و پارامترهای سامانه را بر میزان درهم‌تندگی مطالعه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که در زیرفضاهای برانگیخته فرد، حالت‌های درهم‌تندیده اتمی در مقابل افزایش دما مقاوم بوده و ثابت می‌مانند. **کلیدواژه‌گان:** جفت‌گر غیرخطی هم‌محور، درهم‌تندگی گرمایی، مدل جینز-کامینگز، سنج تلافی

مقدمه

شود. این ابزار اپتیکی علاوه بر اینکه می‌تواند میدان‌های الکترومغناطیسی با خصوصیات غیرکلاسیکی را تولید کند، در کلیدزنی‌های اپتیکی نیز کاربرد دارد و به همین دلیل در اپتیک کوانتومی نیز مورد توجه قرار گرفته است. هامیلتونی یک جفت‌گر غیرخطی هم‌محور به صورت زیر داده می‌شود [۳، ۴]

$$H_f = \sum_{i=1}^2 \hbar(\omega_i a_i^\dagger a_i + \chi_i a_i^\dagger{}^2 a_i^2) + \hbar\chi a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 + \hbar\lambda(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger), \quad 1$$

به طوری که ω و ω_2 به ترتیب بسامدهای مدهای اول و دوم میدان انتشاری موجبر با عملگرهای فنا (خلق) \hat{a}_1^\dagger و \hat{a}_2^\dagger می‌باشند. عملگرهای خلق و فنا در

یکی از موضوعات اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی فرایند پردازش داده‌ها و انتقال آنها با سرعت فوق‌العاده زیاد می‌باشد [۱، ۲]. در سال‌های اخیر علاقه زیادی به این فرایند با استفاده از ابزارهای اپتیکی نشان داده شده است. یکی از ابزارهای مؤثر اپتیکی برای انتقال داده‌ها جفت‌گر غیرخطی هم‌محور می‌باشد که از دو موج‌بر اپتیکی موازی تشکیل شده است. این موج‌برها به اندازه کافی به هم نزدیک هستند که مجاز به تبادل انرژی از طریق امواج میرا می‌باشند. این تبادل می‌تواند به وسیله مهندسی جفت‌گر و همچنین شدت میدان ورودی کنترل

*نویسنده مسئول: bmojaveri@azaruniv.ac.ir



سال‌های اخیر در چارچوب الکترو دینامیک کوآنتومی، درهم‌تنیدگی گرمایی اتم-اتم و اتم-میدان در برخی از سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان مطالعه و تأثیرات دما و پارامترهای سامانه روی میزان درهم‌تنیدگی بحث شده است [12-15]. همچنین در این سامانه‌ها شرایط حفظ و کنترل درهم‌تنیدگی گرمایی در دماهای بالا به وسیله پارامترهای سامانه مطالعه شده است. به عنوان مثال، تأثیر دما و محیط کر بر درهم‌تنیدگی گرمایی بین فوتون‌های یک کاواک دو مده با محیط غیر خطی مطالعه شده است [16]. همچنین نشان داده شده است که محیط کر نقش کنترلی درهم‌تنیدگی در دماهای بالا را دارد. اخیراً تولید درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم دوترازه در برهم‌کنش با یک میدان تک مده در حضور محیط کر بررسی و شرایط حفظ این درهم‌تنیدگی در دماهای بالا علاوه بر پارامترهای سامانه از طریق محدود کردن فضای هیلبرت (فیلتر کردن برخی از توزیع‌های گیس) نیز مطالعه شده است [17]. در این مقاله می‌خواهیم درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم جفت شده را در برهم‌کنش دو فوتونی غیرتبهگن با یک میدان دو مده در حضور محیط کر غیرخطی مطالعه کنیم. برای این منظور هامیلتونی سامانه برهم‌کنشی دو اتم دوترازه با یک جفت کننده کر غیرخطی هم‌محور که در دمای تعادل T با یک منبع گرمایی هستند را معرفی می‌کنیم. در ادامه عملگر تعداد برانگیختگی کل را به عنوان ثابت حرکت سامانه (یک عملگر کازیمیر) معرفی می‌کنیم که فضای هیلبرت سامانه را به زیر فضاهای برانگیخته تجزیه می‌کند و در نتیجه باعث می‌شود که هامیلتونی سامانه به صورت یک ماتریس بلوک قطری نمایش داده شود. دو تا از بلوک‌ها 1×1 ، دو تای دیگر 3×3 و بلوک‌های باقیمانده 4×4 هستند. با قطری کردن هریک از بلوک‌ها، حالت گرمایی سامانه را به دست می‌آوریم. همچنین این تجزیه امکان محاسبه حالت گرمایی سامانه در هریک از زیر فضاهای

روابط جابه‌جائی $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$ صدق می‌کنند. پارامترهای $\bar{\chi}$ و χ_i ($i = 1, 2$) به ترتیب پذیرفتاری مرتبه سوم مربوط به فرایندهای دگرکنش و خودکنش بوده و λ ثابت جفت‌شدگی موجرها است. دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم در مدل جینز-کامینگز تعمیم یافته شامل دو اتم دو ترازه برهم‌کنشی با میدان‌های تک مده و دو مده در دمای صفر مطلق بررسی شده است [6-8]. با این وجود برهم‌کنش با محیط، به عنوان یک منبع گرمایی، یکی از ویژگی‌های اجتناب ناپذیر سامانه‌های واقعی می‌باشد. در مدل جینز-کامینگز دو اتمی با میدان دو مده، زمانی که قسمت میدان در تعادل گرمایی با یک منبع گرمایی باشد، تولد و مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها اتفاق می‌افتد. در این سامانه در حالی که فقط قسمت فوتونی دارای توزیع گرمایی است، دما حالت کل سامانه شامل میدان و اتم‌ها را متأثر کرده و باعث ایجاد درهم‌تنیدگی و یا برعکس باعث ایجاد واهمدوسی می‌شود [9]. حال وقتی که کل سامانه شامل اتم‌ها و میدان‌ها در تعادل گرمایی با منبع گرمایی هستند، حالت سامانه یک حالت آمیخته گرمایی با توزیع بولتزمن بوده و درهم‌تنیدگی ایجاد شده در درهم‌تنیدگی گرمایی نامیده می‌شود. برای اولین بار مفهوم درهم‌تنیدگی گرمایی توسط نیلسون برای یک سامانه دو کیوبیتی در مدل زنجیره اسپینی هایزنبرگ در تعادل گرمایی با یک حمام گرمایی معرفی شد و تأثیر دما بر درهم‌تنیدگی گرمایی مطالعه گردید [10]. به طور کلی حالت گرمایی یک سامانه در دمای صفر مطلق به حالت پایه سامانه تقلیل یافته که با افزایش دما و با آمیخته شدن حالت پایه با حالت‌های دیگر، میزان درهم‌تنیدگی تغییر کرده و در نهایت در دماهای بالا به دلیل فرایند آمیختگی کامل صفر می‌شود [11]. از این رو علاوه بر تولید درهم‌تنیدگی گرمایی، حفظ آن در دماهای بالا از اهمیت خاصی برخوردار است. در

برآورده می‌کنند یعنی:

$$[\widehat{J}_z, \widehat{J}_\pm] = \pm \widehat{J}_\pm, [\widehat{J}_+, \widehat{J}_-] = 2\widehat{J}_z. \quad 4$$

بنابراین هامیلتونی 3 برهم‌کنش دو اتم با جفت‌گر کر غیرخطی برحسب گروه $su(2)$ نیز نامیده می‌شود. نمایش جبر لی $su(2)$ در فضای هیلبرت

$$\mathcal{H} = \text{span} \left\{ |j, m\rangle \Big|_{m=j}^{m=-j} \right\}$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} J_- |j, m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m-1\rangle, \\ J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m+1\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \end{aligned} \quad 5$$

که در آن عدد کوانتومی j صحیح یا نیم صحیح می‌باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که عملگر تعداد برانگیختگی

$$N = J_z + \frac{1}{2}(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}) + j + 1$$

کل ثابت حرکت سامانه می‌باشد یعنی: $[\widehat{H}, N] = 0$. در نتیجه، برای یک j داده شده، فضای هیلبرت سامانه اتم-میدان، $\mathcal{H} = \text{span} \left\{ |i, k, j, m\rangle \Big|_{m=-j}^j \right\}$ ($i, k = e, g$) به جمع

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \mathcal{H}^{(3)} \oplus \mathcal{H}^{(4)} \oplus \mathcal{H}^{(5)}$$

تجزیه می‌شود، به طوری که زیرفضاهای یک بعدی $\mathcal{H}^{(1)}$ و $\mathcal{H}^{(2)}$ به ترتیب با پایه‌های $|g, g, j, -j\rangle$ و $|e, e, j, j\rangle$ زیرفضاهای برانگیخته خشی و $2j+2$ می‌باشند. همچنین $\mathcal{H}^{(3)}$ زیرفضای برانگیخته اول با پایه‌های

$$\{|g, g, j, -j+1\rangle, |e, g, j, -j\rangle, |g, e, j, -j\rangle\},$$

$$\mathcal{H}^{(4)} \text{ زیرفضای برانگیخته } 2j+1 \text{ با پایه‌های}$$

$$\{|e, g, j, j\rangle, |g, e, j, j\rangle, |e, e, j, j-1\rangle\}, \quad (j \neq 0)$$

می‌باشند. در حالی که $\mathcal{H}^{(5)}$ یک زیرفضای $8j-4$ بعدی با پایه‌های زیر است:

برانگیخته را هم فراهم می‌سازد. بنابراین درهم‌تنیدگی گرمایی بین دو اتم را در فضای هیلبرت کل و هر یک از زیرفضاهای آن را با استفاده از سنجۀ تلاقی مطالعه می‌کنیم. به دلیل اهمیت حفظ درهم‌تنیدگی در مقابل نوفه محیط نشان می‌دهیم که با انتخاب مناسب پارامترهای سامانه، درهم‌تنیدگی گرمایی بین اتم‌ها در حالت گرمایی متناظر با زیر فضاهای برانگیخته اول و $2j+1$ ($j=0,1,\dots$) نسبت به دما مقاوم هستند. این تحقیق علاوه بر بهینه کردن مفروضات قبلی درباره برهم‌کنش دو فوتونی اتم‌های دو ترازه با میدان الکترومغناطیسی دو مده، یک نمود واقعی از درهم‌تنیدگی در چارچوب الکترودینامیک کوانتومی را به نمایش می‌گذارد.

مدل

حال دو اتم دوترازه با جفت‌شدگی دو قطبی-دوقطبی را وارد یک جفت‌گر کر غیرخطی کرده و مجموعه را در تعادل گرمایی در دمای T قرار می‌دهیم. با انتخاب:

$$\begin{aligned} J_+ &= a_1^\dagger a_2, \\ J_- &= a_2^\dagger a_1, \\ J_z &= \frac{a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2}{2}, \end{aligned} \quad 2$$

و در نظر گرفتن $\omega_2 = -\omega_1 = \frac{\omega}{2}$ و $\bar{\chi} = -2\chi$ ، $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ این سامانه توسط هامیلتونی

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar} &= \omega \widehat{J}_z + \frac{\omega_0}{2}(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}) + \chi J_z^2 \\ &+ \sum_{i=1}^2 \lambda (J_- \sigma_+^{(i)} + J_+ \sigma_-^{(i)}) + \hbar \phi (\sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(2)} + \sigma_-^{(1)} \sigma_+^{(2)}) \end{aligned} \quad 3$$

توصیف می‌شود که در آن σ_z و σ_+ و σ_- به ترتیب عملگرهای وارون، بالابرنده و پائین آورنده اتمی، ϕ ثابت جفت‌شدگی دوقطبی-دوقطبی اتم‌ها و ω_0 بسامد گذار اتمی می‌باشند. همچنین λ جفت‌شدگی اتم‌ها با میدان موجبرهای ناشی از فرایند دوفوتونی غیرتبهگن رامن است. عملگرهای J_\pm و J_z جبر لی $su(2)$ را

بلوک‌های H_3, H_4 و H_5 را قطری نمائیم. ویژه‌مقادیر هامیلتونی‌های H_3 و H_4 برحسب عناصر ماتریسی آنها به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} E_1 &= h_{22} - h_{23}, \\ E_{2(3)} &= \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22} + h_{23} \pm \sqrt{(-h_{11} + h_{22} + h_{23})^2 + 8(h_{12})^2}), \\ E'_1 &= h'_{11} - h'_{12}, \\ E'_{2(3)} &= \frac{1}{2}(h'_{33} + h'_{11} + h'_{12} \pm \sqrt{(-h'_{33} + h'_{11} + h'_{12})^2 + 8(h'_{13})^2}), \end{aligned} \quad 12$$

و ویژه‌حالت‌های متناظر آنها به ترتیب زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} |\psi_i(j)\rangle &= \alpha_i(j)|g, g, j, -j+1\rangle \\ &+ \beta_i(j)|e, g, j, -j\rangle + \gamma_i(j)|g, e, j, -j\rangle, \\ |\psi'_i(j)\rangle &= \alpha'_i(j)|e, g, j, j\rangle \\ &+ \beta'_i(j)|g, e, j, j\rangle + \gamma'_i(j)|e, e, j, j-1\rangle, \end{aligned} \quad 13$$

($i=1, 2, 3$)

به طوری که ضرائب بسط به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_1(j) &= 0, \\ \alpha_{2(3)}(j) &= \left[2 + \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right), \\ \beta_1(j) &= -\gamma_1(j) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \beta_{2(3)}(j) &= \gamma_{2(3)}(j) = \left[2 + \left(\frac{h_{11} - E_{2(3)}(j)}{2h_{12}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha'_1(j) &= 0, \\ \alpha'_{2(3)}(j) &= \left[2 + \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right), \\ \beta'_1(j) &= -\gamma'_1(j) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \beta'_{2(3)}(j) &= \gamma'_{2(3)}(j) = \left[2 + \left(\frac{h'_{33} - E'_{2(3)}(j)}{2h'_{13}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad 14$$

اما به ازای یک m داده شده ویژه‌مقادیر بلوک H_5 عبارتند از:

$$\begin{aligned} E''_1(j, m) &= h''_{22} - h''_{23}, \\ E''_i(j, m) &= -\frac{a}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b} \cos\left[\frac{2}{3}(i-1)\pi + \phi\right] \quad (i=2, 3, 4), \end{aligned} \quad 15$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{9ab - 2a^3 - 27c}{2(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} \right], \\ a &= -(h''_{11} + h''_{22} + h''_{44} + h''_{23}), \\ b &= (h''_{23} + h''_{22})(h''_{11} + h''_{44}) + h''_{11}h''_{44} - 2(h''_{12})^2 - 2(h''_{24})^2, \\ c &= 2(h''_{24})^2 h''_{11} + 2(h''_{12})^2 h''_{44} - h''_{11}h''_{44}(h''_{23} + h''_{22}), \end{aligned} \quad 16$$

$$\begin{aligned} &\{|g, g, j, m+2\rangle, |e, g, j, m+1\rangle, \\ &|g, e, j, m+1\rangle, |e, e, j, m\rangle\}_{m=-j}^{j-2}, \quad (j \neq 0). \end{aligned} \quad 6$$

بنابراین نمایش هامیلتونی H یک ماتریس بلوک قطری با پنج بلوک به صورت زیر است

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5, \quad 7$$

که در آن H_1 و H_2 بلوک‌های 1×1 به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} H_1 &= [\hbar(-\omega j + \chi j^2) - \hbar\omega_0] |g, g, j, -j\rangle \langle g, g, j, -j|, \\ H_2 &= [\hbar(\omega j + \chi j^2) + \hbar\omega_0] |e, e, j, j\rangle \langle e, e, j, j|. \end{aligned} \quad 8$$

همچنین عناصر ماتریسی بلوک‌های 3×3 ، H_3 و H_4 به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} h_{11} &= \hbar[\omega(-j+1) - \omega_0 + \chi(-j+1)^2], \\ h_{12} &= h_{21} = h_{13} = h_{31} = \hbar\lambda\sqrt{2j}, \\ h_{22} &= h_{33} = \hbar(-\omega j + \chi j^2), \\ h_{23} &= h_{32} = \hbar\phi, \end{aligned} \quad 9$$

و

$$\begin{aligned} h'_{11} &= h'_{22} = \hbar(\omega j + \chi j^2), \\ h'_{32} &= h'_{23} = h'_{13} = h'_{31} = \hbar\lambda\sqrt{2j}, \\ h'_{12} &= h'_{21} = \hbar\phi, \\ h'_{33} &= \hbar[\omega(j-1) + \omega_0 + \chi(j-1)^2], \end{aligned} \quad 10$$

داده می‌شوند. برای یک m داده شده، H_5 یک بلوک 4×4 با عناصر ماتریسی می‌باشد.

$$\begin{aligned} h''_{11} &= \hbar[\omega(m+2) - \omega_0 + \chi(m+2)^2], \\ h''_{12} &= h''_{21} = h''_{13} = h''_{31} = \hbar\lambda\sqrt{(j-m-1)(j+m+2)}, \\ h''_{24} &= h''_{42} = h''_{34} = h''_{43} = \hbar\lambda\sqrt{(j-m)(j+m+1)}, \\ h''_{22} &= h''_{33} = \hbar[\omega(m+1) + \chi(m+1)^2], \\ h''_{23} &= h''_{32} = \hbar\phi, \\ h''_{44} &= \hbar[\omega m + \omega_0 + \chi m^2]. \end{aligned} \quad 11$$

برای مشخص شدن حالت گرمایی سامانه فوق، لازم است که ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های هامیلتونی H را به دست آوریم. برای این منظور باید هر کدام از

$$\rho_{af}(T) = \frac{1}{Tr(e^{-\frac{H}{k_B T}})} \times$$

$$\left\{ e^{-\frac{E_0}{k_B T}} |g, g, j, -j\rangle \langle g, g, j, -j| + e^{-\frac{E_0}{k_B T}} |e, e, j, j\rangle \langle e, e, j, j| \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{k_B T}} \left[|\alpha_i(j)|^2 |g, g, j, -j+1\rangle \langle g, g, j, -j+1| \right.$$

$$+ |\beta_i(j)|^2 |e, g, j, -j\rangle \langle e, g, j, -j| + |\gamma_i(j)|^2 |g, e, j, -j\rangle \langle g, e, j, -j|$$

$$+ \alpha_i(j) \beta_i^*(j) |g, g, j, -j+1\rangle \langle e, g, j, -j| + H.C.$$

$$+ \alpha_i(j) \gamma_i^*(j) |g, g, j, -j+1\rangle \langle g, e, j, -j| + H.C.$$

$$+ \beta_i(j) \gamma_i^*(j) |e, g, j, -j\rangle \langle g, e, j, -j| + H.C. \left. \right]$$

$$+ e^{-\frac{E_i'(j)}{k_B T}} \left[|\alpha_i'(j)|^2 |e, g, j, j\rangle \langle e, g, j, j| \right.$$

$$+ |\beta_i'(j)|^2 |g, e, j, j\rangle \langle g, e, j, j|$$

$$+ |\gamma_i'(j)|^2 |e, e, j, j-1\rangle \langle e, e, j, j-1|$$

$$+ \alpha_i'(j) \beta_i'^*(j) |e, g, j, j\rangle \langle g, e, j, j| + H.C.$$

$$+ \alpha_i'(j) \gamma_i'^*(j) |e, g, j, j\rangle \langle e, e, j, j-1| + H.C.$$

$$+ \beta_i'(j) \gamma_i'^*(j) |g, e, j, j\rangle \langle e, e, j, j-1| + H.C. \left. \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^4 \sum_{m=j}^j e^{-\frac{E_i(j,m)}{k_B T}} \left[|\alpha_i''(j,m)|^2 |g, g, j, m+2\rangle \langle g, g, j, m+2| \right.$$

$$+ |\beta_i''(j,m)|^2 |e, g, j, m+1\rangle \langle e, g, j, m+1|$$

$$+ |\gamma_i''(j,m)|^2 |g, e, j, m+1\rangle \langle g, e, j, m+1|$$

$$+ |\delta_i''(j,m)|^2 |e, e, j, m\rangle \langle g, e, j, m|$$

$$+ \alpha_i''(j,m) \beta_i''^*(j,m) |g, g, j, m+2\rangle \langle e, g, j, m+1| + H.C.$$

$$+ \alpha_i''(j,m) \gamma_i''^*(j,m) |g, g, j, m+2\rangle \langle g, e, j, m+1| + H.C.$$

$$+ \alpha_i''(j,m) \delta_i''^*(j,m) |g, g, j, m+2\rangle \langle e, e, j, m| + H.C.$$

$$+ \beta_i''(j,m) \gamma_i''^*(j,m) |e, g, j, m+1\rangle \langle g, e, j, m+1| + H.C.$$

$$+ \beta_i''(j,m) \delta_i''^*(j,m) |e, g, j, m+1\rangle \langle e, e, j, m| + H.C.$$

$$+ \gamma_i''(j,m) \delta_i''^*(j,m) |g, e, j, m+1\rangle \langle e, e, j, m| + H.C. \left. \right]$$

همچنین تجزیه فضای هیلبرت به صورت جمع مستقیم زیرفضاها این امکان را فراهم می‌سازد تا برای هر یک از زیرفضاها به طور مجزا ماتریس چگالی گرمایی محاسبه کنیم. برای زیرفضای برانگیخته خنثی $\mathcal{H}^{(1)}$ و $\mathcal{H}^{(2)}$ ماتریس‌های چگالی گرمایی به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{af}^{(1)}(T) = \frac{1}{Tr(e^{-\frac{H_1}{k_B T}})} e^{-\frac{E_0}{k_B T}} |g, g, j, -j\rangle \langle g, g, j, -j|,$$

21

و ویژه حالت‌های متناظر آنها عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\psi_i''(j,m)\rangle &= \alpha_i''(j,m) |g, g, j, m+2\rangle \\ &+ \beta_i''(j,m) |e, g, j, m+1\rangle \\ &+ \gamma_i''(j,m) |g, e, j, m+1\rangle + \delta_i''(j,m) |e, e, j, m\rangle, \end{aligned} \quad 17$$

به طوری که ضرایب بسط به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_i''(j,m) &= 0, \alpha_i''(j,m) = [1 + 2S_i^2 + T_i^2]^{\frac{1}{2}} T_i, \\ \beta_i''(j,m) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \beta_i''(j,m) = [1 + 2S_i^2 + T_i^2]^{\frac{1}{2}} S_i, \\ \gamma_i''(j,m) &= -\beta_i''(j,m), \gamma_i''(j,m) = \beta_i''(j,m), \\ \delta_i''(j,m) &= 0, \delta_i''(j,m) = [1 + 2S_i^2 + T_i^2]^{\frac{1}{2}}, (i = 2, 3, 4), \\ S_i &= \frac{E_i''(j,m) - h_{44}''}{2h_{24}''}, \\ T_i &= \frac{E_i''(j,m)^2 + (a + h_{11}'')E_i''(j,m) + h_{44}''(h_{22}'' + h_{33}'') - 2h_{24}''^2}{2h_{12}''h_{24}''}. \end{aligned} \quad 18$$

ماتریس چگالی گرمایی:

20

حالت گرمایی یک سامانه با هامیلتونی \widehat{H} در تعادل گرمایی با یک منبع گرمایی در دمای T به وسیله ماتریس چگالی

$$\rho(T) = \frac{e^{-\frac{H}{k_B T}}}{Tr(e^{-\frac{H}{k_B T}})},$$

داده می‌شود، که K_B ثابت بولتزمن، T دمای تعادل و

$Z = Tr(e^{-\frac{H}{k_B T}})$ تابع پارش می‌باشند. بنابراین حالت گرمایی اتم-میدان $\rho_g(T)$ ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho_{af}(T) &= \frac{1}{Z} \left[e^{-\frac{E_0}{k_B T}} |g, g, j, -j\rangle \langle g, g, j, -j| \right. \\ &+ e^{-\frac{E_0}{k_B T}} |e, e, j, j\rangle \langle e, e, j, j| \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left(e^{-\frac{E_i(j)}{k_B T}} |\psi_i(j)\rangle \langle \psi_i(j)| + e^{-\frac{E_i'(j)}{k_B T}} |\psi_i'(j)\rangle \langle \psi_i'(j)| \right) \\ &+ \sum_{m=j}^j e^{-\frac{E_i''(j,m)}{k_B T}} |\psi_i''(j,m)\rangle \langle \psi_i''(j,m)| \left. \right]. \end{aligned} \quad 19$$

اکنون با جاگذاری ویژه حالت‌های مربوط به بلوک‌های H_3, H_4 و H_5 در رابطه بالا، ماتریس چگالی گرمایی سامانه را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$+\gamma_i''(j,m)\delta_i''(j,m)|g,e,j,m+1\rangle\langle e,e,j,m|+H.C.].$$

به دست می آید.

درهم تنیدگی گرمایی اتم-اتم:

در این بخش درهم تنیدگی گرمایی بین اتم ها را برای حالت گرمایی ρ_{af} و هر کدام از حالت های گرمایی $\rho_{af}^{(3)}$ ، $\rho_{af}^{(4)}$ و $\rho_{af}^{(5)}$ مطالعه می کنیم. در اینجا از سنجه تلافی [10] برای اندازه گیری میزان درهم تنیدگی اتم ها استفاده می کنیم. این سنجه، برای یک ماتریس چگالی دو کیوبیتی به صورت

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\},$$

تعریف می شود که در آن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ مجذور ویژه مقادیر عملگر

$$\rho(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)})\rho^*(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)}) \quad 27$$

می باشند و $\sigma_y^{(i)}$ مؤلفه y ماتریس پائولی $(i = 1, 2)$ برای اتم است. مقدار تابع $C(\rho)$ برای حالت جداپذیر صفر و برای حالت بیشینه درهم تنیده یک می باشد. برای به دست آوردن ماتریس چگالی اتمی بایستی روی حالت میدان لازم است ردگیری انجام دهیم. در فضای هیلبرت \mathcal{H} با ردگیری روی حالت های میدان $|j, m\rangle$ ، ماتریس چگالی تقلیل یافته اتمی $\rho_a(T)$ برحسب پایه های اتمی $\{|g, g\rangle, |e, g\rangle, |g, e\rangle, |e, e\rangle\}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho_a(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(T) & \rho_{33}(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(T) \end{pmatrix}, \quad 28$$

به طوری که

$$\rho_{11}(T) = \frac{1}{Tr(e^{\frac{H}{K_B T}})} \left\{ e^{\frac{E_0}{K_B T}} + e^{\frac{E_1}{K_B T}} + \sum_{i=1}^3 e^{\frac{E_i(j)}{K_B T}} \alpha_i(j)^2 + e^{\frac{E_i(j)}{K_B T}} \alpha_i'(j)^2 + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{\frac{E_i(j,m)}{K_B T}} \alpha_i''(j,m)^2 \right\}, \quad 29$$

$$\rho_{af}^{(2)}(T) = \frac{1}{Tr(e^{\frac{H_2}{K_B T}})} e^{\frac{E_0}{K_B T}} |e, e, j, j\rangle\langle e, e, j, j|. \quad 22$$

واضح است که این حالت سامانه جدا پذیر (غیردرهم تنیده) می باشند. برای زیرفضاهای برانگیخته اول $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ ماتریس های چگالی گرمایی نظیر به ترتیب به صورت زیر داده می شود:

$$\rho_{af}^{(3)}(T) = \frac{1}{Tr(e^{\frac{H_3}{K_B T}})} \times \left\{ \sum_{i=1}^3 e^{\frac{E_i(j)}{K_B T}} \left[|\alpha_i(j)|^2 |g, g, j, -j+1\rangle\langle g, g, j, -j+1| + |\beta_i(j)|^2 |e, g, j, -j\rangle\langle e, g, j, -j| + |\gamma_i(j)|^2 |g, e, j, -j\rangle\langle g, e, j, -j| + \alpha_i(j)\beta_i^*(j) |g, g, j, -j+1\rangle\langle e, g, j, -j| + H.C. + \alpha_i(j)\gamma_i^*(j) |g, g, j, -j+1\rangle\langle g, e, j, -j| + H.C. + \beta_i(j)\gamma_i^*(j) |e, g, j, -j\rangle\langle g, e, j, -j| + H.C. \right] \right\}, \quad 23$$

$$\rho_{af}^{(4)}(T) = \frac{1}{Tr(e^{\frac{H_4}{K_B T}})} \times \left\{ \sum_{i=1}^3 e^{\frac{E_i(j)}{K_B T}} \left[|\alpha_i'(j)|^2 |g, g, j, -j+1\rangle\langle g, g, j, -j+1| + |\beta_i'(j)|^2 |g, e, j, j\rangle\langle g, e, j, j| + |\gamma_i'(j)|^2 |e, e, j, j-1\rangle\langle e, e, j, j-1| + \alpha_i'(j)\beta_i''(j) |e, g, j, j\rangle\langle g, e, j, j| + H.C. + \alpha_i'(j)\gamma_i''(j) |e, g, j, j\rangle\langle e, e, j, j-1| + H.C. + \beta_i'(j)\gamma_i''(j) |e, g, j, -j\rangle\langle g, e, j, -j| + H.C. \right] \right\}. \quad 24$$

همچنین ماتریس چگالی گرمایی برای زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ به صورت

$$\rho_{af}^{(5)}(T) = \frac{1}{Tr(e^{\frac{H_5}{K_B T}})} \times \left\{ \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{\frac{E_i(j,m)}{K_B T}} \left[|\alpha_i''(j,m)|^2 |g, g, j, m+2\rangle\langle g, g, j, m+2| + |\beta_i''(j,m)|^2 |e, g, j, m+1\rangle\langle e, g, j, m+1| + |\gamma_i''(j,m)|^2 |g, e, j, m+1\rangle\langle g, e, j, m+1| + |\delta_i''(j,m)|^2 |e, e, j, m\rangle\langle g, e, j, m| + \alpha_i''(j,m)\beta_i'''(j,m) |g, g, j, m+2\rangle\langle e, g, j, m+1| + H.C. + \alpha_i''(j,m)\gamma_i'''(j,m) |g, g, j, m+2\rangle\langle g, e, j, m+1| + H.C. + \alpha_i''(j,m)\delta_i'''(j,m) |g, g, j, m+2\rangle\langle e, e, j, m| + H.C. + \beta_i''(j,m)\gamma_i'''(j,m) |e, g, j, m+1\rangle\langle g, e, j, m+1| + H.C. + \beta_i''(j,m)\delta_i'''(j,m) |e, g, j, m+1\rangle\langle e, e, j, m| + H.C. \right] \right\}. \quad 25$$

در زیر فضای $\mathcal{H}^{(5)}$ ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho_a^{(5)}(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(T) & \rho_{33}(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(T) \end{pmatrix}, \quad 33$$

و درایه‌های آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(T) &= \frac{1}{Z_5} \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \alpha_i''(j, m), \\ \rho_{22}(T) = \rho_{33}(T) &= \frac{1}{Z_5} \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \beta_i''(j, m), \\ \rho_{23}(T) = \rho_{32}^*(T) &= \frac{1}{Z_5} \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \beta_i''(j, m) \gamma_i''(j, m), \\ \rho_{44}(T) &= \frac{1}{Z_5} \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \delta_i''(j, m). \end{aligned} \quad 34$$

برای هر کدام از ماتریس‌های چگالی اتمی به دست آمده در روابط 28 تا 34 سنجه تلافی به شکل زیر محاسبه می‌شود [10]:

$$C = 2 \max \left\{ 0, |\rho_{23}(T)| - \sqrt{\rho_{11}(T) \rho_{44}(T)} \right\}. \quad 35$$

از آنجایی که در دمای صفر حالت گرمایی سامانه به حالت پایه آن تقلیل می‌یابد، انتظار داریم که سنجه تلافی در دمای صفر میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها در حالت پایه را نشان دهد. با افزایش دمای سامانه، حالت‌های دیگر با حالت پایه آمیخته شده و میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها دچار تغییر می‌گردد. نهایتاً در دماهای خیلی بالا (دمای آستانه) چون سامانه به آمیختگی کامل می‌رسد، اتم‌ها جداپذیر می‌شوند.

در شکل‌های 1 تا 4 تأثیرات دما، جفت شدگی اتم-میدان و اتم-اتم را بر میزان درهم‌تنیدگی گرمایی در فضای هیلبرت \mathcal{H} و هر یک از زیرفضاهای آن بررسی کرده‌ایم. در شکل 1 تغییرات تابع $C(\rho)$ بر حسب دمای بدون بعد $\tau = \frac{K_B T}{\hbar \omega}$ و جفت شدگی اتم-میدان λ به ازای مقادیر مختلف j نشان داده شده است. این شکل نشان

$$\rho_{22}(T) = \rho_{33}(T) = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\frac{K_B T}})} \left\{ \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{K_B T}} \beta_i'(j)^2 + e^{-\frac{E_i'(j)}{K_B T}} \beta_i'(j)^2 + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \beta_i''(j, m)^2 \right\},$$

$$\rho_{23}(T) = \rho_{32}^*(T) = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\frac{K_B T}})} \left\{ \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{K_B T}} \beta_i'(j) \gamma_i'(j) + e^{-\frac{E_i'(j)}{K_B T}} \beta_i'(j) \gamma_i''(j) + \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \beta_i''(j, m) \gamma_i''(j, m) \right\},$$

$$\rho_{44}(T) = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\frac{K_B T}})} \sum_{i=1}^4 \sum_{m=-j}^j e^{-\frac{E_i^{(j,m)}}{K_B T}} \delta_i''(j, m),$$

می‌باشند. در زیرفضاهای برانگیخته $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ با ردگیری روی حالت‌های میدان، ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی به ترتیب به صورت

$$\rho_a^{(3)}(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(T) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T) \\ 0 & \rho_{23}^*(T) & \rho_{33}(T) \end{pmatrix}, \quad 30$$

$$\rho_a^{(4)}(T) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(T) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(T) & \rho_{23}(T) \\ 0 & \rho_{23}^*(T) & \rho_{33}(T) \end{pmatrix},$$

محاسبه می‌شوند به طوری که عناصر ماتریسی $\rho_a^{(3)}$ به صورت

$$\begin{aligned} \rho_{11}(T) &= \frac{1}{Z_3} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{K_B T}} \alpha_i'(j)^2, \\ \rho_{22}(T) = \rho_{33}(T) &= \frac{1}{Z_3} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{K_B T}} \beta_i'(j)^2, \end{aligned} \quad 31$$

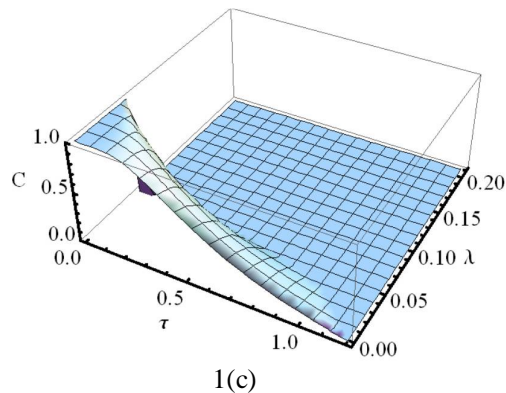
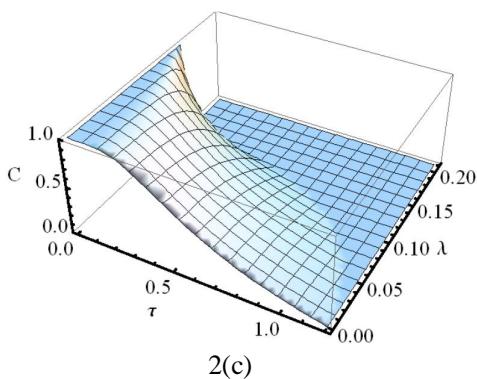
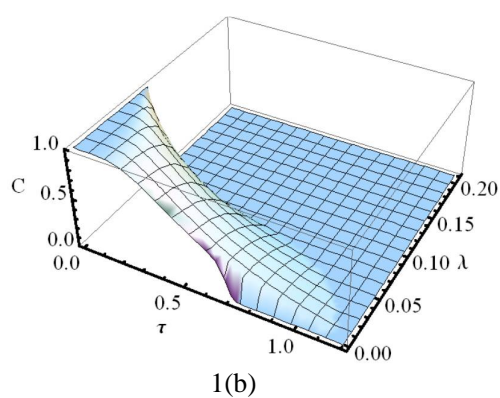
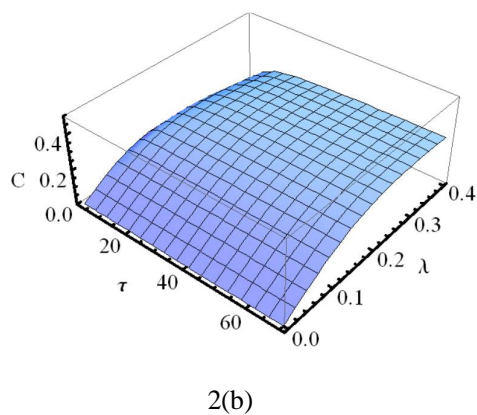
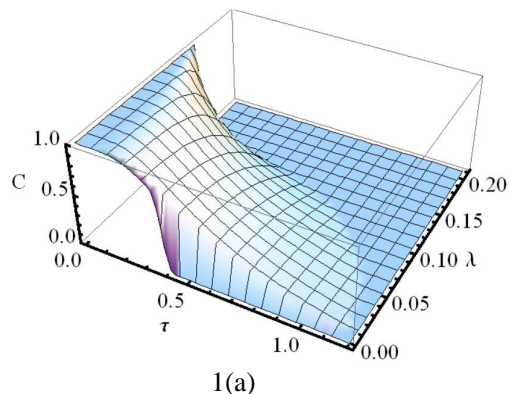
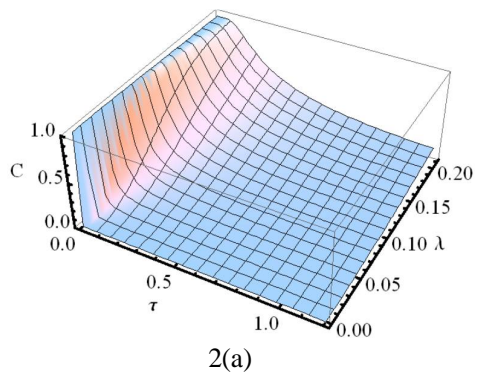
$$\rho_{23}(T) = \frac{1}{Z_3} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i(j)}{K_B T}} \beta_i'(j) \gamma_i'(j),$$

و عناصر ماتریسی $\rho_a^{(4)}$ به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} \rho_{11}(T) &= \frac{1}{Z_4} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i'(j)}{K_B T}} \alpha_i'(j)^2, \\ \rho_{22}(T) = \rho_{33}(T) &= \frac{1}{Z_4} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i'(j)}{K_B T}} \beta_i'(j)^2, \\ \rho_{23}(T) &= \frac{1}{Z_4} \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{E_i'(j)}{K_B T}} \beta_i'(j) \gamma_i''(j). \end{aligned} \quad 32$$

λ کاهش می‌یابد در حالی که در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ دمای آستانه با λ افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای مقادیر کوچک λ درهم‌تنیدگی گرمایی اتم‌ها نسبت به افزایش دما پایدار است در حالی که مشاهده این ویژگی در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ فقط به‌ازای λ های بزرگ مقدور می‌باشد. در شکل 3 تغییرات $C(\rho)$ را برحسب دمای بدون بعد τ و جفت‌شدگی اتم-اتم ρ ، در فضای کل \mathcal{H} و زیرفضاهای آن نشان داده‌ایم. این شکل نشان می‌دهد که در فضای کل \mathcal{H} و در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای $\rho=0$ سنجه تلاقی $C(\rho)$ صفر بوده، به‌طوری‌که با افزایش ρ ، مقدار آن به‌طور ناگهانی به بیشینه مقدار خود می‌رسد. در حالی‌که در زیر فضای $\mathcal{H}^{(4)}$ تابع تلاقی حالت پایه به‌ازای $\rho=0$ غیر صفر بوده که با افزایش ρ مقدار آن به صفر می‌رسد. همچنین مشاهده می‌شود که در فضای کل \mathcal{H} و زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ با افزایش دما میزان درهم‌تنیدگی گرمایی کاهش می‌یابد اما در زیرفضای $\mathcal{H}^{(4)}$ میزان درهم‌تنیدگی با دما افزایش پیدا می‌کند. علاوه‌براین ملاحظه می‌کنیم که در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای ρ های بزرگ پایداری درهم‌تنیدگی اتم‌ها نسبت به افزایش دما بیشتر است در حالی‌که در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ این پایداری به‌ازای ρ های کوچک مشاهده می‌شود.

می‌دهد که به‌ازای λ های کوچک، سنجه تلاقی در دمای صفر (سنجه تلاقی برای حالت پایه) بیشینه مقدار خود را دارد که با افزایش دما و آمیخته شدن حالت‌های اتمی دیگر مقدار آن به‌طور مجانبی کاهش می‌یابد. نهایتاً در یک دمای آستانه به‌دلیل فرایند آمیختگی کامل، اتم‌ها جداپذیر می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌ازای λ های کوچک دمای آستانه با افزایش j افزایش می‌یابد. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش λ میزان درهم‌تنیدگی اتم‌ها کاهش می‌یابد. شیب این کاهش با افزایش j بیشتر شده به‌طوری‌که به‌ازای j های بزرگ مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی حالت پایه مشاهده می‌شود. در شکل 2 رفتار $C(\rho)$ را در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ ، $\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای یک j داده شده بررسی کرده‌ایم. محاسبات عددی نشان می‌دهند که رفتار $C(\rho)$ برحسب j در تمامی زیرفضاها مشابه رفتار آن برحسب j در فضای کل \mathcal{H} است به‌همین دلیل در زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ ، $\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ رفتار $C(\rho)$ را فقط برای یک j داده شده بررسی کرده‌ایم. شکل 2 نشان می‌دهد که در زیر فضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ به‌ازای λ های کوچک، حالت پایه در بیشینه مقدار خود قرار دارد. دلیل فیزیکی این نتیجه این است که به‌ازای λ های کوچک حالت گرمایی سامانه در زیر فضاهای مذکور به‌ترتیب به‌ویژه حالت‌های $|\psi_1(j)\rangle$ و $|\psi_1^*(j,m)\rangle$ تقلیل می‌یابد. در این حالت با ردگیری جزئی نسبت به پایه‌های میدان می‌توان نشان داد که حالت گرمایی تقلیل یافته اتمی، همان حالت‌های بل هستند. همان‌طور که شکل 2 نشان می‌دهد با افزایش دما به‌دلیل آمیخته شدن این حالت‌های بل اتمی با دیگر حالت‌های اتمی میزان درهم‌تنیدگی گرمایی کاهش می‌یابد و نهایتاً در دمای آستانه، درهم‌تنیدگی از بین می‌رود. همچنین مشاهده می‌شود که در زیرفضای $\mathcal{H}^{(5)}$ دمای آستانه با



شکل 2. تغییرات $C(\rho)$ برحسب $\tau = \frac{K_B T}{\hbar \omega}$ و λ در زیرفضاهایی $\mathcal{H}^{(3)}$ (a)، $\mathcal{H}^{(4)}$ (b) و $\mathcal{H}^{(5)}$ (c) به‌ازای $j = 5$ برای مقادیر داده شده در شکل 1.

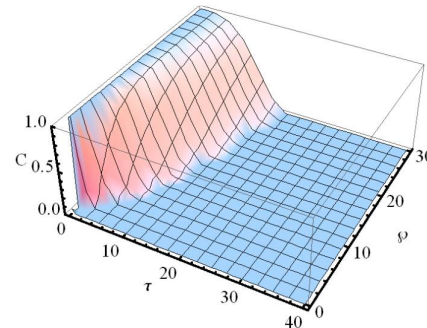
شکل 1. تغییرات $C(\rho)$ برحسب $\tau = \frac{K_B T}{\hbar \omega}$ و λ در فضای کل \mathcal{H} به‌ازای $j = 5$ (a)، $j = 8$ (b) و $j = 12$ (c) برای مقادیر داده شده $\chi = 0.2\omega$ و $\wp = \omega \cdot \omega_0 = 0.2\omega$.

بحث و نتیجه گیری

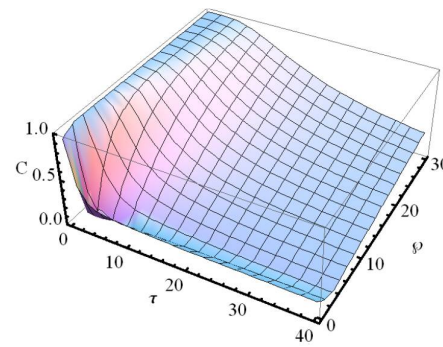
یک مدل کوانتومی که در آن دو اتم دوترانه با جفت شدگی دوقطبی-دوقطبی و یک جفت گر کر غیرخطی هم‌محور که در آن برهم‌کنش اتم و میدان از طریق گذار دو-فوتونی غیرهمگن انجام می‌گیرد مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از ثابت حرکت سامانه، فضای هیلبرت متناظر را به پنج زیرفضا به صورت

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \mathcal{H}^{(3)} \oplus \mathcal{H}^{(4)} \oplus \mathcal{H}^{(5)},$$

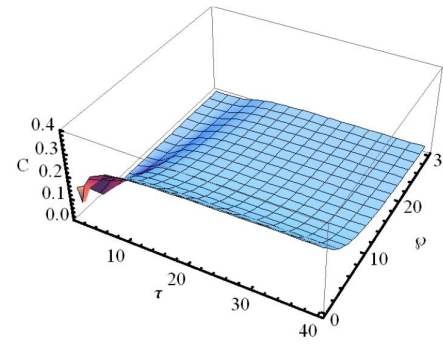
تجزیه کردیم. ویژه‌حالت‌های هامیلتونی سامانه را به دست آورده و سپس حالت گرمایی سامانه را در فضای هیلبرت کل و هریک از زیرفضاهای آن به دست آوردیم. با استفاده از سنجۀ تلافی میزان درهم‌تنیدگی گرمایی اتم‌ها را در فضای هیلبرت کل و همچنین در هر یک از زیرفضاهای آن مطالعه کردیم. محاسبات عددی نشان داد که سنجۀ تلافی به صورت تابعی از دما در فضای کل و هر یک از زیرفضاهای آن، رفتار متفاوتی را نشان می‌دهد. مشاهده شد که در زیرفضاهای برانگیخته خشی $\mathcal{H}^{(1)}$ و $\mathcal{H}^{(2)}$ در هر دمایی اتم‌ها جداپذیرند. درحالی‌که در فضای کلی و زیرفضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ ، $\mathcal{H}^{(4)}$ و $\mathcal{H}^{(5)}$ ، درهم‌تنیدگی اتم-اتم وجود دارد و جفت‌شدگی اتم-اتم و اتم-میدان، میزان درهم‌تنیدگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین نشان داده شد که در زیرفضاهای برانگیخته فرد $\mathcal{H}^{(3)}$ و $\mathcal{H}^{(4)}$ می‌توان درهم‌تنیدگی گرمایی در دماهای بالا را حفظ نمود. در زیر فضای $\mathcal{H}^{(3)}$ حفظ درهم‌تنیدگی به‌ازای مقادیر بزرگ ثابت‌های جفت‌شدگی اتم-اتم یا اتم-میدان و در زیر فضای $\mathcal{H}^{(4)}$ به‌ازای مقادیر کوچک این ثابت‌ها امکان پذیر است. بنابراین برخلاف مطالعات قبلی [12-14] و [16] که در آنها کنترل درهم‌تنیدگی در دماهای بالا از طریق انتخاب مناسب پارامترهای سامانه‌های اپتیکی محقق می‌شد، نشان دادیم که محدود کردن مطالعه درهم‌تنیدگی گرمایی به‌برخی از زیرفضاهای سامانه، نیز منجر به حفظ درهم‌تنیدگی در دماهای بالا می‌شود.



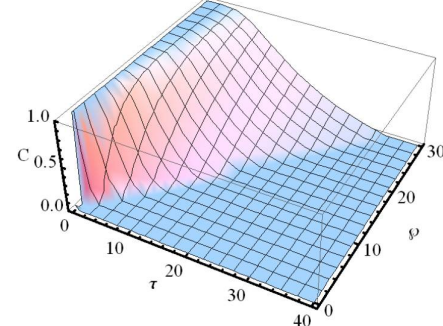
3(a)



3(b)



3(c)



3(d)

شکل 3. تغییرات $C(\rho)$ بر حسب $\tau = \frac{K_B T}{h\omega}$ و ρ در فضای کلی \mathcal{H} و زیر فضاهای $\mathcal{H}^{(3)}$ (b)، $\mathcal{H}^{(4)}$ (c) و $\mathcal{H}^{(5)}$ (d) به‌ازای $j = 5$ و $\omega_0 = 0.2\omega$ ، $\chi = 0.2\omega$ و $\lambda = 0.2\omega$.

coupled cavities, *European Physical Journal D* **67** (2013) 111.

DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-30709-2>

[10] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[11] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein, Volume of the set of separable states, *Physical Review A* **58** (1998) 883-892. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.883>

[12] M.R. Abbasi, M.M. Golshan, Thermal entanglement of a two-level atom and bimodal photons in a Kerr nonlinear coupler, *Physica A* **392** (2013) 6161-6167. DOI: [10.1016/j.physa.2013.07.068](https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.07.068)

[13] M.R. Abbasi, Thermal atom-atom entanglement in a nonlinear cavity, *Physica A* **426** (2015) 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.048>

[14] M.R. Abbasi, Thermal atom-atom entanglement in a bichromatic Kerr nonlinear coupler, *Annals of Physics* **365** (2016) 198-209. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.10.024>

[15] B. Mojaveri, A. Dehghani, M.A. Fasihi, T. Mohammadpour, Ground state and thermal entanglement between two two-level atoms interacting with a non-degenerate parametric amplifier: different sub-spaces, *International Journal of Modern Physics. B* **33** (2019) 1950035. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217979219500358>

[16] Sh. Alizadeh, R. Safaiee, M.M. Golshan, Effect of temperature on photon-photon entanglement in a nonlinear nanocavity, *Physica A* **428** (2015) 133-139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.01.050>

[17] B. Mojaveri, A. Dehghani, M.A. Fasihi, T. Mohammadpour, Thermal entanglement between two two-level atoms in a two-photon Jaynes-Cummings model with an added Kerr medium, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 3396-3409.

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3853-9>

[1] A. Ekert and R. Jozsa, Quantum computation and Shor's factoring algorithm, *Reviews of Modern Physics* **68** (1996) 733-753. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.68.733>

[2] H.K. Lo, S. Popescu, T. Spiller, Introduction to Quantum Computation and Information, *World Scientific*, Singapore, (1998).

[3] S.M. Jensen, The nonlinear coherent coupler, *IEE J. Quantum Electron* **18** (1982) 1580-1583. DOI: [10.1109/JQE.1982.1071438](https://doi.org/10.1109/JQE.1982.1071438)

[4] A. Chefles, S.M. Barnett, Quantum theory of two-mode nonlinear directional couplers, *Journal of Modern Optics* **43** (1996) 709-727. DOI: [10.1080/09500349608232778](https://doi.org/10.1080/09500349608232778)

[5] R. Horák, M. Bertolotti, C. Sibilina, J. Peřina, Quantum effects in a nonlinear coherent coupler, *Journal of the Optical Society of America B* **6** (1989) 199-204. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.6.000199>

[6] M.J. Faghihi, M.K. Tavassoly, M. Hatami, Dynamics of entanglement of a three-level atom in motion interacting with two coupled modes including parametric down conversion, *Physica A* **407** (2014) 100-109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.03.092>

[7] A.-S. F. Obada, A.A. Eied, Entanglement in a system of an Ξ -type three-level atom interacting with a non-correlated two-mode cavity field in the presence of nonlinearities, *Optics Communications* **282** (2009) 2184-2191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2009.02.038>

[8] M.K. Tavassoly, F. Yadollahi, Dynamics of states in the nonlinear interaction regime between a three-level atom and generalized coherent states and their non-classical features, *International Journal of Modern Physics B* **26** (2012) 1250027. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217979212500270>

[9] W.Z. Li, L.T. Shen, Sudden death and birth of two-atom entanglement with two thermal fields in