

# **Time evolution of quantum correlation and entropic uncertainty relation in the presence of quantum memory under noisy channels and one-axis twisting Hamiltonian**

**Mohammad Reza Pourkarimi\***

Department of Physics, Faculty of Sciences, Salman Farsi University of Kazerun, Kazerun, Iran

Received: 02.12.2018    Final revised: 06.01.2020    Accepted: 03.05.2020

Doi: [10.22055/jrmb.2020.15560](https://doi.org/10.22055/jrmb.2020.15560)

## **Abstract**

Assuming, a symmetric system with  $N$  qubits under Hamiltonian one-axis twisting and different kinds of noisy channels, such as amplitude damping, phase-flip and phase-damping channel, it is studied the time evolution of quantum correlation and entropic uncertainty relation in the presence of quantum memory. By comparing the behaviors of the dynamics of entropic uncertainty and quantum correlation, it is shown that they increase with increasing of the number of qubits in the beginning of the time. But, they behave in contrary to each other, during the time. As a result, the uncertainty of incompatible observables increases, when quantum correlation decreases.

**Keywords:** Quantum correlation, Entropic uncertainty relation, Quantum discord

---

\*Corresponding Author: [mrpourkarimy@gmail.com](mailto:mrpourkarimy@gmail.com)

## تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و رابطه آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت واہمدوسی و هامیلتونی پیچش تک-محوری

محمدرضا پورکریمی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سلمان فارسی کازرون، کازرون، ایران

دریافت: 1397/09/11 ویرایش نهائی: 1398/10/16 پذیرش: 1399/02/14

Doi: [10.22055/jrmb.2020.15560](https://doi.org/10.22055/jrmb.2020.15560)

### چکیده

در این مقاله یک سیستم متقارن  $N$  ذره‌ای با اسپین  $1/2$  که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری قرار دارد را در نظر می‌گیریم. سپس با اعمال کانال‌های مختلف نوفه‌دار، همچون کانال میرایی دامنه، کانال فاز-گردان و کانال میرایی فاز، تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و رابطه آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی را به دست می‌آوریم. مقایسه رفتار آنتروپی عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی نشان می‌دهد که در لحظه شروع، با افزایش تعداد ذرات، مقدار اولیه این کمیت‌ها افزایش می‌یابد. اما در طی زمان رفتار آنها عکس یکدیگر خواهد بود. به طور کلی با کاهش همبستگی کوآنتومی، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار افزایش می‌یابد.

**کلیدواژگان:** همبستگی کوآنتومی، رابطه آنتروپی عدم قطعیت، ناهمخوانی کوآنتومی

### مقدمه

رابطه 1 همیشه یک معیار مناسب برای اندازه‌گیری عدم قطعیت محسوب نمی‌شود، زیرا حد پایین این رابطه به حالت  $\rho$  بستگی دارد؛ به طوری که اگر مقدار سمت راست نامساوی صفر باشد، حد پایین رابطه عدم قطعیت برای مشاهده‌پذیرهای ناسازگار صفر می‌شود و محدودیتی برای حد بالای آن وجود نخواهد داشت. به منظور برطرف کردن این مشکل در مرجع [3] رابطه آنتروپی عدم قطعیت بیان شد و سپس در مرجع [4] این رابطه به صورت زیر ارتقاء یافت:

اصل عدم قطعیت یکی از اصول بنیادی نظریه کوآنتوم است. این اصل بیان می‌کند که مشاهده‌پذیرهای ناسازگار  $P$  و  $Q$  را نمی‌توان به طور هم‌زمان و دقیق اندازه‌گیری کرد. این اصل ابتدا توسط هایزنبرگ در سال 1927 بیان شد [1]، سپس در سال 1929 توسط ربرتسون به صورت زیر فرمول‌بندی شد [2]:

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{1}{2} |\langle [P, Q] \rangle| \quad 1$$

که در آن  $\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2}$  انحراف از میانگین است،  $\langle P \rangle$  مقدار متوسط مشاهده‌پذیر  $P$  نسبت به حالت  $\rho$  و  $[P, Q] = PQ - QP$  است.

$$H(P) + H(Q) \geq \log_2 \frac{1}{c} \quad 2$$

که در آن  $H(P) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$  آنتروپی شنون

$$\text{است، } p_i = \langle \psi_i | \rho | \psi_i \rangle \text{ و}$$

$$c = \max_{ij} \{ |\langle \psi_i | \phi_j \rangle|^2 \} \text{ بیشینه هم‌پوشانی}$$

\* نویسنده مسئول: mrpourkarimy@gmail.com

$$\sum_i \langle \psi_i \rangle_A \langle \psi_i | \otimes I_B \rangle \rho_{AB} \langle \psi_i \rangle_A \langle \psi_i | \otimes I_B \rangle. 4$$

آنتروپی عدم قطعیت کاربردهای فراوانی در نظریه اطلاعات کوآنتومی همچون رمزنگاری کوآنتومی یا توزیع کلید کوآنتومی و شواهد درهم‌تنیدگی دارد [7و6].

یکی دیگر از خصوصیات مهم نظریه کوآنتوم، همبستگی کوآنتومی است که نظیر کلاسیکی ندارد. همبستگی کوآنتومی به‌روش‌های مختلفی قابل اندازه‌گیری است [8-11]. یکی از مقیاس‌های معروف همبستگی کوآنتومی، درهم‌تنیدگی است که در سال‌های اخیر محققین بسیاری روش‌هایی برای اندازه‌گیری آن نظیر کانکرنس (تلاقی) به‌دست آورده‌اند و از آن برای اندازه‌گیری همبستگی کوآنتومی در سیستم‌های کوآنتومی، نظیر سیستم‌های اسپینی استفاده کرده‌اند [12-18]. در اینجا برای جلوگیری از تکرار محاسبات از معیار دیگری استفاده می‌شود که در ادامه معرفی خواهد شد.

مقیاس دیگری که در سال‌های اخیر برای همبستگی کوآنتومی استفاده شده است، ناهمخوانی کوآنتومی است که برای اولین بار در مرجع [10] معرفی شد. ناهمخوانی کوآنتومی در مقایسه با درهم‌تنیدگی، گستره بیشتری از همبستگی را در سیستم‌های کوآنتومی آشکار می‌سازد. در این مقاله از ناهمخوانی کوآنتومی برای محاسبه همبستگی کوآنتومی استفاده خواهد شد و به این صورت تعریف می‌شود:

$$QD(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - C(\rho_{AB}) \quad 5$$

که در آن  $C(\rho_{AB})$  همبستگی کلاسیکی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}) - \min S(\rho_{A|B}) \quad 6$$

مشاهده‌پذیرهای غیر تبه‌گن  $P$  و  $Q$  با ویژه‌حالت‌های به‌ترتیب  $|\psi_i\rangle$  و  $|\phi_j\rangle$  است. در این مقاله مشاهده‌پذیرهای  $P$  و  $Q$  را به‌ترتیب،  $\sigma_x$  و  $\sigma_z$  در نظر می‌گیریم که عملگرهای پائولی در جهت‌های  $x$  و  $z$  هستند. همان‌طور که از رابطه 2 مشخص است، حد پایین این نامساوی به‌حالت  $\rho$  بستگی ندارد و مقدار آن برای مشاهده‌پذیرهای ناسازگار صفر نخواهد شد.

در سال‌های اخیر به‌منظور بهبود رابطه آنتروپی عدم قطعیت، رابطه آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی ارائه شده است [5]. توضیح این رابطه به این صورت است: آلیس و باب دو کیوبیت درهم‌تنیده  $A$  و  $B$  (کیوبیت  $B$  به‌عنوان حافظه کوآنتومی) را در اختیار دارند. آلیس یکی از مشاهده‌پذیرها را بر روی کیوبیت  $A$  اندازه‌گیری می‌کند و نتیجه را به باب اطلاع می‌دهد. باب با استفاده از نتایج آلیس، عدم قطعیت اندازه‌گیری خود را کمینه می‌کند. به‌عنوان مثال اگر حالت اولیه کاملاً درهم‌تنیده باشد و نتیجه اندازه‌گیری آلیس در پایه‌های محاسباتی صفر باشد. باب با قطعیت می‌تواند بیان کند که کیوبیت  $B$  در حالت یک قرار دارد که این مزیت حضور حافظه کوآنتومی در پیش‌بینی نتایج و کاهش عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار را نشان می‌دهد. به زبان ریاضی، رابطه عدم قطعیت آنتروپی در حضور حافظه کوآنتومی به این صورت بیان می‌شود:

$$S(\rho_{P|B}) + S(\rho_{Q|B}) \geq S(\rho_{A|B}) + \log_2 \frac{1}{c} \quad 3$$

که در آن  $S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$  آنتروپی شرطی فون نیومن است. بعد از اندازه‌گیری کیوبیت  $A$  توسط عملگر  $P$  حالت بعد از اندازه‌گیری به این صورت به‌دست می‌آید:

$$D_1 = -\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} - L(\rho_{11} + \rho_{33}) \quad 12$$

و

$$D_2 = L\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2 + (1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44}))^2}}{2}\right) \quad 13$$

و  $\zeta_i$  ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی  $\rho_{AB}$  است.

در سال‌های اخیر همبستگی کوآنتومی و رابطه آن‌تروپی عدم قطعیت در سیستم‌های کوآنتومی به‌ویژه سیستم‌های اسپینی مورد بررسی قرار گرفته است [19-23]. به‌عنوان مثال نشان داده شده است که افزایش همبستگی کوآنتومی باعث کاهش عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار می‌شود [19]. همچنین نشان داده شده است که بین این دو کمیت در یک زنجیره اسپینی گرمایی رابطه‌مشابهی وجود دارد [22]. اما تاکنون رابطه بین کمیت‌های مذکور تحت هامیلتونی فشرده‌گی اسپینی و برهم‌کنش با محیط، بررسی نشده است. بنابراین در این مقاله رفتار همبستگی کوآنتومی و آن‌تروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی را در یک سیستم  $N$  کیوبیتی که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری قرار دارد و هر کیوبیت به‌طور مجزا با محیط خود برهم‌کنش می‌کند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ترتیب مطالب این مقاله به‌این صورت است: در قسمت بعد، هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال‌های نوفه‌دار معرفی می‌شوند. در ادامه این کانال‌ها به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند و در انتها نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

که  $S(\rho) = -tr(\rho \log_2 \rho)$ ، آن‌تروپی فون نیومن است. کمینه، از اعمال مجموعه عملگرهای مثبت روی قسمت  $B$  به‌دست می‌آید و  $S(\rho_{AB})$  آن‌تروپی شرطی است.  $I(\rho_{AB})$  مجموع همبستگی‌های کلاسیکی و کوآنتومی است و به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad 7$$

که در آن  $\rho_A$  و  $\rho_B$  ماتریس چگالی تقلیل یافته ماتریس چگالی  $\rho_{AB}$  هستند. بیشینه سازی همبستگی کلاسیکی که در معادله 6 بیان شد به‌روش تحلیلی نسبتاً مشکل است. برای این منظور روش‌های مختلفی بیان شده است که در اینجا از روش معرفی شده در مرجع [14] استفاده می‌کنیم. برای یک ماتریس چگالی  $X$  به‌شکل

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad 8$$

ناهمخوانی کوآنتومی عبارت است از:

$$QD(\rho_{AB}) = \min(Q_1, Q_2), \quad 9$$

که

$$Q_i = L(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^4 \zeta_i \log_2 \zeta_i + D_i \quad 10$$

و در آن

$$L(y) = -y \log_2 y - (1-y) \log_2 (1-y), \quad 11$$

هامیلتونی فشرده گی اسپینی تک-محوری

یک سیستم متقارن با  $N$  اسپین  $1/2$  را در نظر بگیرید که حالت پایه و برانگیخته آن به ترتیب به صورت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  باشند. خواص این سیستم را می توان به وسیله عملگرهای مجموعه ای  $S_\alpha = \sum_{i=1}^N S_{i\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{i\alpha}$  توصیف کرد که در آن  $\sigma$  عملگر پائولی و  $\alpha = x, y, z$  است. بنابراین هامیلتونی پیچش تک-محوری به این صورت تعریف می شود [24 و 25]:

$$H = \lambda S_x^2 \quad 14$$

که در آن  $\lambda$  ثابت جفت شدگی غیر خطی برای تمام ذرات برهم کنش کننده است. این عملگر کاربردهای فراوانی در نظریه اطلاعات کوانتومی دارد [26]. حالت اولیه سیستم  $N$  ذره ای را به صورت حالت ضربی  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle_N = |000\dots 0\rangle$  در نظر می گیریم. از آنجا که نتایج بررسی ها در این مقاله به حالت اولیه بستگی ندارد، در نظر گرفتن این حالت اولیه از عمومیت مسئله نمی کاهد. بنابراین بر اساس معادله شرودینگر، تحول زمانی این حالت تحت هامیلتونی 14 به این صورت به دست می آید:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp(-iHt) |\psi(0)\rangle \\ &= \exp(-i\omega S_x^2) |\psi(0)\rangle \end{aligned} \quad 15$$

که در آن  $\omega = \lambda t$  زاویه پیچش تک-محوری است و بدون از دست دادن عمومیت مسئله آن را مساوی  $\pi/8$  قرار می دهیم. بنابراین حالت ماتریس چگالی در زمان  $t$  به صورت  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$  به دست می آید. حالت ماتریس چگالی  $N$  کیوبیتی که تحت جابه جایی متقارن است را می توان به صورت ماتریس چگالی دو کیوبیتی نوشت. عناصر این ماتریس چگالی در پایه های محاسباتی و برحسب مقادیر انتظاری موضعی به این صورت به دست می آید [27-29]:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4} (1 + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle + 2 \langle \sigma_{1z} \rangle) \\ \rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1}{4} (1 - \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle) \\ \rho_{23} = \rho_{32}^* &= \langle \sigma_{1+} \sigma_{2-} \rangle \\ \rho_{14} = \rho_{41}^* &= \langle \sigma_{1-} \sigma_{2-} \rangle \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4} (1 + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle - 2 \langle \sigma_{1z} \rangle) \end{aligned} \quad 16$$

که مقادیر انتظاری موضعی برای هامیلتونی پیچش تک-محوری به صورت زیر به دست می آید:

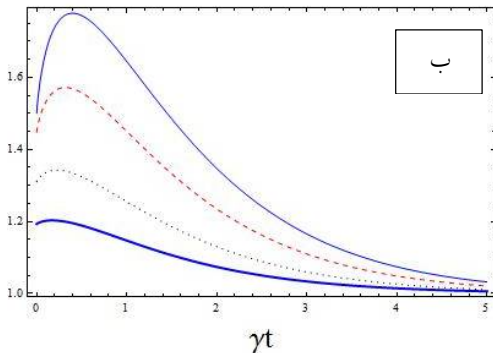
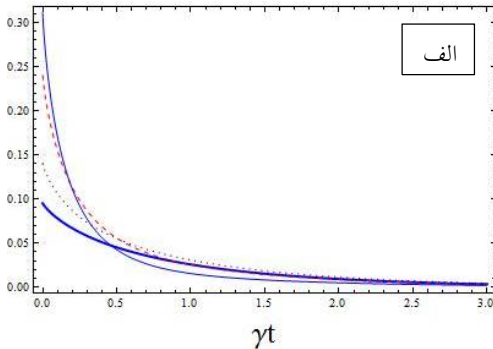
$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1z} \rangle &= -\cos^{N-1} \left( \frac{\omega}{2} \right) \\ \langle \sigma_{1+} \sigma_{2-} \rangle &= \frac{1}{8} (1 - \cos^{N-2} \omega) \\ \langle \sigma_{1-} \sigma_{2-} \rangle &= \frac{-1}{8} (1 - \cos^{N-2} \omega) - \\ &\quad \frac{i}{2} \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) \cos^{N-2} \left( \frac{\omega}{2} \right) \\ \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \cos^{N-2} \omega). \end{aligned} \quad 17$$

در این مقاله فرض می کنیم که حالت کوانتومی علاوه بر هامیلتونی پیچش تک-محوری هر ذره به طور مستقل تحت تأثیر برهم کنش با محیط خود باشد. هنگامی که یک سیستم کوانتومی با محیط خود برهم کنش می کند، تحول زمانی آن غیر یکنانی است و از معادله شرودینگر پیروی نمی کند که به این پدیده واهمدوسی گفته می شود. واهمدوسی به روش های مختلفی توصیف می شود که در اینجا از چند مدل متداول، همچون کانال میرایی دامنه، کانال فاز-گردان و کانال میرایی فاز استفاده خواهد شد. به طور کلی حالت اولیه تحت واهمدوسی به این صورت متحول می شود [28]:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_i \bigotimes_{i=1}^N K_i \rho \bigotimes_{i=1}^N K_i^\dagger. \quad 18$$

به این معادله، معادله بورن-مارکو-لیندبلاد گفته می شود و یکی از معروف ترین مدل هایی است که تحول زمانی

برای تعداد ذرات متفاوت  $N$  رسم شده است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش تعداد ذرات در لحظه  $t=0$  ناهمخوانی کوآنتومی و آنتروپی عدم قطعیت هر دو افزایش می‌یابند. با گذشت زمان ناهمخوانی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا کاملاً از بین برود. در مورد سمت راست نامساوی 3، با گذشت زمان عدم قطعیت ابتدا افزایش می‌یابد تا به یک مقدار بیشینه برسد. این مقدار بیشینه با افزایش تعداد ذرات، افزایش می‌یابد و سپس کاهش می‌یابد تا به یک مقدار کمینه برسد. این مقدار کمینه برای تمام تعداد ذرات، یکسان و مخالف صفر است. بنابراین در این وضعیت مشاهده‌پذیرهای ناسازگار را نمی‌توان با قطعیت اندازه‌گیری کرد.



شکل 1الف. تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی دامنه برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ . ب. تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و

کیوبیت‌های برهم‌کنش کننده با محیط خود را توصیف می‌کند. همچنین در این معادله  $K_i$  عملگر کراوس برای کیوبیت  $i$ ام است. در ادامه چند نوع از این عملگرها که مربوط به محیط‌های مختلف است را معرفی و مطالعه خواهیم کرد.

### کانال میرایی دامنه

کانال میرایی دامنه افت انرژی را در یک سیستم کوآنتومی توصیف می‌کند. عملگرهای کراوس برای این کانال به این صورت توصیف می‌شوند:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-p} & 0 \end{bmatrix}, \quad 19$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 20$$

که در آن  $p = \exp(-\gamma t)$  است. بنابراین با توجه به روابط فوق و 18 عناصر غیر صفر ماتریس چگالی در زمان  $t$  به این صورت به دست می‌آیند:

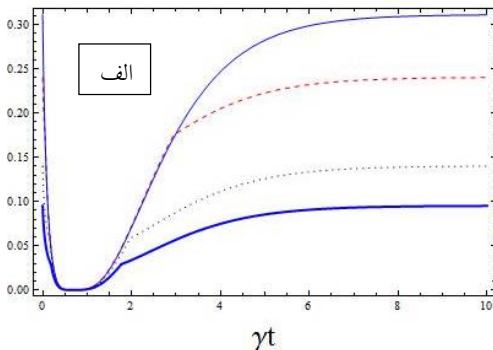
$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4} p^2 (1 + 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle), \\ \rho_{22} = \rho_{33} &= -\frac{1}{4} p (-2(1 + \langle \sigma_{1z} \rangle) + \\ & p(1 + 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle)), \\ \rho_{14} = \rho_{41}^* &= p \langle \sigma_{1-} \sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{23} = \rho_{32}^* &= p \langle \sigma_{1+} \sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4} (4 - 4p(1 + \langle \sigma_{1z} \rangle) + \\ & p^2(1 + 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle)). \end{aligned} \quad 21$$

همان‌طور که قبلاً بیان شد در این مقاله تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی و سمت راست رابطه آنتروپی عدم قطعیت 3، بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. بنابراین با جای‌گذاری ماتریس چگالی 21 در 3 و 9 به ترتیب آنتروپی عدم قطعیت و ناهمخوانی کوآنتومی در طی زمان به دست می‌آیند. در شکل 1 نمودار تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی و سمت راست رابطه 3

کانال میرایی دامنه برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ .

آنها عکس یکدیگر است. همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، با افزایش زمان همبستگی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا کاملاً از بین برود اما پس از یک بازه زمانی افزایش می‌یابد تا پس از یک مدت زمان نسبتاً کوتاه به یک مقدار ثابت برسد. این مقدار ثابت، همانطور که در شکل 2 الف نشان داده شده است، برای تعداد ذرات بیشتر، بزرگ‌تر است.

بر خلاف رفتار همبستگی کوآنتومی، آنتروپی عدم قطعیت با گذشت زمان ابتدا افزایش می‌یابد و با رسیدن به یک مقدار بیشینه سپس کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت برسد. همانطور که در شکل 2 ب نشان داده شده است، این مقدار ثابت با افزایش تعداد ذرات افزایش پیدا می‌کند.



شکل 2 الف. تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال فاز گردان برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ . ب. تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال فاز گردان برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ .

### کانال میرایی فاز

در این نوع کانال، هم‌دوسی اطلاعات فاز کوآنتومی بدون افت انرژی از بین می‌رود. عملگرهای کرواس به این صورت تعریف می‌شوند:

$$K_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{bmatrix}, \quad 25$$

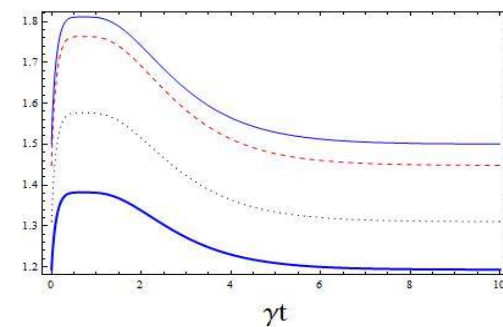
### کانال فاز-گردان

عملگرهای کرواس برای این کانال به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{bmatrix}, \quad 22$$

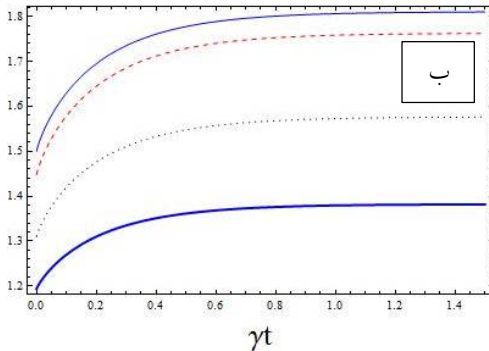
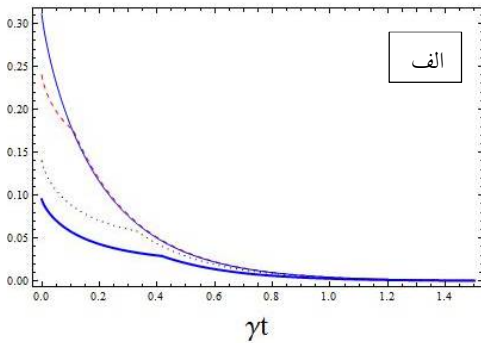
$$K_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}. \quad 23$$

با جای‌گذاری معادلات فوق در 18 عناصر غیر صفر ماتریس چگالی به این صورت به دست می‌آیند:



$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1 + 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle), \\ \rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1 - \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle}{4}, \\ \rho_{14} = \rho_{41}^* &= (1 - 2p)^2 \langle \sigma_{1-} \sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{23} = \rho_{32}^* &= (1 - 2p)^2 \langle \sigma_{1+} \sigma_{2-} \rangle, \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 - 2\langle \sigma_{1z} \rangle + \langle \sigma_{1z} \sigma_{2z} \rangle). \end{aligned} \quad 24$$

مانند مورد قبل با جای‌گذاری ماتریس چگالی 24 در روابط 3 و 9 به ترتیب حد پایین آنتروپی عدم قطعیت و ناهمخوانی کوآنتومی به دست می‌آیند. همانند مورد قبل در زمان اولیه، عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهند. اما با گذشت زمان رفتار



شکل 3 الف. تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی فاز برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ . ب. تحول زمانی حد پایین نامساوی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوآنتومی تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال میرایی فاز برای  $\omega = \pi/8$  و خط  $N=10$ ، نقطه  $N=20$ ، خط فاصله  $N=50$  و خط نازک  $N=1000$ .

لازم به ذکر است که مقدار  $\omega$  تأثیری در رفتار کمیت‌های بررسی شده ندارد و فقط مقدار اولیه آنها را در لحظه شروع تغییر می‌دهد. بنابراین همانطور که قبلاً بیان شد مقدار آن را در این مقاله ثابت در نظر گرفتیم.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم  $N$  کیوبیتی متقارن را در نظر می‌گیریم که تحت هامیلتونی پیچش تک-محوری و کانال‌های نوفه‌دار متحول می‌شود. سپس با بررسی تحول زمانی همبستگی کوآنتومی و حد پایین رابطه آنتروپی عدم قطعیت، نشان می‌دهیم که در زمان  $t = 0$ ، این کمیت‌ها هر دو با افزایش تعداد ذرات، افزایش

$$K_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 26$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}. \quad 27$$

با جای‌گذاری روابط اخیر در رابطه 18، عناصر غیر صفر ماتریس چگالی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1 + 2\langle\sigma_{1z}\rangle + \langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle), \\ \rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1 - \langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle}{4}, \\ \rho_{14} = \rho_{41}^* &= p^2 \langle\sigma_{1-}\sigma_{2-}\rangle, \\ \rho_{23} = \rho_{32}^* &= p^2 \langle\sigma_{1+}\sigma_{2-}\rangle, \\ \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 - 2\langle\sigma_{1z}\rangle + \langle\sigma_{1z}\sigma_{2z}\rangle) \end{aligned} \quad 28$$

و از این ماتریس چگالی می‌توان آنتروپی عدم قطعیت و همبستگی کوآنتومی را به دست آورد. با بررسی شکل 3 که تحول زمانی ناهمخوانی کوآنتومی و حد پایین آنتروپی عدم قطعیت را نشان می‌دهد، همانند موارد قبل می‌توان نتیجه گرفت که در لحظه شروع یعنی  $t = 0$ ، همبستگی کوآنتومی و عدم قطعیت با رشد تعداد ذرات، بزرگ می‌شوند. در این مورد نیز آنتروپی عدم قطعیت در طی زمان برخلاف همبستگی کوآنتومی رفتار می‌کند. به طوری که با افزایش زمان ناهمخوانی کوآنتومی کاهش می‌یابد تا سرانجام به صفر برسد. اما آنتروپی عدم قطعیت افزایش می‌یابد تا در نهایت به یک مقدار ثابت دست پیدا کند. این مقدار ثابت به تعداد ذرات بستگی دارد و با افزایش تعداد ذرات این مقدار نیز افزایش پیدا می‌کند.



[6] R. Prevedel, D.R. Hamel, R.Colbeck, K. Fisher, K.J. Resch, Experimental investigation of the uncertainty principle in the presence of quantum memory and its application to witness singlet entanglement, *Nature Physics* **7**(2011) 757. <https://doi.org/10.1038/nphys2048>

[7] C.F. Li, J.S.Xu, X.Y. Xu, K. Li, G.C. Guo, Experimental investigation of the entanglement assisted entropic uncertainty principle, *Nature Physics* **7** (2011) 752. <https://doi.org/10.1038/nphys2047>

[8] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures, *Reviews of Modern Physics* **84**, (2012) 1655. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.1655>

[9] L. Henderson, V. Vedral, Classical, quantum and total correlations, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34** (2001)6899. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/35/315>

[10] H. Ollivier, W.H. Zurek, Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations, *Physical Review Letters* **88** (2001) 017901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.017901>

[11] W.K. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, *Physical Review Letters* **80** (1998) 2245. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>

[12] M.R. Pourkarimi, M. Rahnama, H. Rooholamini, Decoherence effect on quantum correlation and entanglement in a two-qubit spin chain, *International Journal of Theoretical Physics* **54** (2015) 1085. <https://doi.org/10.1007/s10773-014-2302-7>

[13] M.R. Pourkarimi, M.Rahnama, Quantum teleportation under the effect of dissipative environment and Hamiltonian XY model, *International Journal of*

می‌یابند. با گذشت زمان مقدار همبستگی کوانتومی در کانال‌های میرایی دامنه و میرایی فاز کم می‌شود تا در زمان‌های طولانی به صفر میل کند. اما در کانال فاز-گردان، همبستگی کوانتومی پس از کاهش و صفر شدن در یک بازه زمانی، افزایش پیدا می‌کند تا به یک مقدار ثابت برسد.

رفتار حد پایین رابطه آنتروپی عدم قطعیت در طی زمان بر خلاف همبستگی کوانتومی است. به طوری که با گذشت زمان این کمیت در کانال‌های میرایی دامنه و میرایی فاز ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت غیر صفر برسد. در مورد کانال فاز-گردان، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت برسد.

به‌طور کلی مقادیر ثابتی که کمیت‌های مورد بحث به آنها دست پیدا می‌کنند به تعداد ذرات سیستم بستگی دارند.

## مرجع‌ها

[1] W. Heisenberg, Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 172. <https://doi.org/10.1007/BF01397160>

[2] H.P. Robertson, The uncertainty principle, *Physical Review* **34** (1929) 163. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.34.163>

[3] K. Kraus, Complementary observables and uncertainty relations, *Physical Review D* **35** (1987) 3070. <https://doi.org/10.1103/physrevd.35.3070>

[4] H. Maassen, J.B.M. Uffink, Generalized entropic uncertainty relations, *Physical Review Letters* **60** (1988) 1103. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.60.1103>

[5] M. Berta, M. Christandl, R. Colbeck, M.J. Renes, R. Renner, The uncertainty principle in the presence of quantum memory, *Nature Physics* **6** (2010) 659. <https://doi.org/10.1038/nphys1734>

- [21] A.J. Huang, D. Wang, J.M. Wang, et al, Exploring entropic uncertainty relation in the Heisenberg XX model with inhomogeneous magnetic field, *Quantum information Processing* **16** (2017) 204. <https://doi.org/10.1007/s11128-017-1657-0>
- [22] M.R. Pourkarimi, Quantum correlations and entropic uncertainty relation in a three-qubit spin chain under the effect of magnetic field and DM interaction, *International Journal of Quantum Information* **16** (2018) 1850057. <https://doi.org/10.1142/S0219749918500570>
- [23] S. Haddadi, M.R. Pourkarimi, A. Akhound, M. Ghominejad, Quantum correlations and quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation in two kinds of spin squeezing models, *Laser Physics Letters* **16** (2019) 095202. <https://doi.org/10.1088/1612-202X/ab2cc7>
- [24] M. Jafarpour, A. Akhound, Entanglement and squeezing of multi-qubit systems using a two-axis countertwisting Hamiltonian with an external field, *Physics Letters A* **372** (2008) 2374. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.12.021>
- [25] M. Kitagawa, M. Ueda, Squeezed spin states, *Physical Review A* **47**(1993) 5138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.5138>
- [26] M.F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T.W. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein, Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology, *Nature* **464** (2010) 1170. <https://doi.org/10.1038/nature08988>
- [27] X.G. Wang, K. Mølmer, Pairwise entanglement in symmetric multi-qubit systems, *The European Physical Journal D* **18** (2002) 385. <https://doi.org/10.1140/epjd/e20020045>
- [28] Y.N. Guo, K. Zeng, G.Y. Wang, Pairwise quantum discord for a symmetric multi-qubit system in different types of noisy channels, *Theoretical Physics* **53** (2014) 1415. <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1938-z>
- [14] M.R. Pourkarimi, The dynamics of quantum correlations in multi-qubit spin chains under the effect of Dzyaloshinskii-Moriya interaction, *International Journal of Theoretical Physics* **57** (2018) 1158. <https://doi.org/10.1007/s10773-017-3646-6>
- [15] M. Jafarpour, M.R. Pourkarimi, A. Akhound, Entanglement sudden death and its suppression in multi-qubit channels, using a magnetic field, *IL Nuovo Cimento B* **124** (2009) 269. <https://doi.org/10.1393/ncb/i2009-10762-2>
- [16] S. Bose, Quantum communication through an unmodulated spin chain, *Physical Review Letters* **91** (2003) 207901.
- [17] A. Akhound, S. Haddadi, M.A. Chaman Motlagh, Bipartite and multipartite entanglement in entangled graphs, *Journal of research on Many-body systems*, **8** (19), 1-10 <https://dx.doi.org/10.22055/jrmbms.2018.13972>
- [18] S. Ghanavati, M. Jafarpour, Calculating the ground state entanglement of a two-dimensional spin star lattice, *Journal of research on Many-body systems*, **8** (17), 135-143 <https://dx.doi.org/10.22055/jrmbms.2018.13894>
- [19] H. Varghese, M. Ravendranadhan, Quantum entanglement and generalized uncertainty relations, *arXiv: 1706.09377v1 [quant-ph]* (2017). <https://arxiv.org/abs/1706.09377>
- [20] D. Wang, A. Huang, F. Ming, W. Sun, H. Lu, C. Liu, L. Ye, Quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation in a Heisenberg XYZ chain with an inhomogeneous magnetic field, *Laser Physics Letters* **14** (2017) 065203. <https://doi.org/10.1088/1612-202X/aa6f85>

*International Journal of Theoretical Physics*  
**55** (2016) 2894.  
<https://doi.org/10.1007/s10773-016-2920-3>

[29] G.X. Wang, B.C. Sander, Spin squeezing and pairwise entanglement for symmetric multiqubit states, *Physical Review A* **68** (2003) 012101.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.012101>