

On Holographic n-partite information in theories with momentum relaxation

Mohammad Reza Tanhayi*

Department of Physics, Faculty of Basic Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University,
Tehran Iran

Received: 23.08.2017 Final revised: 07.12.2019 Accepted: 12.02.2020

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15554](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15554)

Abstract

We consider the sign of holographic n-partite information in holographic model with momentum relaxation. The system consists n disjoint strips with the same separation and width. The momentum dissipation is achieved by the spatially dependent scalar fields. We particularly show tripartite information is always negative, which implies that the holographic mutual information is monogamous. We also study the monogamy property of 4-partite information by considering the sign of holographic 5-partite information. It is shown that in 2-dimensional dual field theory, the 4-partite information holds the monogamy relation. Finally, we examine the holographic quantum phase transition of these quantities. Our results indicates that in the presence of momentum relaxation parameter, the transition takes place in smaller separation of subsystems.

Keywords: Holography, n-partite quantum information, Quantum phase transition

* Corresponding author: mtanhayi@ipm.ir
<https://orcid.org/0000-0003-0907-4842>



علامت اطلاعات چند-جانبه در نظریه‌هایی با حضور پارامتر اتلاف تکانه از دید هولوگرافی

محمدرضا تنهایی اهری*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

دریافت: 1396/06/01 ویرایش نهائی: 1398/09/16 پذیرش: 1398/11/23

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15554](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15554)

چکیده

در این تحقیق به بررسی علامت اطلاعات چند-جانبه از دید هولوگرافی برای سیستم‌هایی که در آنها اتلاف تکانه لحاظ می‌شود، می‌پردازیم. سیستم مورد بررسی از n تا ناحیه نواری به طول یکسان تشکیل شده است که بر اساس دیدگاه هولوگرافی، پدیده اتلاف تکانه توسط میدان اسکالر همگن و وابسته به مکان، رخ می‌دهد. در چنین سیستم‌هایی با جفت‌شدگی قوی، به صورت مشخص نشان می‌دهیم که برای سه ناحیه، اطلاعات کوآنتومی 3-جانبه همیشه منفی است که این مسئله باعث قیدی روی اطلاعات متقابل می‌شود که اصطلاحاً در جامعه نظریه اطلاعات، این پدیده به اسم مونوگامی (Monogamy) اطلاعات متقابل مشهور است. ضمن تعمیم این خاصیت به پنج ناحیه، نشان می‌دهیم که علامت اطلاعات برای این سیستم در سه بعد گرانشی ثابت می‌ماند که به نوبه خود بر اطلاعات 4-جانبه قیدی را تحمیل می‌کند. همچنین در بررسی اطلاعات کوآنتومی، گذار فازهایی اتفاق می‌افتد که بستگی به پارامترهای مسئله دارد برای مثال نسبت طول به فاصله جدایی نواحی نقش اساسی در گذار فازها دارد؛ ما این رفتار را در حضور پارامتر اتلاف تکانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم معرفی این پارامتر باعث می‌شود گذار فاز در نسبت‌های کوچکتر رخ دهد.

کلیدواژگان: هولوگرافی، اطلاعات کوآنتومی چند-جانبه، گذار فاز کوآنتومی

مقدمه

شده است. در این راستا و با کار مشهور انجام شده در سال 2006 [2]، موفقیت‌های چشمگیری در قالب دیدگاه هولوگرافی به دست آمده که به عنوان مثال در حوزه فیزیک نظری می‌توان به استخراج معادلات انیشتین از نظریه اطلاعات کوآنتومی در قالب قانون اول درهم‌تنیدگی اشاره کرد که مسیر را برای شناخت بهتر نظریه گرانش کوآنتومی با استفاده از قوانین و کمیت‌های نظریه اطلاعات کوآنتومی هموارتر خواهد کرد. در واقع می‌توان گفت سهولت استفاده از رهیافت

در چند سال اخیر بعد از کشف مهم دوگانگی گرانش/نظریه میدان پیمانه‌ای که اصطلاحاً تناظر AdS/CFT نامیده می‌شود [1]، پژوهش‌های مهمی در ارتباط با مفهوم درهم‌تنیدگی کوآنتومی و انواع سنج‌های این کمیت صورت گرفته است. این پژوهش‌ها باعث به وجود آمدن ارتباطی عمیق بین شاخه‌های مختلف فیزیک از آن جمله نظریه اطلاعات کوآنتومی و نظریه گرانش و همچنین فیزیک ماده چگال

*نویسنده مسئول: mtanhayi@ipm.ir



موارد نشدنی است ولیکن قرار است هولوگرافی، کمیت‌های کلاسیک طرف اول (گرانش) را با کمیت‌های طرف دوم (نظریه میدان با جفت شدگی قوی)، متناظر کند. حال باید دید که دوگان گرانشی اتلاف تکانه در نظریه ماده چگال چیست. اگر چنین دوگانی پیدا شود طبیعتاً با گرانش کلاسیک سر و کار خواهیم داشت و می‌توان جنبه‌های مختلف این پدیده در طرف نظریه میدان را واکاوی کرد.

همان‌طور که می‌دانیم در گرانش کلاسیک جواب‌های معادلات انیشتین-ماکسول-دیلاتون⁶ شامل مقدار بار خالص می‌باشد که تحت انتقال ناورد می‌باشد و با اعمال میدان الکتریکی ضعیف می‌توان گفت که سیستم پاسخ رسانندگی DC نامحدود خواهد داشت، در نتیجه این مدل به این صورت نمی‌تواند گویای درستی از دوگان گرانشی پدیده رسانندگی باشد. کارهای مختلفی برای غلبه بر این مشکل صورت گرفته که برای مثال می‌توان به معرفی ناخالصی در نظریه⁴، یا بررسی برخی منبع وابسته به مکان⁵ اشاره کرد. در این راستا در مرجع⁶ این عمل با استفاده از میدان اسکالر خاص وابسته به مکان، انجام شد که در این مقاله ما از این مدل استفاده خواهیم کرد. روش آخر اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته که نشان از توانایی مدل در آدرس دهی درست شکست تقارن در مدل‌های بس‌ذره‌ای دارد (برای مثال به مرجع⁷ رجوع شود). واضح است که معرفی میدان اسکالری که وابسته به مکان باشد، باعث تغییر در اتحاد وارد⁷ به صورت زیر می‌شود:

گرانشی کلید مهم در حل مسائل مربوط به درهم‌تنیدگی می‌باشد که این مهم با مقایسه ساده با روش‌های معمول به کار گرفته شده در نظریه میدان‌های کوآنتومی و همچنین سامانه‌های بس‌ذره‌ای در فیزیک ماده چگال قابل درک است. این دوگانگی همچنین در حوزه فیزیک ماده چگال باعث درک بهتر و توصیف فیزیکی برخی گذار فازهای بین رسانندگی و ابررسانندگی و توصیف پدیده‌های خارج از تعادل شده است [3]. در حوزه فیزیک اطلاعات کوآنتومی، تعمیم ایده هولوگرافی باعث شناخت بهتر برخی از کمیت‌های مهم از جمله سنجه‌های درهم‌تنیدگی مانند محاسبه آنروپی درهم‌تنیدگی¹، اطلاعات متقابل² و یا چند-جانبه³ و پیچیدگی⁴ اشاره کرد. در این بین و در حوزه ماده چگال، آدرس دهی شکست تقارن انتقالی به زبان هولوگرافی برای توجیه مفهوم رسانندگی DC مهم می‌باشد. اصولاً در دنیای واقعی در فلزات به خاطر ناخالصی‌ها و یا ساختار شبکه‌ای، تقارن انتقالی شکسته که منجر به عدم پایستگی تکانه می‌شود و شکست تقارن انتقالی باعث داشتن جریان DC محدود می‌شود، نکته مهم اینکه اگر این تقارن انتقالی شکسته نمی‌شد برای یک سیستمی که بار آزاد دارد با اعمال میدان الکتریکی در یک سمت مشخص، جریان نامحدود تولید می‌شد که با واقعیت سازگاری ندارد. حال به زبان هولوگرافی و با استفاده از تناظر AdS/CFT باید بتوان این پدیده که به اسم اتلاف تکانه⁵ مشهور است را توجیه کرد. در تناظر یادشده، یک طرف نظریه گرانش کلاسیک می‌باشد و سوی دیگر نظریه میدان همدیس با جفت شدگی قوی قرار دارد، مطالعه طرف نظریه میدان با عنایت به جفت شدگی قوی کار سخت و در برخی

⁵ Momentum dissipation

⁶ Einstein-Maxwell-Dilaton

⁷ Ward Identity

¹ entanglement entropy

² mutual information

³ n-partite information

⁴ complexity

واگراست و برای ابعاد بزرگتر از 2، ضریب جمله‌ای که بیشترین واگرایی را دارد متناسب با سطح ناحیه‌ای می‌شود که آنتروپی‌اش مد نظر می‌باشد که این همان قانون سطح در محاسبه آنتروپی می‌باشد. در کنار این سنجه، برای سیستمی متشکل از دو یا n زیر سیستم، می‌توان اطلاعات n -جانبه را به صورت زیر تعریف کرد:

$$I^{[n]}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n S(A_i) - \sum_{i < j} S(A_i U A_j) - \dots - (-1)^n S(A_1 U \dots U A_n) \quad 2$$

که در عبارت بالا $S(A_i)$ و $S(A_i U A_j)$ به ترتیب آنتروپی درهم‌تنیدگی ناحیه A_i و ناحیه $A_i U A_j$ می‌باشد. برای دو ناحیه این عبارت به اطلاعات دو جانبه یا اطلاعات متقابل منجر می‌شود که در واقع سنجه‌ای از میزان اطلاعاتی است که این دو سیستم می‌توانند به اشتراک بگذارند و برخلاف آنتروپی درهم‌تنیدگی، واگرا نخواهد بود. برای سه ناحیه هم اطلاعات 3-جانبه را خواهیم داشت که از خواص جالب آن می‌توان به منفی بودن آن برای سیستم‌هایی که دوگان گرانشی دارند، اشاره کرد [10].

در حوزه نظریه اطلاعات کوانتومی تعیین و ثابت ماندن علامت اطلاعات سه جانبه از این جهت که یک محدودیتی روی اطلاعات متقابل می‌گذارد، حائز اهمیت می‌باشد بدین صورت که اگر سیستم A با سیستم B در بیشینه درهم‌تنیدگی باشند در آن صورت A نمی‌تواند هم‌زمان با سیستم C در هم‌تنیدگی بیشینه برقرار کند به این خاصیت اصطلاحاً تک وابستگی² اطلاعات متقابل گفته می‌شود [10].

قبلاً در مقاله [11] نشان داده بودیم که برای سیستم‌هایی که دوگان گرانشی دارند توالی علامت اطلاعات حفظ می‌شود یعنی علامت اطلاعات n -جانبه برابر خواه بود

$$\nabla^i \langle T_{ij} \rangle = \langle o_\varphi \rangle \partial_i \varphi \quad 1$$

که T_{ij} تانسور انرژی-تکانه می‌باشد و $\langle o_\varphi \rangle$ مقدار چشم‌داشتی خلأ میدان اسکالر می‌باشد که در این نظریه معرفی شده است. با عنایت به این نکته که اتحاد مذکور منجر به بقاء تکانه می‌شود، از این لحاظ تغییر در این عبارت باعث شکست تقارن انتقالی خواهد شد و این همان چیزی است که ما به آن نیاز داشتیم. علی‌الاصول با داشتن دوگانه گرانشی چنین نظریه‌هایی، می‌توان به بررسی برخی مفاهیم در این حوزه پرداخت [8-9]. در این مقاله قصد بررسی علامت اطلاعات کوانتومی دوجانبه و تعمیم آن به اطلاعات 3، 4 و 5 جانبه را داریم، چنین تحقیقی در واقع در حوزه اطلاعات از نظر اینکه به مفهوم امنیت در رمزنگاری اطلاعات کوانتومی¹ منجر می‌شود، مهم می‌باشد [10].

اطلاعات چند-جانبه کوانتومی و تک علامتی

آن

آنتروپی درهم‌تنیدگی یکی از سنجه‌های مهم غیر موضعی است که در واقع میزان درهم‌تنیدگی کوانتومی را ما بین یک سیستم با دنیای اطرافش را اندازه‌گیری می‌کند. محاسبه این کمیت در نظریه میدان‌های کوانتومی توسط یک سازوکار ریاضی نسبتاً سخت صورت می‌پذیرد. به این صورت که در یک نظریه میدان کوانتومی d بعدی و در یک برش زمان ثابت، اگر بنا باشد سیستم به دو ناحیه A و مکمل آن \bar{A} تقسیم شود به گونه‌ای که داشته باشیم $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$ ، آنتروپی درهم‌تنیدگی ناحیه A از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \text{Log} \rho_A \quad \text{که در آن } \rho_A \text{ چگالی ماتریس کاهش یافته می‌باشد. اصولاً این سنجه یک کمیت}$$

² Monogamy of mutual information

¹ Security of quantum cryptography

جفت‌شدگی کمینه است طوری که فرض کرده‌ایم اثر آنها بر تانسور انرژی-تکانه همگن باشد که منجر به داشتن جواب‌های سیاه شامه⁴ همگن و همسانگرد می‌شود. برای مثال در فضا-زمان پنج بعدی که معادل خواهد شد با نظریه میدان همدیس چهاربعدی، برای به‌دست آوردن اتلاف تکانه نشان داده می‌شود که نیاز به سه میدان اسکالر داریم که به صورت زیر تعریف می‌شوند [6]:

$$\varphi_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3$$

این میدان اسکالر اتحاد وارد را تغییر می‌دهد که منجر به توجیه پدیده اتلاف تکانه در نظریه دوگان می‌شود.

جواب‌های معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\rho^2} \left(-f(\rho) dt^2 + \frac{d\rho^2}{f(\rho)} + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 \right) \quad 4$$

که در آن $f(\rho) = 1 - \frac{\alpha^2 \rho^2}{2(d-3)}$ و همچنین داریم

$$\sum_{i=1}^{d-2} a_i^2 = \sum_{i=1}^{d-2} b_i^2 = \sum_{i=1}^{d-2} c_i^2 = \alpha^2 \quad 5$$

$$\sum_{i=1}^{d-2} a_i b_i = \sum_{i=1}^{d-2} a_i c_i = \sum_{i=1}^{d-2} b_i c_i = 0$$

حال که جواب‌های معادله را داریم می‌خواهیم به بررسی علامت اطلاعات دو جانبه بپردازیم. فرض می‌کنیم سیستم از دو نوار با طول یکسان l با فاصله جدایی h از هم قرار دارند تشکیل شده است که در آن صورت با استفاده از فرمول 2 می‌توان نوشت:

$$I^{[2]}(A_1, A_2) = 2S(l) - S(A_1 U A_2)$$

نکته مهم در بحث اطلاعات چندجانبه در واقع نقشی است که آنتروپی درهم‌تنیدگی اجتماع دو ناحیه بازی می‌کند، به این صورت که اگر فاصله جدایی دو سیستم

"(1-)" آنچه هدف اصلی در این کار می‌باشد تحقیق درستی این ادعا است برای سیستم‌هایی که در آنها اتلاف تکانه با حضور میدان اسکالر خاص وابسته به مکان معرفی می‌شود.

اصولاً، بررسی این مفهوم به زبان نظریه میدان‌های کوانتومی کار دشواری و در خیلی موارد نشدنی است چرا که حتی محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی فقط در موارد خاص امکان پذیر است، لذا استفاده از تکنیک‌های AdS/CFT گریز ناپذیر به نظر می‌رسد. این تناظر بیان می‌کند آنتروپی در هم‌تنیدگی برای نظریه میدان همدیس d بعدی که در مرز یک فضا-زمان پاددسته¹ $d+1$ بعدی قرار دارد، به صورت زیر قابل محاسبه است: $S_{EE} = \frac{A_{min}(\gamma_A)}{4G_N}$ که در آن G_N ثابت نیوتن و $A_{min}(\gamma_A)$ کمینه مساحت یک ابر سطح هم بعد دویی² است که در توده³ تعریف می‌شود به گونه‌ای که مرز این ابر سطح دقیقاً بر مرز ناحیه A در نظریه میدان کوانتومی، منطبق باشد.

تک علامتی اطلاعات چند-جانبه با حضور پارامتر اتلاف تکانه

در این بخش هدف اصلی بررسی علامت اطلاعات چندجانبه با استفاده از رهیافت هولوگرافی برای سیستم‌هایی است که پارامتر اتلاف تکانه در آنها با حضور میدان اسکالر لحاظ شده است، کنش سیستم مورد بررسی به قرار زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d-2} (\partial \varphi_i)^2 \right] \quad 3$$

که در آن $\Lambda = -((d-1)(d-2))/2L^2$ می‌باشد که L شعاع فضای آنتی دسپت است. φ_i میدان اسکالر با

³ bulk

⁴ black brane solutions

¹ Anti de Sitter

² co-dimension two

7

$$S_0 = \frac{L^{d-2} H^{d-3}}{2(d-3)G_N} \left[\frac{1}{\epsilon^{d-3}} - \frac{2^{d-3}}{\ell^{d-3}} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-1}{2(d-2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2(d-2)}\right)} \right)^{d-2} \right]$$

و ΔS تصحیحی است که به خاطر α وارد شده است، برای مثال در فضا-زمان AdS_5 که دوگان گرانشی نظریه میدان همدیس چهار بعدی است، به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Delta S = \frac{H^2 L^3}{16G_N} \left(\text{Log} \frac{\ell}{\epsilon} + \text{Log} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2^{2/3} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{3} \right) \alpha^2 \quad 8$$

همچنین در AdS_3 داریم:

$$\Delta S = \frac{L}{144G_N} \left(2 - \frac{3}{2} \text{Log} \alpha \ell \right) \alpha^2 \ell^2$$

(در ادامه این مقاله فضا-زمان AdS_5 را بررسی می‌کنیم).

حال با در دست داشتن آنتروپی و با استفاده از رابطه 2 می‌توان اطلاعات متقابل را به صورت زیر نوشت:

$$I^{[2]}(A_1, A_2) = I_0^{[2]}(A_1, A_2) + \Delta I(A_1, A_2)$$

که در آن $\Delta I(A_1, A_2)$ تغییر در اطلاعات دوجانبه است در اثر حضور پارامتر اتلاف تکانه که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta I(A_1, A_2) = \frac{H^2 L^3}{16G_N} \alpha^2 \text{Log} \frac{\ell^2}{h(2\ell+h)} + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad 9$$

همچنین $I_0^{[2]}(A_1, A_2)$ اطلاعات دوجانبه است زمانی که پس زمینه شامل پارامتر اتلاف تکانه نمی‌باشد که به قرار زیر داده می‌شود:

از یک حد بحرانی بیشتر شود در آن صورت کمینه مساحتی که در محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی اجتماع دو ناحیه باید لحاظ شود، تغییر کرده و در نتیجه مقدار اطلاعات دو جانبه دستخوش تغییر خواهد شد. به صورت مشخص در مورد اطلاعات متقابل همچنان که در شکل 1 مشخص است یک رقابتی مابین دو سطح پیوسته و گسسته وجود دارد که بسته به نسبت جدایی به طول دو ناحیه، کمینه مساحت تغییر خواهد کرد.



شکل 1. برای دو ناحیه نوری، در محاسبه کمینه مساحت یک رقابت مابین حالت پیوسته و گسسته به وجود می‌آید که $S_{con} = S(2\ell+h) + S(h)$ و $S_{dis} = 2S(\ell)$ می‌شود.

در حالت گسسته به صورت مشخص مقدار اطلاعات متقابل صفر خواهد شد و در حالت پیوسته این مقدار برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$I^{[2]}(A_1, A_2) = 2S(\ell) - S(h) - S(2\ell+h)$$

این همان پدیده گذار فاز کوآنتومی در خواندن اطلاعات کوآنتومی است.

حال از روی آنتروپی درهم‌تنیدگی متناظر می‌توان عبارت اطلاعات متقابل را به دست آورد. آنتروپی درهم‌تنیدگی برای سیستمی متشکل از یک نوار باریک با مشخصات زیر

$$-\frac{\ell}{2} < x_1 = x < \frac{\ell}{2} ; -\frac{H}{2} < x_2, \dots, x_{d-2} < \frac{H}{2} \quad 6$$

در حضور پارامتر اتلاف تکانه قبلاً در مرجع [8] و تعمیم آن به گرانس با مشتقات مرتبه بالا در مرجع [12] محاسبه شده که نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

$$S = S_0 + \Delta S$$

که S_0 آنتروپی درهم‌تنیدگی فضای پادسیته است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

در این مورد هم مسئله مهم یافتن عبارت درست برای اجتماع نواحی خواهد بود. از اصل هولوگرافی می‌دانیم که آنتروپی درهم‌تنیدگی متناسب است با مساحت کمینه سطح در توده که قلاب شده باشد بر ناحیه مد نظر ولیکن همانند اطلاعات متقابل، در به‌دست آوردن کمینه مساحت همیشه رقابتی مابین سطوح به‌وجود می‌آید و بسته به نسبت فاصله جدایی نوارها، کمینه مساحت عوض شده که منجر به تغییر در مقدار اطلاعات سه جانبه شده که این همان گذار فاز در این قسمت خواهد بود. در مورد بدون پارامتر اتلاف تکانه، دو مقدار برای نسبت فاصله به جدایی نوار به‌قرار 0,732 و $\frac{h}{\ell} \cong 0,822$ وجود دارد که منجر به عبارت‌های زیر برای این سنجه خواهد شد

12

$$I^{[3]}(A_1, A_2, A_3) = \begin{cases} S(\ell) - 2S(h + 2\ell) + S(2h + 3\ell) & 0 < \frac{h}{\ell} < r_1 \\ 2S(h) - 3S(\ell) + S(2h + 3\ell) & r_1 < \frac{h}{\ell} < r_2 \\ 0 & r_2 \leq \frac{h}{\ell} \end{cases}$$

شکل 2 نشان می‌دهد که با حضور پارامتر اتلاف تکانه گذار α فازها در فاصله جدایی کمتری نسبت به حالت بدون α اتفاق می‌افتد.

$$I_0^{[2]}(A_1, A_2) = \frac{H^2 L^3 \pi^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^3}{G_N \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \left(\frac{1}{(2\ell + h)^2} + \frac{1}{h^2} - \frac{2}{\ell^2} \right) \quad 10$$

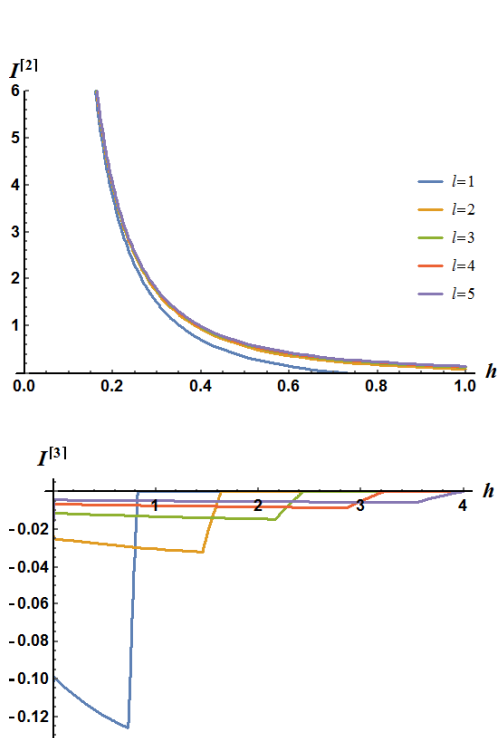
نکته قابل تأمل اینکه بدون در نظر گرفتن پارامتر اتلاف تکانه در فضای AdS₅ گذار فاز برای اطلاعات متقابل در $\frac{h}{\ell} \cong 0,732$ اتفاق می‌افتد یعنی در نسبت‌های بزرگتر از این مقدار $I_0^{[2]}(A_1, A_2) = 0$ با روشن شدن پارامتر اتلاف تکانه، این مقدار کاهش می‌یابد برای مثال به‌زای $\alpha = 0,4$ این گذار در $\frac{h}{\ell} \cong 0,716$ اتفاق می‌افتد که نشان می‌دهد گذار فاز در فاصله کمتری رخ داده است.

قبلاً ثابت شده بود که برای نظریه‌هایی که دوگان گرانشی دارند علامت اطلاعات دوجانبه مثبت است حال می‌خواهیم این مسئله را با حضور پارامتر اتلاف تکانه بررسی کنیم، برای بررسی نیاز به حل عددی معادلات داریم نتیجه کار در شکل 3 نشان داده شده است که مشخص می‌کند به‌زای پارامترهای مسئله این کمیت همیشه مثبت است.

اطلاعات 3-جانبه

به‌منظور بررسی اطلاعات 3-جانبه سه ناحیه نواری را در نظر می‌گیریم. از رابطه 2 می‌توان عبارت اطلاعات 3-جانبه را برحسب اطلاعات متقابل به‌صورت زیر نوشت:

$$I^{[3]}(A_1, A_2, A_3) = I^{[2]}(A_1, A_2) + I^{[2]}(A_1, A_3) - I^{[3]}(A_1, A_2, A_3) \quad 11$$



شکل 3. رسم اطلاعات متقابل و 3-جانبه برای پنج مقدار از طول نواحی. همچنانکه از شکل‌ها مشخص است اطلاعات متقابل همیشه مثبت ولی اطلاعات 3-جانبه منفی است. شکل‌ها برای $\alpha = 0/1$ رسم شده‌اند.

اطلاعات 4-جانبه

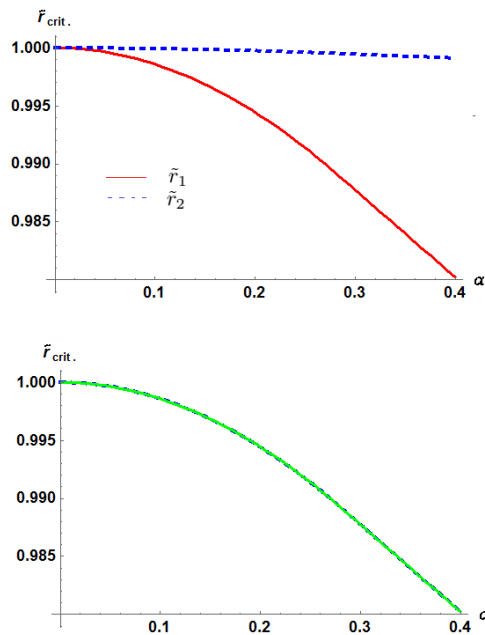
قدم بعدی تعمیم این بررسی به سیستم‌های چهارتایی است. در این مورد هم از عبارت 2 می‌توان استفاده کرد و اطلاعات 4-جانبه را برحسب اطلاعات 3-جانبه به صورت زیر نوشت:

13

$$I^{[4]}(A_1, A_2, A_3, A_4) = I^{[3]}(A_1, A_2, A_3) + I^{[3]}(A_1, A_2, A_4) - I^{[3]}(A_1, A_2, A_3UA_4)$$

از عبارت فوق معلوم می‌شود که با آنتروپی درهم‌تنیدگی سه نوع اجتماع نواحی سروکار خواهیم داشت:

$$S(A_iUA_j) \text{ و } S(A_iUA_jUA_k) \text{ و همچنین } S(A_iUA_jUA_kUA_l) \text{ که مبین سه نوع رقابت در}$$



شکل 2. رسم نقاط گذار فاز به صورت تابعی از پارامتر اتلاف تکانه. مقایسه نسبت به‌حالتی است که این پارامتر لحاظ نشده است، در هر دو مورد ملاحظه می‌شود که با روشن شدن این پارامتر گذار فاز در فاصله جدایی کمتری اتفاق می‌افتد. شکل سمت راست برای اطلاعات سه جانبه و شکل سمت چپ برای اطلاعات 4-جانبه است که در مورد آخری تقریباً رفتار سه نقطه شبیه هم می‌باشد.

همچنین شکل 3 نشان می‌دهد که اطلاعات 3-جانبه با حضور α همیشه منفی است، بعداً خواهیم دید که این نتیجه منجر به این واقعیت می‌شود که برای سیستم‌هایی که دوگان گرانشی دارند اطلاعات دو جانبه خاصیت مونوگامی را حفظ می‌کند.

ترکیب‌های مختلف از این پنج ناحیه به طول ℓ و فاصله جدایی یکسان h می‌توان 182 ترکیب به دست آورد که اگر ترکیب‌های مشابه را با هم در نظر بگیریم، عبارت زیر برای اطلاعات 5گانه می‌توان به دست آورد:

$$I^{[5]}(A_1, \dots, A_5) = 5S(A_1) - 4S(A_1UA_2) - 3S(A_1UA_3) - 2S(A_1UA_4) - S(A_1UA_5) \quad 15$$

در این مورد رقابت دوتایی، سه‌تایی، چهار و پنج تایی منجر به چهار نقطه گذار می‌شود. از سوی دیگر این سنجه را می‌توان برحسب اطلاعات 4-جانبه به صورت زیر هم نوشت.

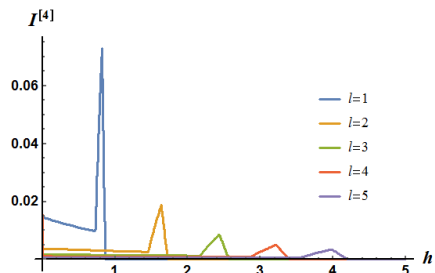
16

$$I^{[5]}(A_1, \dots, A_5) = I^{[4]}(A_1, \dots, A_4) + I^{[4]}(A_1, A_2, A_3, A_5) - I^{[4]}(A_1, A_2, A_3, A_4UA_5)$$

نکته مهم در این زمینه ثابت ماندن علامت این سنجه است در پس زمینه AdS_3 با حضور پارامتر اتلاف تکانه، به این مفهوم که همیشه منفی است. در صورتی که در پس زمینه AdS_5 با تغییر علامت این سنجه مواجه خواهیم بود. شکل 5 این سنجه را برای $\alpha = 0/3$ برای پنج مقدار طول درهم‌تنیدگی نوارها برحسب فاصله جدایی آنها در بعدهای پنج و سه که به ترتیب متناظر با نظریه هم‌مدیس چهار و دو بعدی می‌شوند، نشان می‌دهد. معلوم است که در سه بعد علامت این سنجه منفی در تمام مقادیر مسئله منفی می‌شود.

نوشتن کمینه مساحت خواهد بود، که منجر به وجود آمدن سه نقطه بحرانی در نوشتن نسبت‌های جدایی به طول نواحی خواهیم بود، در نهایت عبارت اطلاعات چهار جانبه به‌قرار زیر خواهد بود:

$$I^{[4]}(A_1, \dots, A_4) = \begin{cases} 2S(2h+3\ell) - 2S(h+2\ell) - S(3h+4\ell) & 0 < \frac{h}{\ell} < r_1 \\ S(h) - 2S(\ell) + S(2h+3\ell) - S(3h+4\ell) & r_1 < \frac{h}{\ell} < r_2 \\ 4S(\ell) - 3S(h) + S(3h+4\ell) & r_2 < \frac{h}{\ell} < r_3 \\ 0 & r_3 \leq \frac{h}{\ell} \end{cases} \quad 14$$



شکل 4. رسم عددی اطلاعات 4-جانبه با $\alpha = 1/0$ به‌زای $\ell = 5-1$

همانند اطلاعات 3-جانبه می‌توان گفت که معرفی پارامتر اتلاف تکانه باعث کمتر شدن این مقادیر می‌شود بدین معنی که گذار فاز در فاصله جدایی کمتر نسبت به حالت بدون α اتفاق می‌افتد. شکل 4 اطلاعات 4-جانبه را برای چند مقدار طول نوار نشان می‌دهد، همچنان‌که از شکل معلوم است این کمیت همیشه مثبت باقی می‌ماند. که نشان دهنده وجود سه نقطه بحرانی می‌باشد که به صورت مشخص در گذر از آنها مقدار اطلاعات 4-جانبه عوض می‌شود. در پس زمینه AdS_5 و بدون حضور α مقدار عددی این گذار فازها قبلاً انجام شده است [13] که نتایج به‌قرار زیر است:

$$r_3 \cong 0/868 \text{ و } r_2 \cong 0/822, \quad r_1 \cong 0/732$$

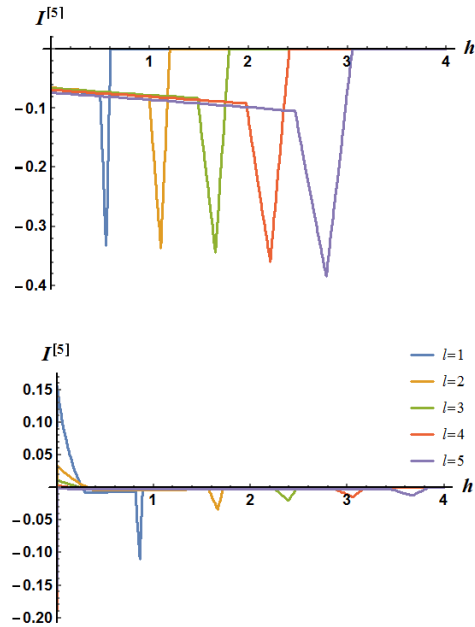
تعمیم این بررسی به اطلاعات 5-جانبه کمی دشوار ولی با استفاده از تحلیل عددی شدنی است. برای

میدان اسکالر مهیا می‌شود، تعمیم دادیم. سیستم‌هایی که اتلاف تکانه در آن‌ها به صورت هولوگرافی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، در اصل برای توجیه رفتار رسانندگی محدود فلزات می‌تواند به کار گرفته شود. با حل عددی نشان دادیم که با حضور این میدان اسکالر برای سیستم‌هایی که جفت‌شدگی قوی دارند، اولاً گذار فاز کوآنتومی در فاصله جدایی کمتر نسبت به حالت قبل اتفاق می‌افتد و همچنین می‌توان گفت که اطلاعات متقابل، بر اساس رابطه 11 و با توجه به منفی شدن اطلاعات 3-جانبه، در رابطه بالا صدق می‌کند که نتیجه می‌شود رابطه مونوگامی اطلاعات متقابل در حضور پارامتر اتلاف تکانه کماکان برقرار است. از سوی دیگر نشان دادیم که در سه بعد گرانش، اطلاعات 5-جانبه منفی است. حال می‌توان از رابطه 16 نتیجه گرفت که اطلاعات 4-جانبه هم در حضور پارامتر اتلاف تکانه در رابطه‌ای شبیه رابطه بالا صدق می‌کند. ولیکن این ادعا در پنج بعد گرانشی هم ارز با نظریه همدیس چهار بعدی مصداق ندارد.

با در دست داشتن دوگان گرانشی چنین سیستم‌هایی، برای کار آتی می‌توان این مطالعه را برای پس‌زمینه‌هایی که وابسته به زمان هستند تعمیم داد که در این صورت رفتار زمانی به تعادل رسیدن را که یکی از مباحث مهم در حوزه فیزیک خارج از تعادل می‌باشد، مورد مطالعه قرار داد. همچنین بررسی نواحی درهم‌تنیدگی به شکل استوانه و یا کره هم می‌تواند موضوع کار آینده در این راستا باشد.

سپاس‌گزاری

در انتها بر خود لازم می‌دانم از آقای دکتر علیشاهی‌ها، دکتر ملاحی، دکتر محمدی، دکتر وحیدی‌نیا، دکتر ناصح، دکتر فرجی و دکتر اخوان تشکر



شکل 5. رسم اطلاعات 5-جانبه در سه بعد گرانش (شکل بالا) و پنج بعد (شکل پایین) به‌ازای $\alpha = 0/3$ برای پنج مقدار طول ناحیه نواری.

بحث و نتیجه‌گیری

در مبحث نظریه اطلاعات اگر F یک سنجه از درهم‌تنیدگی کوآنتومی باشد در آن صورت برای سه سیستم A ، B و C نامساوی زیر

$$F(A,B) + F(A,C) \leq F(A,B,C)$$

رابطه به اصطلاح مونوگامی سنجه F می‌نامند. چراکه بر خلاف همبستگی کلاسیکی، همبستگی کوآنتومی مابین A و B با بیشینه درهم‌تنیدگی قابل به اشتراک گذاری با سیستم سوم C نمی‌باشد [10]. با استفاده از این واقعیت که اطلاعات 3-جانبه منفی است از رابطه 11 نتیجه می‌شود که اطلاعات متقابل خاصیت مونوگامی بالا را ارضا می‌کند بررسی این مسئله را برای اطلاعات چند جانبه در مرجع [13] در پس‌زمینه آنتی‌دسته انجام دادیم که نشان می‌داد اطلاعات 4-جانبه هم در رابطه بالا صدق می‌کند. در این مطالعه این بررسی را برای سیستمی که اتلاف تکانه در طرف گرانش آن با معرفی

[https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2019\)235](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2019)235)

[8] M. Reza Mohammadi Mozaffar, A. Mollabashi, F. Omidi, Non-local Probes in Holographic Theories with Momentum Relaxation, *Journal of High Energy Physics* **10** (2016)135.

[https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2016\)135](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2016)135)

[9] S.A. Hartnoll, A. Lucas, S. Sachdev, Holographic quantum matter, ArXiv:1612.07324 [hep-th].

[10] P. Hayden, M. Headrick, A. Maloney, Holographic Mutual Information is Monogamous, *Physical Review D* **87** (2013)046003.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.046003>

[11] M. Alishahiha, M.R.M. Mozaffar, M.R. Tanhayi, On the Time Evolution of Holographic n-partite Information, *Journal of High Energy Physics* **09** (2015) 165.

[https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)165](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)165)

[12] M. Reza Tanhayi, R. Vazirian, Higher-curvature Corrections to Holographic Entanglement with Momentum Dissipation, *The European Physical Journal C* **78** (2018) 162. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5620-8>

[13] S. Mirabi, M.R. Tanhayi, R. Vazirian, On the Monogamy of Holographic n-partite Information, *Physical Review D* **93** (2016) 104049.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.104049>

ویژه‌ای داشته باشم. همچنین از خانم وزیریان به خاطر همکاری اولیه سپاسگزارم.

مرجع‌ها

[1] J.M. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, *International Journal of Theoretical Physics* **38** (1999) 1113.

<https://doi.org/10.1023/A:1026654312961>

[2] S. Ryu, T. Takayanagi, Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT, *Physical Review Letters* **96** (2006) 181602.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.181602>

[3] S.A. Hartnoll, Lectures on holographic methods for condensed matter physics, *Classical and Quantum Gravity* **26** (2009) 224002.

<https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/22/224002>

[4] S.A. Hartnoll, P.K. Kovtun, M. Muller, S. Sachdev, Theory of the Nernst effect near quantum phase transitions in condensed matter, and in dyonic black holes, *Physical Review B* **76** (2007) 144502.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.144502>

[5] S.A. Hartnoll, D.M. Hofman, Locally Critical Resistivities from Umklapp Scattering, *Physical Review Letters* **108**, (2012)241601.

<https://doi.org/10.1103/physrevlett.108.241601>

[6] T. Andrade, B. Withers, A simple holographic model of momentum relaxation, *Journal of High Energy Physics* **101** (2014) 1405.

[https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2014\)101](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2014)101)

[7] M. Baggioli, S. Griener, Zoology of Solid & Fluid Holography Goldstone Modes and Phase Relaxation *Journal of High Energy Physics* **10** (2019) 235.