

# Effect of Noise on Fidelity of Quantum Teleportation through an Entangled Coherent Channel

\*Sevda Mirzaei

Department of Physics, Faculty of Science, Sahand University of Technology, Sahand New Town,  
Tabriz, Iran

Received: 27.02.2018    Final revised: 02.07.2019    Accepted: 22.07.2019

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14918](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14918)

## Abstract

Quantum teleportation is the transmission and reconstruction of the state of a quantum system over arbitrary distances. Since the possibility of transferring quantum information is one of the foundations of newly-emerging fields of science such as quantum communication and quantum computation, in this article quantum teleportation of a qubit will be investigated via an entangled channel. To this aim, we will use two-mode entangled coherent channels generated by beam splitter and Kerr medium. It will be shown that the amount of entanglement and fidelity of quantum teleportation depend on the intensity of the coherent state such that when the intensity of coherent state increases sharply ( $p = 0$ ), the entanglement and the average fidelity reach a maximum,  $\bar{F}_{\max} = 1$ .

On the other hand, considering the fact that real physical systems are always affected by their surroundings, investigation of the effects of environment, as a source of quantum dissipation on entanglement and fidelity, will be very important. In this article, the effects of amplitude damping on average fidelity of quantum teleportation will be analyzed. The results show that the average fidelity is decreased by increasing amplitude damping. Moreover, the loss of fidelity in maximally entangled channels is more than that of non-maximally entangled channels.

**Keywords:** Entanglement, Quantum teleportation, Fidelity, Amplitude damping, Beam splitter, Kerr medium, Coherent state.

---

\*Corresponding Author: [s.mirzaei@sut.ac.ir](mailto:s.mirzaei@sut.ac.ir)



## اثر نوفه بر وفاداری دوربری کوآنتومی به واسطه کانال همدوس درهم‌تنیده

سودا میرزائی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، شهر جدید سهند، تبریز، ایران

دریافت: 1397/12/08 ویرایش نهایی: 1398/04/11 پذیرش: 1398/04/31

Doi: [10.22055/JRMBS.2019.14918](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2019.14918)

### چکیده

دوربری کوآنتومی، انتقال و بازسازی حالت یک سیستم کوآنتومی در فاصله‌های دلخواه می‌باشد. از آنجایی که امکان انتقال اطلاعات کوآنتومی یکی از پدیده‌هایی است که منجر به ظهور زمینه‌های علمی جدید نظیر ارتباطات کوآنتومی و محاسبات کوآنتومی شده است، لذا در این مقاله دوربری کوآنتومی یک کیوبیت توسط یک کانال درهم‌تنیده بررسی خواهد شد. برای این منظور از حالت همدوس درهم‌تنیده دو مده که به واسطه شکافنده باریکه و محیط کر تولید شده، استفاده خواهیم نمود. نشان داده خواهد شد میزان درهم‌تنیدگی و همین‌طور وفاداری دوربری کوآنتومی وابسته به شدت دامنه حالت همدوس می‌باشد به طوری که هرگاه شدت دامنه حالت همدوس به شدت افزایش یابد ( $p \rightarrow 0$ )، درهم‌تنیدگی و وفاداری میانگین بیشینه خواهد شد،  $\bar{F}_{\max} = 1$ . از طرفی با توجه به اینکه سیستم‌های فیزیکی واقعی همواره تحت تأثیر محیط اطراف خود قرار می‌گیرند، لذا بررسی اثرات محیط به‌عنوان یک منبع اتلاف کوآنتومی بر میزان درهم‌تنیدگی و همچنین وفاداری کوآنتومی بسیار مهم خواهد بود. در این مقاله اثرات میرایی دامنه بر میانگین وفاداری دوربری کوآنتومی مورد بررسی قرار گرفته خواهد شد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دامنه میرایی، وفاداری کوآنتومی کاهش می‌یابد. به‌علاوه شدت افت وفاداری، به واسطه کانال‌های با بیشترین درهم‌تنیدگی نسبت به کانال‌های با درهم‌تنیدگی غیر بیشینه بیشتر است.

**کلیدواژگان:** درهم‌تنیدگی، دوربری کوآنتومی، وفاداری، میرایی دامنه، شکافنده باریکه، محیط کر، حالت همدوس

### مقدمه

اندازه‌گیری مقدار درهم‌تنیدگی که در این مقاله از آن استفاده می‌شود، تلاقی<sup>1</sup> می‌باشد که ابتدا توسط ووترز<sup>2</sup> برای حالات دو جزئی مطرح شد [۲،۳]. به‌علاوه تولید حالات درهم‌تنیده اولین گام در فرآیند اطلاعات کوآنتومی است که در سال‌های اخیر علاقه افراد زیادی را به‌خود جلب کرده است. در میان حالت‌های درهم‌تنیده نیز حالات همدوس درهم‌تنیده، به‌علت کاربرد فراوانش در اپتیک کوآنتومی، در دهه‌های اخیر مورد مطالعه قرار گرفته است [4-8]. حالت همدوس

درهم‌تنیدگی کوآنتومی یکی از مشخصه‌های برجسته مکانیک کوآنتومی است که نقش اساسی در فرآیند اطلاعات کوآنتومی دارد. این پدیده یکی از ویژگی‌های سیستم‌های مرکب است که شامل دو یا بیشتر جزء می‌باشد که در مقابل آن مفهوم جداپذیری قرار دارد [1]. در سال‌های اخیر برای توصیف خواص کیفی و کمی درهم‌تنیدگی تلاش‌های زیادی انجام شده است. به طوری که سنجه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی معرفی شده است. یکی از سنجه‌های مهم

\* نویسنده مسئول: s.mirzaei@sut.ac.ir

<sup>1</sup> Concurrence

<sup>2</sup> Wootters



در [15 و 16] از حالت بل  $(|00\rangle \pm |11\rangle) / \sqrt{2}$  با  $|\phi^\pm\rangle$  در هم تنیدگی بیشینه استفاده شده است. در این مقاله به علت کاربرد فراوان حالات همدوس در اپتیک کوانتومی قصد داریم ابتدا به وسیله شکافنده باریکه و محیط غیرخطی کر<sup>7</sup>، حالت همدوس در هم تنیده دو مده تولید کرده سپس فرآیند دوربری کوانتومی حالت یک کیوبیت را به واسطه کانال همدوس در هم تنیده مورد مطالعه قرار می دهیم. همچنین به دلیل برهم کنش بین سیستم و محیط در طی فرآیند دوربری، اثرات میرایی دامنه را بر میانگین وفاداری دوربری کوانتومی بررسی می کنیم. با توجه به اهمیت نوبه در مسائل کاربردی جالب خواهد بود میزان تأثیر میرایی را در هر مرحله از فرآیند دوربری مورد مطالعه قرار دهیم. ملاحظه خواهیم نمود که میرایی دامنه، باعث افت وفاداری دوربری کوانتومی خواهد شد.

### حالات همدوس در هم تنیده

در میان میدان های تابشی، حالت های همدوس به عنوان نزدیکترین حالت ها به کلاسیک هستند. یک حالت همدوس ویژه حالت عملگر نابودیست که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad 1$$

به طوری که  $\alpha$  یک عدد مختلط و  $\hat{a}$  عملگر نابودیست. این ویژه حالات را می توان بر حسب پایه های شمارنده به صورت زیر بسط داد:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad 2$$

$|0\rangle$  حالت خلأ و  $\hat{D}(\alpha)$  عملگر جابه جایی است که

(یا به اصطلاح حالت گلوب<sup>1</sup>) نزدیکترین حالت کوانتومی به موج سینوسی کلاسیکی، نظیر یک موج لیزر پیوسته است که در سال 1926 توسط شرودینگر ضمن مطالعه نوسانگر هماهنگ کوانتومی معرفی شد [9] که نقش مهمی در زمینه های مختلف فیزیک به ویژه اپتیک کوانتومی دارد.

یکی از کاربردهای در هم تنیدگی، دوربری کوانتومی است که به طور تجربی و نظری مورد مطالعه قرار گرفته است. امکان انتقال اطلاعات کوانتومی یکی از پدیده هایی است که منجر به ظهور زمینه های علمی جدید نظیر ارتباطات کوانتومی<sup>2</sup> و محاسبات کوانتومی<sup>3</sup> شده است [10 و 11]. در سال 1993 بنت<sup>4</sup> و همکاران برای اولین بار توانستند به واسطه یک کانال کوانتومی، یک حالت کوانتومی از فرستنده (آلیس) به گیرنده (باب) بفرستند [12]. برای این منظور از جفت های در هم تنیده به عنوان کانال کوانتومی بین فرستنده و گیرنده استفاده می شود. سیستم های کوانتومی حقیقی به طور اجتناب ناپذیری تحت تأثیر محیط اطراف خود قرار می گیرند به عنوان مثال زمانی که یک حالت همدوس اپتیکی از میان یک ابزار اپتیکی (شکافنده باریکه و ...) عبور می کند، کسری از فوتون ها توسط محیط جذب می شود از این رو باید در مطالعه در هم تنیدگی چنین اثراتی در نظر گرفته شود [13]. اثرات نوبه بر وفاداری دوربری کوانتومی با حل تحلیلی و عددی معادله لیندبلاد<sup>5</sup> در مراجع [14 و 15] مطالعه شده است. در نمایش کره بلوخ نیز اثر نوبه بر دوربری کوانتومی به واسطه حالت بل<sup>6</sup> مورد بررسی قرار گرفته است [16].

<sup>5</sup> Lindblad

<sup>6</sup> Bell

<sup>7</sup> Nonlinear Kerr medium

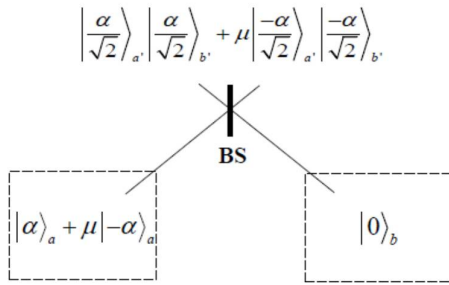
<sup>1</sup> Glauber

<sup>2</sup> Quantum communication

<sup>3</sup> Quantum computation

<sup>4</sup> Bennett

ورودی درگاه b، حالت خلأ در مد b باشد مطابق شکل 1 خواهیم داشت:



شکل 1. تولید حالت همدوس درهم‌تنیده دو مده با استفاده از شکافنده باریکه 50-50

$$\hat{B}(|\alpha\rangle_a + |-\alpha\rangle_a)|0\rangle_b = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'} \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'} + \left|\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'} \left|\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'}. \quad 7$$

همان‌طور که نشان خواهیم داد حالت به‌دست آمده یک حالت همدوس درهم‌تنیده دو مده است. برای تولید برهم نهی از حالات همدوس درهم‌تنیده از محیط غیر خطی کر استفاده می‌کنیم که با عملگر یکانی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{K} = e^{\frac{-i\pi(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2}{2}} \quad 8$$

اثر محیط کر روی حالت همدوس عبارتست از

$$\hat{K}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle). \quad 9$$

حالت متنتجه شبیه حالت گریه شرویدینگر است. می‌توان با قرار دادن یک شکافنده باریکه 50-50 در مقابل چنین حالتی یک حالت همدوس درهم‌تنیده به‌شکل کلی زیر تولید کرد:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(|\alpha, \alpha\rangle + \mu|-\alpha, -\alpha\rangle) \quad 10$$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad 3$$

حاصلضرب دو حالت همدوس نیز عبارتست از

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta)}, \quad 4$$

که مقداری غیر صفر است یعنی دو حالت همدوس متعامد نیستند. برای تولید حالت‌های همدوس درهم‌تنیده یکی از ابزارهای اپتیکی به‌نام شکافنده باریکه<sup>1</sup> را معرفی می‌کنیم. شکافنده باریکه قطبنده که خاصیت شکافتن باریکه نور به دو قطبش خطی عمود بر هم را دارد از دو بلور دو شکستی به‌هم چسبیده نظیر کلسیت و کوارتز، تشکیل شده است. نوع دیگر شکافنده باریکه یک آینه نیم نقره اندود متشکل از یک پوشش نیمه بازتابنده و یک پوشش ضد بازتابنده در طرف دیگر است. عملگر یکانی متناظر با این وسیله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{B} = e^{\frac{\pi}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})} \quad 5$$

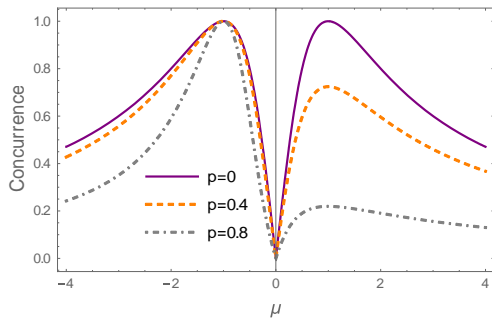
عملگرهای  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^\dagger$  و همین‌طور  $\hat{b}$  و  $\hat{b}^\dagger$  عملگرهای تولید و نابودی هستند. اثر شکافنده روی باریکه لیزری به‌صورت زیر است:

$$\hat{B}|\alpha\rangle_a |0\rangle_b = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{a'} \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{b'}. \quad 6$$

که در واقع شکافنده پرتوی لیزر را به دو قسمت مساوی در دو درگاه تبدیل می‌کند. حال با این مقدمه می‌خواهیم یک حالت همدوس درهم‌تنیده دو مده تولید کنیم. اگر باریکه ورودی به درگاه a یک حالت برهم‌نهی از حالات همدوس به‌شکل  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$  در مد a و

<sup>1</sup> Beam splitter

نمودار تلافی به صورت تابعی از  $\mu$  و  $p$  در شکل 2 رسم شده است.



شکل 2. تلافی حالت  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(|\alpha, \alpha\rangle + \mu|-\alpha, -\alpha\rangle)$  به صورت تابعی از  $\mu$  و  $p$  معین.

شکل 2 رفتار نامتقارن تلافی را به ازای  $\mu$  های مثبت و منفی نشان می دهد. ملاحظه می شود که به ازای  $\mu=0$  حالت 10 جداپذیر است. علاوه بر این، وقتی  $\mu=-1$  باشد حالت همدوس درهم تنیده دو مده مستقل از مقدار  $p$ ، حالتی با بیشینه درهم تنیدگی یعنی  $C_{\max} = 1$  است. از طرفی به ازای  $\mu=1$  تنها به شرطی که  $p$  صفر باشد حالت همدوس درهم تنیده، بیشینه درهم تنیدگی را خواهد داشت.

### دوربری کوانتومی

دوربری کوانتومی راهی برای انتقال حالات کوانتومی بین سیستم هاست که بر پایه درهم تنیدگی بنا نهاده شده است. در این فرآیند، آلیس در نظر دارد یک حالت تک کیوبیتی دلخواه به شکل کلی

$$|\varphi\rangle_A = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle_A + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle_A, \quad 17$$

که در آن  $\theta \in [0, \pi]$  و  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ، به باب بفرستد. به طوریکه مقادیر مختلف  $\theta$  حالات با دامنه های مختلف و  $\varphi$  فاز این حالات را مشخص می کند. برای این منظور یک حالت درهم تنیده برای مثال  $|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{BC} + |11\rangle_{BC})$  به عنوان کانال کوانتومی بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته می شود.

که در آن  $M = 1 + \mu^2 + 2\mu p^2$  ضریب بهنجارش می باشد. با استفاده از این حقیقت که حالات همدوس  $|\alpha\rangle$  و  $|-\alpha\rangle$  مستقل خطی هستند و یک زیرفضای هیلبرت دوبعدی را جاروب می کنند، پایه های متعام  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  چنین تعریف می شوند [8-6]:

$$|0\rangle = |\alpha\rangle, |1\rangle = \frac{|-\alpha\rangle - p|\alpha\rangle}{N} \quad 11$$

به طوری که

$$p = \langle \alpha | -\alpha \rangle, \quad 12$$

$$N = \sqrt{1 - p^2}.$$

به طور کلی  $\alpha$  و  $\mu$  اعداد مختلط هستند که برای سادگی فرض می کنیم حقیقی اند. با جایگذاری رابطه 11 در رابطه 10 یک حالت دو کیوبیتی به شکل زیر به دست می آید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} [(1 + \mu p^2) |00\rangle + \mu N^2 |11\rangle + \mu p N (|01\rangle + |10\rangle)] \quad 13$$

برای اندازه گیری درهم تنیدگی بین دو کیوبیت می توان از سنج تلافی استفاده کرد. تلافی حالت دو کیوبیتی به شکل کلی

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \quad 14$$

از رابطه زیر به دست می آید:

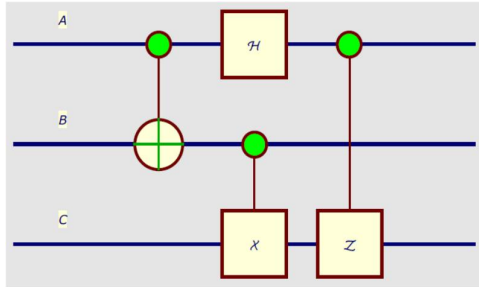
$$C = 2 |a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}| \quad 15$$

به طوری که مقدار تلافی برای یک حالت با بیشینه درهم تنیدگی برابر یک و برای یک حالت جداپذیر صفر است. با استفاده از سنج فوق درهم تنیدگی به صورت رابطه زیر به دست می آید:

$$C = \frac{2|\mu(1 - p^2)|}{|1 + \mu^2 + 2\mu p^2|} \quad 16$$

به طوری که اگر حالت کوآنتومی  $\rho_C$  به مکان C فرستاده شود، وفاداری دوربری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = Tr[\langle \varphi | \rho_C \rangle_A] \quad 23$$



شکل 3. مدار کوآنتومی دوربری کوآنتومی ایده‌آل

وفاداری کوآنتومی میزان همپوشانی حالت ارسال شده را با حالت ورودی نشان می‌دهد.

### اثرات میرایی دامنه<sup>3</sup> در دوربری کوآنتومی

سیستم‌های کوآنتومی حقیقی به طور اجتناب ناپذیری تحت تأثیر محیط اطراف خود قرار می‌گیرند. در یک آزمایش واقعی در هر مرحله فوق‌الذکر شکافنده باریکه‌هایی درگیر هستند. به طوری که اندرکنش سیستم با محیط می‌تواند پس از هر مرحله اتفاق بیفتد. نوفه کوآنتومی نظیر میرایی دامنه کیوبیت‌های A، B و C می‌تواند در هر کدام از مراحل فرآیند دوربری کوآنتومی، وفاداری دوربری را تحت تأثیر قرار دهد. اگر فرض کنیم تنها کیوبیت A با محیط اندرکنش کند، بنابراین میرایی دامنه بعد از اندازه‌گیری‌های مرحله 1 دوربری را تحت تأثیر قرار می‌دهد از این رو اثر عملگر LOCC<sup>4</sup>،  $\tilde{U}_{ABCE}$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{U}_{ABCE} = C_{AC}^z C_{BC}^x H_A (D_{AE}) C_{AB}^x, \quad 24$$

که در آن  $D_{AE}$  عملگر یکانی توصیف کننده میرایی دامنه می‌باشد که به صورت زیر اثر می‌کند:

به طوری که حالت اولیه کل به صورت  $|\psi\rangle_{in} = |\varphi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_{BC}$  خواهد بود که در آن دو کیوبیت اول دست آلیس و کیوبیت سوم دست باب می‌باشد. آلیس با اعمال برخی عملگرهای موضعی و گیت‌های کوآنتومی کار انتقال اطلاعات را آغاز می‌کند. فرآیند انتقال اطلاعات به صورت زیر می‌باشد که توسط مدار کوآنتومی شکل 3 نمایش داده شده است:

1) ابتدا گیت منطقی<sup>1</sup> CNOT روی کیوبیت A و B اعمال می‌شود،

$$C_{AB}^x = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma^x \end{pmatrix}, \quad 18$$

به طوری که  $\sigma^x$  مؤلفه X ماتریس پائولی و I ماتریس واحد می‌باشد.

2) گیت هادامارد<sup>2</sup>  $H_A$  منحصراً روی کیوبیت A اثر می‌کند.

$$H_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_A^x + \sigma_A^z), \quad 19$$

که در آن  $\sigma^z$  مؤلفه Z ماتریس پائولی است.

3) گیت منطقی کنترل  $C_{BC}^x$  بر دو کیوبیت B و C اثر می‌کند.

4) در پایان گیت منطقی کنترل  $C_{AC}^x$  بر کیوبیت‌های A و B اثر می‌کند:

$$C_{AC}^z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix}. \quad 20$$

به طور کلی این چهار مرحله با عملگر نمایش داده می‌شود که

$$U_{ABC} = C_{AC}^z C_{BC}^x H_A C_{AB}^x. \quad 21$$

این چهار مرحله در شکل 3 نمایش داده شده است. در این فرآیند حالت نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho_C = Tr_{AB}[U_{ABC}(\rho_A \otimes \rho_{BC})U_{ABC}^\dagger]. \quad 22$$

<sup>3</sup> Amplitude damping

<sup>4</sup> Local operation and classical communication

<sup>1</sup> Logic gate

<sup>2</sup> Hadamard

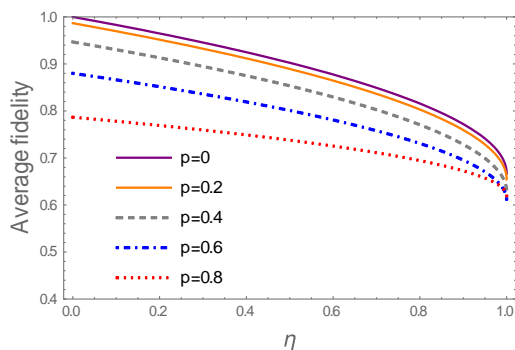
به عنوان  $|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{M}}(|\alpha, \alpha\rangle_{BC} + \mu|-\alpha, -\alpha\rangle_{BC})$  کانال کوانتومی استفاده خواهیم نمود. با این فرض که آلیس می خواهد حالت  $|\varphi\rangle_A$  را به باب بفرستد می توان میانگین وفاداری را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F \sin \theta d\theta d\varphi. \quad 29$$

با فرض  $\mu = 1$  میانگین وفاداری عبارتست از

$$\bar{F} = \frac{2 + p^2 + p^4 + \sqrt{1-\eta}(1 + p^2 - 2p^4)}{3(1 + p^2)}. \quad 30$$

توجه داریم که در این مقاله، حالت ورودی به ازای  $\varphi = 0$  در نظر گرفته شده است. در شکل 4 رفتار میانگین وفاداری دوربری بواسطه کانال نوفه دار به صورت تابعی از پارامتر نوفه  $\eta$  و به ازای مقادیر مختلف  $p$  رسم شده است.



شکل 4. میانگین وفاداری به صورت تابعی از پارامتر نوفه  $\eta$ ، به ازای مقادیر مختلف  $p$  (اثر میرایی دامنه بر کیوبیت A)

شکل 4 واهمدوسی کیوبیت A را پس از اندازه گیری مرحله 1 نشان می دهد. با توجه به شکل 4 ملاحظه می شود که با افزایش ضریب میرایی  $\eta$ ، میانگین وفاداری دوربری کوانتومی کاهش می یابد. همچنین وقتی  $\eta \rightarrow 1$ ، شدت افت  $\bar{F}$  زیادتر می شود. به ازای  $p = 0$ ، کمینه مقدار وفاداری،  $\bar{F}_{\min} = \frac{2}{3}$  خواهد بود

$$\begin{aligned} D_{AE} |0\rangle_A |0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_A |0\rangle_E, \\ D_{AE} |1\rangle_A |0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-\eta} |1\rangle_A |0\rangle_E + \sqrt{\eta} |0\rangle_A |1\rangle_E, \end{aligned} \quad 25$$

به طوری که  $\eta$  دامنه میرایی را نمایش می دهد. ملاحظه می شود زمانیکه  $\eta = 1$  میرایی دامنه و در نتیجه نوفه محیط بیشینه است و بالعکس. در اینجا اثرات میرایی دامنه بر کیوبیت های A، B و C را به طور جداگانه بررسی خواهیم نمود:

### اثر میرایی دامنه بر کیوبیت A

فرض می کنیم میرایی دامنه در مرحله یک بر کیوبیت A اثر کند در چنین حالتی ماتریس چگالی  $\rho_C^D$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \rho_C^D &= \sum_{n=0}^1 Tr_{AB} [C_{AC}^\dagger C_{BC}^x H_A (M_A^n) C_{AB}^x \\ &\times (\rho_A \otimes \rho_{BC}) C_{AB}^{x\dagger} (M_A^{n\dagger}) H_A^\dagger C_{BC}^{x\dagger} C_{AC}^\dagger] \end{aligned} \quad 26$$

با اندکی محاسبات می توان شکل ماتریسی  $\rho_C^D$  را به دست آورد که در بخش پیوست آورده شده است. می توان ارتباط بین  $D_{AE}$  و  $M_A^n$  را به شکل زیر به دست آورد:

$$Tr_E [D_{AE} \rho_A \otimes \rho_{BC} D_{AE}^\dagger] = \sum_{n=0}^1 M_A^n \rho_A M_A^{n\dagger}, \quad 27$$

که در آن عملگرهای  $M_A^n$  به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} M_A^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}, \\ M_A^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad 28$$

به منظور بررسی اثرات نوفه کوانتومی بر میانگین وفاداری کوانتومی، از حالت خالص همدوس درهم تنیده تولید شده بواسطه محیط کر و شکافنده باریکه (رابطه 10)

می‌یابد. از طرف دیگر وفاداری میانگین با در نظر گرفتن اثر میرایی پس از مرحله 3 به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{F} = \frac{3+2p^2-p^4}{3(1+p^2)} \quad 33$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که در این حالت وفاداری میانگین مستقل از پارامتر  $\eta$  است. با توجه به اینکه اندازه‌گیری‌های مراحل 3 و 4 معادل با عملگر موضعی<sup>5</sup> روی کیوبیت C در فرآیند دوربری می‌باشد، لذا طبق انتظار در نظر گرفتن اثر میرایی دامنه بر کیوبیت B پس از مرحله 3 مستقل از پارامتر  $\eta$  است.

#### اثر میرایی دامنه بر کیوبیت C

حالت خروجی سیستم پس از فرآیند دوربری کوآنتومی با در نظر گرفتن اثرات میرایی بر کیوبیت C پس از مرحله 3 عبارت است از:

$$\rho_C^D = \sum_{n=0}^1 Tr_{AB} [C_{AC}^z (M_C^n) C_{BC}^x H_A C_{AB}^x \times (\rho_A \otimes \rho_{BC}) C_{AB}^{x\dagger} H_A^\dagger C_{BC}^{x\dagger} (M_C^n) C_{AC}^{z\dagger}], \quad 34$$

$M_C^n$  مشابه رابطه 28 می‌باشد که بر کیوبیت C اثر می‌کند. نتیجه تحلیلی  $\rho_C^D$  در پیوست نوشته شده است. به طور مشابه با فرض  $\mu=1$  میانگین دوربری به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\bar{F} = \frac{1}{6(1+p^2)} (4+2\sqrt{1-\eta}-\eta - 2p^4(-1+2\sqrt{1-\eta}+\eta) + p^2(2+2\sqrt{1-\eta}+\eta)). \quad 35$$

نمودار وفاداری میانگین برحسب پارامتر میرایی در شکل 6 رسم شده است. بررسی اثر میرایی بر کیوبیت C پس از مرحله 4 نیز نتیجه یکسانی را در بر خواهد داشت. شکل 6، کاهش وفاداری میانگین را با افزایش

که کمترین مقدار وفاداری برای دوربری کوآنتومی موفق می‌باشد.

#### اثر میرایی دامنه بر کیوبیت B

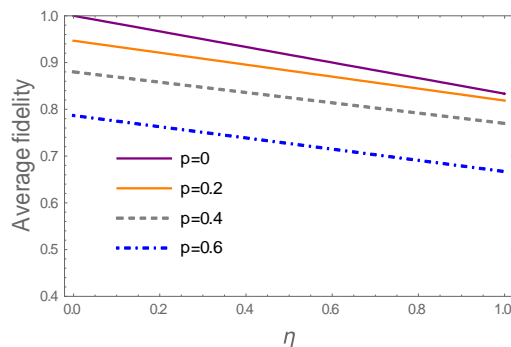
کیوبیت B بعد از مراحل 1 و 3 تحت تأثیر میرایی دامنه قرار می‌گیرد. به طوری که اگر اثر میرایی را پس از مرحله 1 در نظر بگیریم، آنگاه حالت سیستم پس از دوربری عبارت است از

$$\rho_C^D = \sum_{n=0}^1 Tr_{AB} [C_{AC}^z C_{BC}^x H_A (M_B^n) C_{AB}^x \times (\rho_A \otimes \rho_{BC}) C_{AB}^{x\dagger} (M_B^n) H_A^\dagger C_{BC}^{x\dagger} C_{AC}^{z\dagger}] \quad 31$$

که در آن  $M_B^n$  همانند رابطه 28 می‌باشد که بر کیوبیت B اثر می‌کند. ماتریس  $\rho_C^D$  در پیوست آورده شده است. با فرض  $\mu=1$  میانگین وفاداری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{F} = \frac{6-\eta-2p^4(1+\eta)+p^2(4+\eta)}{6(1+p^2)} \quad 32$$

رفتار وفاداری به صورت تابعی از پارامتر  $\eta$  در شکل 5 رسم شده است.



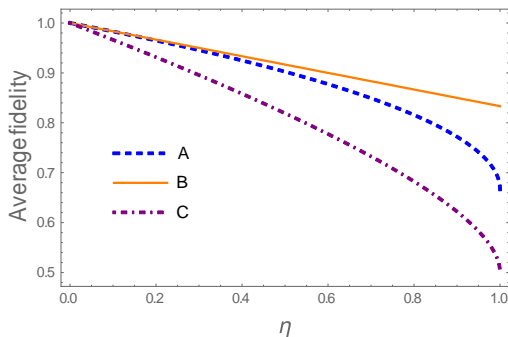
شکل 5. میانگین وفاداری به صورت تابعی از پارامتر نوفه  $\eta$ ، به ازای مقادیر مختلف p (اثر میرایی دامنه بر کیوبیت B پس از مرحله 1).

با توجه به شکل 5 ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب میرایی  $\eta$  میانگین وفاداری دوربری کوآنتومی کاهش

<sup>5</sup> Local operation



بیشینه، بیشتر است. همچنین به منظور مقایسه اثرات میرایی دامنه بر کیوبیت‌های A، B و C نمودار وفاداری میانگین به ازای  $p = 0$  و به صورت تابعی از پارامتر نوفه در شکل 7 رسم شده است.



شکل 7. میانگین وفاداری به صورت تابعی از پارامتر نوفه  $\eta$ ، به ازای  $p = 0$  و با در نظر گرفتن اثر میرایی دامنه بر کیوبیت A (خط چین)، کیوبیت B (خط پر) و کیوبیت C (خط-قطعه). نمودار نشان می‌دهد که در اثر میرایی دامنه کیوبیت B، شدت افت وفاداری میانگین نسبت به کیوبیت‌های A و C کمتر است. در حالی که افت وفاداری دوربری در اثر میرایی دامنه کیوبیت C روند سریع‌تری دارد.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله اثرات نوفه کوانتومی بر میانگین وفاداری دوربری مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که میرایی دامنه کیوبیت‌های A، B و C اثرات مخرب بر وفاداری دارد. به منظور انجام دوربری کوانتومی از یک حالت خالص هم‌دوس درهم‌تنیده دو مده استفاده کردیم و دیدیم که به ازای  $\mu = 1$  با کاهش  $p$  (افزایش شدت میدان هم‌دوس  $\alpha$ ) میزان درهم‌تنیدگی و در نتیجه میانگین وفاداری دوربری افزایش می‌یابد، به طوری که به ازای  $p = 0$ ،  $\bar{F}_{\max} = 1$  می‌باشد. همچنین مشاهده کردیم که در اثر میرایی دامنه کیوبیت‌های A، B و C یعنی با افزایش  $\eta$ ، میانگین وفاداری کاهش پیدا کرد. به طوری که روند افت وفاداری دوربری در اثر میرایی دامنه کیوبیت C

ضریب میرایی نشان می‌دهد. به علاوه ملاحظه می‌شود زمانیکه  $\eta$  به یک میل می‌کند به ازای تمامی مقادیر  $p$  بین صفر و یک، منحنی وفاداری میانگین به مقدار ثابت  $\bar{F}_{\min} = \frac{1}{2}$  کاهش می‌یابد و این مسئله نشان می‌دهد که در محیط‌هایی با نوفه کوانتومی قوی، رفتار وفاداری میانگین به واسطه کانال‌های کوانتومی متفاوت تقریباً هم‌ارز هستند. همچنین به ازای  $p = 0$ ، با استفاده از رابطه 35 حد پارامتر نوفه برای دوربری کوانتومی موفق،  $\eta = 0.8284$  خواهد بود.

مقایسه شکل‌های 4، 5 و 6 نشان می‌دهد وقتی  $p$  به صفر میل می‌کند:

1- به ازای  $\eta = 0$ ، وفاداری میانگین بیشینه است، یعنی:  $\bar{F}_{\max} = 1$ .

2- به ازای  $\eta = 1$ ، وفاداری میانگین در اثر میرایی دامنه کیوبیت‌های A و B (پس از مرحله 1) به ترتیب  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{5}{6}$  خواهد بود و این نشان می‌دهد که دوربری کوانتومی موفق رخ می‌دهد. در حالی که پس از میرایی دامنه کیوبیت C، وفاداری میانگین  $\bar{F}_{\min} = \frac{1}{2}$  است.

3- از شکل‌های 4 و 6 ملاحظه می‌شود به ازای  $\eta$  های کوچک، وفاداری میانگین به آرامی کاهش می‌یابد.

نکته قابل توجه این است که چنانچه درهم‌تنیدگی کانال کمتر از یک باشد، روند کاهش وفاداری میانگین با در نظر گرفتن میرایی آهسته‌تر خواهد بود و این شاهدی بر این واقعیت است که تأثیر میرایی دامنه بر میانگین وفاداری دوربری کوانتومی به واسطه کانال درهم‌تنیده بیشینه نسبت به کانال با درهم‌تنیدگی غیر

همچنین با در نظر گرفتن اثر میرایی دامنه بر کیوبیت C خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(M(1+\eta) + (1-\eta)(1+2\mu p^2 \\ &\quad + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta), \\ \rho_{12} &= \rho_{21} = \mu(1-p^2)(1+2\mu p^2) \sqrt{1-\eta} \sin \theta \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1+\mu(\mu+2p^2) \\ &\quad - (1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta) \end{aligned}$$

### مرجع‌ها

- [1] A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen, Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **47** (1935) 777-780.
- [2] W.K. Wootters, Entanglement Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Physical Review Letter* **80** (1998) 22-45.
- [3] W.K. Wootters, Entanglement of formation and concurrence, *Quantum Information and Computation* **1** (2001) 27-44.
- [4] B.C. Sanders, Entangled coherent states, *Physical Review A* **45** (1992) 6811.
- [5] X. Wang, B.C. Sanders Multipartite entangled coherent states, *Physical Review A* **65** (2001) 012303.
- [6] X. Wang, Bipartite entangled non-orthogonal states, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** (2002) 165-173.
- [7] S.J. van Enk, O. Hirota; Entangled coherent states: Teleportation and decoherence, *Physical Review A* **64** (2001) 022313.
- [8] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Entanglement of Multi-qudit States Constructed by Linearly Independent Coherent States: Balanced Case, *International*

نسبت به کیوبیت‌های A و B سریعتر است. به‌علاوه نتایج نشان داد که شدت افت میانگین وفاداری به‌واسطه حالات همدوس درهم‌تنیده غیر بیشینه نسبت به حالات با بیشینه درهم‌تنیدگی، کوچکتر خواهد بود و این گواه این حقیقت می‌باشد که کانال‌های با بیشینه درهم‌تنیدگی در مقابل میرایی دامنه آسیب پذیرتر هستند.

### پیوست

ماتریس چگالی کاهش یافته  $\rho_C^D$  با در نظر گرفتن اثرات نوفه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_C^D = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

به‌طوریکه با در نظر گرفتن اثر میرایی دامنه بر کیوبیت A پس از مرحله 1 داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(M + (1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta), \\ \rho_{12} &= \rho_{21} \\ &= \mu(1-p^2)(1+2\mu p^2) \sqrt{1-\eta} \sin \theta, \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(M - (1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن اثر میرایی دامنه بر کیوبیت B پس از مرحله 1 داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(M + \eta(1+\mu)(1-\mu+2\mu p^2) \\ &\quad + (1-\eta)(1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta), \\ \rho_{12} &= \rho_{21} = \mu(1-p^2)(1+2\mu p^2) \sin \theta, \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(M - \eta(1+\mu)(1-\mu+2\mu p^2) \\ &\quad - (1-\eta)(1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta) \end{aligned}$$

پس از مرحله 3 داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(M + (1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta), \\ \rho_{12} &= \rho_{21} = \mu(1-p^2)(1+2\mu p^2) \sin \theta, \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(M - (1+2\mu p^2 + (1-2p^2)^2 \mu^2) \cos \theta). \end{aligned}$$

- [13] G. Najarbashi, S. Mirzaei, Noise Effects on Entangled Coherent State Generated via Atom-Field Interaction and Beam Splitter, *International Journal of Theoretical Physics* **55** (2016) 2311–2323.
- [14] S. Oh, S. Lee, H. Lee, Fidelity of quantum teleportation through noisy channels, *Physical Review A* **61** (2002) 022316.
- [15] X. Hu, Y. Gu, Q. Gong, G. Guo, Noise effect on fidelity of two-qubit teleportation, *Physical Review A* **81** (2010) 054302.
- [16] X. Hao, R. Zhang, S.Q. Zhu, Average fidelity of teleportation in quantum noise channel, *Communications in Theoretical Physics* **45** (2006) 802-86.
- [9] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften* **14** (1926) 664–666.
- [10] C.H. Bennett, S.J. Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, *Physical Review Letter* **69** (1992) 281.
- [11] C.H. Bennett, Quantum information and computation, *Physics Today* **48** (1995) 24–30.
- [12] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Physical Review Letter* **70** (1993) 1895–1899.