

## Estimation of the Non-Universal Parameters for some discrete growth models belonging to the KPZ class

Ebrahim Daryaei\*

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

Received: 20.08.2018    Final revised: 22.02.2020    Accepted: 04.05.2020

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15555](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15555)

### Abstract

In this paper, we try to estimate the non-universal parameters of some discrete growth models belonging to the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) universality class in both one and two dimensions. Based on a comprehensive numerical investigation, we obtain these parameters with good accuracy compared to other reports. The most important result of the present paper is the estimation of the nonlinear parameter of the KPZ equation with excellent accuracy. For this purpose, we apply the tilt method as a useful tool to characterize the nonlinearities of their associated equation. We believe this method can be used to ensure that there is a nonlinearity type square height-gradient for others discrete growth models.

**Keywords:** Growth models, universality class, KPZ equation, growth exponent

---

\* Corresponding Author: [daryaei@neyshabur.ac.ir](mailto:daryaei@neyshabur.ac.ir)



## تعیین پارامترهای غیر جهان‌شمول برای برخی مدل‌های گسسته رشد کلاس

## KPZ

ابراهیم دریایی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

دریافت: 1397/05/29 ویرایش نهایی: 1398/12/03 پذیرش: 1399/02/15

DOI: [10.22055/JRMBS.2020.15555](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15555)

## چکیده

در این مقاله، ما تلاش می‌کنیم تا پارامترهای غیرجهان‌شمول برخی از مدل‌های گسسته رشد که در کلاس جهان‌شمول KPZ قرار دارند را در یک و دو بعد بررسی کنیم. بر اساس یک تحقیق نسبتاً جامع، ما این پارامترها را با دقت خوبی نسبت به سایر گزارش‌ها به دست می‌آوریم. مهمترین یافته مقاله پیش رو برآورد بسیار دقیق پارامتر غیرخطی معادله KPZ است. برای این منظور، ما روش رشد در شرایط مایل را به عنوان یک روش مفید برای مطالعه و سنجش غیرخطی‌ها در معادلات متناظر به کار می‌بریم. نتایج نشان می‌دهد که این روش می‌تواند برای اطمینان یافتن از اینکه نوعی جمله غیرخطی به صورت مربع گرادیان-ارتفاع در سایر مدل‌های رشد وجود دارد، مورد استفاده قرار گیرد.

**کلیدواژگان:** مدل‌های رشد، کلاس جهان‌شمولی، معادله KPZ، نمای رشد

## مقدمه

می‌شوند. معادله KPZ در حقیقت به نحوه تحول یک میدان تصادفی همانند ارتفاع  $h(x,t)$  که مشخص کننده ارتفاع در مکان  $x$  و در زمان  $t$  بر روی یک زیرلایه  $d$ -بعدی می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌کند [2]:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} |\nabla h|^2 + \sqrt{D} \eta(x,t) \quad 1$$

که در آن  $\nu$ ،  $\lambda$  و  $D$  پارامترهای ثابتی هستند که به ترتیب به نرم شدگی سطح، غیرخطی رشد و شدت نویز سفیدی همانند  $\eta$  مربوط می‌شوند. این پارامترها در واقع به پارامترهای غیرجهان‌شمول معروف هستند چرا که رفتار سیستم در حد ترمودینامیک مستقل از این مقادیر خواهد بود. رفتار این سیستم‌ها در حد ترمودینامیک با تعداد کلاس مشخصی فقط توصیف

مطالعه فرآیندهای رشد لایه نازک به دلیل اهمیت خاصی که به لحاظ نظری و آزمایشگاهی دارد از حدود نیم قرن گذشته شروع شده است و تاکنون مدل‌های مختلفی برای این منظور پیشنهاد شده است [1]. این مدل‌های مختلف رشد در چند کلاس محدود جهان‌شمول قرار می‌گیرند که از مهمترین آنها معادله کاردر-پاریزی-ژنگ (KPZ) [2] و معادله ادوارد ویلکینسون (EW) [3] می‌باشند. هر چند این مدل‌ها در مطالعات اولیه محدود به فرآیندهای تصادفی رشد سطح می‌شد ولی به دلیل جهان‌شمول بودن این معادلات و به دلیل نگاهت‌های مناسب به مسائلی خارج از حوزه رشد سطح، همانند پخش پلیمرها در محیط بی‌نظم [4]، سیستم‌های کوانتومی باز درهم تنیده [5] و غیره مرتبط

\* نویسنده مسئول: daryaei@neyshabur.ac.ir

بزرگ برای مدل‌های رشد کلاس KPZ به صورت زیر انجام می‌گیرد [6 و 7].

$$h \approx v_{\infty} t + s_{\lambda} (\Gamma t)^{\beta} \chi \quad 3$$

که در آن  $\chi$  یک متغیر تصادفی جهانشمول است که اطلاعات افت و خیزهای سطح را در بر دارد و به بعد و هندسه زیرلایه بستگی دارد و پارامترهای  $v_{\infty}$ ،  $s_{\lambda}$  و  $\Gamma$  به ترتیب مربوط به سرعت رشد در حد زمان‌های طولانی، علامت پارامتر غیرخطی  $\lambda$  و شدت افت و خیز ارتفاع سطح، می‌شوند. البته قابل ذکر است که رابطه اخیر فقط در حد زمان‌های خیلی طولانی معتبر است و در زمان‌های محدود پارامترهای غیر جهانشمول دیگری نیز نیاز است که به معادله 3 اضافه شوند. اگر چه پارامترهای غیرجهانشمول در تعیین کلاس سیستم تأثیر گذار نیستند ولی تعیین این پارامترها ارتباط بین مدل‌های گسسته رشد با معادله پیوسته KPZ را مشخص می‌سازد. علاوه بر این برای تعیین پارامترهای غیر جهانشمول نیاز به تعیین دقیق پارامترهای جهانشمول همانند نماهای رشد و زبری است که این ارتباط تنگاتنگ پارامترها را با پارامترهای جهانشمول مشخص می‌کند.

در این مقاله قصد داریم به تعیین پارامترهای غیرجهانشمول برخی از مدل‌های گسسته رشد پردازیم. در اولین نگاه ممکن است این طور به نظر برسد که از آنجایی که این پارامترها در رفتار نهایی و کلاس سیستم تأثیری ندارند، از اهمیت برخوردار نیستند ولی همان طور که در ادامه بحث خواهد شد، در واقع رفتار جهانشمول سیستم به صورت مستقیم به این پارامترها بستگی خواهد داشت و نکته جالب اینکه می‌توان برای تعیین پارامترهای جهانشمول طوری اقدام نمود که همگی پارامترهای غیرجهانشمول رفتار مشخص مورد نظر را به بهترین شکل ممکن داشته باشند، مثلاً رفتار مربوط به اثر اندازه و خطی بودن تغییرات پارامترهای

می‌شود. این کلاس‌های جهانشمول وابسته به تقارن‌های سیستم و بعد فیزیکی سیستم مورد نظر هستند. یکی از راه‌های متداول برای مطالعه رفتار آماری سطوح تصادفی پهنای فصل مشترک سطح  $w(L, t)$  می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(L, t) = \sqrt{\langle h^2(t) \rangle - \langle h(t) \rangle^2} \quad 2$$

که در آن،  $\langle h(t) \rangle$  میانگین ارتفاع و  $\langle h^2(t) \rangle$  میانگین مربعی ارتفاع می‌باشد. رفتار تابع  $w(L, t)$  برای زمان‌های به اندازه کافی کوچک به صورت توانی یعنی به صورت  $w(L, t) \approx t^{\beta}$  می‌باشد که  $\beta$  به نمای رشد معروف است. همچنین برای زمان‌های بزرگ پهنای فصل مشترک به صورت مقدار ثابتی است که معمولاً به اندازه سیستم به صورت  $w(L, t) \approx L^{\alpha}$  وابسته است که  $\alpha$  به نمای زبری شناخته می‌شود. بنابراین در فرآیند رشد یک زمان مشخصه‌ای همانند  $t_x$  وجود دارد که به ازای زمان‌های قبل از آن رفتار سیستم به صورت توانی و به ازای زمان‌های بزرگتر از آن پهنای فصل مشترک اشباع خواهد بود. به تجربه ثابت شده است که این زمان معمولاً به صورت توانی به اندازه سیستم به صورت  $t_x \approx L^z$  وابسته است که در آن  $Z$  نمای دینامیکی نامیده می‌شود [1]. نماهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $Z$  در واقع مشخص کننده کلاس جهانشمول فرآیند رشد مورد نظر می‌باشند و مستقل از همدیگر نیز نیستند و همیشه به صورت  $Z = \alpha / \beta$  به همدیگر وابسته هستند. در مورد فرآیندهای رشد کلاس KPZ علاوه بر این رابطه و به دلیل تقارن گالیله رابطه دیگری به صورت  $\alpha + Z = 2$  نیز وجود دارد [2]. یکی از پیشرفت‌های چشمگیر در زمینه رشد سطوح مربوط به مطالعه تابع توزیع ارتفاع در مدل‌های مختلف رشد می‌شود تحول تابع ارتفاع  $h(x, t)$  با زمان در زمان‌های

توجه به نوع مدل، قواعد رشد متناظر به صورت زیر اعمال می‌شود:

**1- مدل لایه‌نشانی بالاستیک<sup>2</sup> (BD):** ارتفاع سایت مورد نظر به اندازه بالاترین مقدار ارتفاع سایت مورد نظر و سایت‌های همسایه افزایش می‌یابد.

**2- مدل جامد بر روی جامد محدود شده<sup>3</sup> (RSOS):** سایت مورد نظر در صورتی رشد می‌یابد که اختلاف ارتفاع آن سایت با سایت‌های همسایه کوچکتر و یا مساوی 1 باشد.

**3- مدل لایه‌نشانی تصادفی با نرم‌سازی سطحی<sup>4</sup> (RDSR):** از بین سایت مورد نظر و سایت‌های همسایه فقط ارتفاع سایت با کمترین ارتفاع به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد.

**4- مدل لایه‌نشانی تک-پله‌ای<sup>5</sup> (SS):** اگر سایت مورد نظر نسبت به نزدیک‌ترین همسایه‌ها یک مینیمم باشد ارتفاع آن سایت با احتمال  $p$  به اندازه 2 واحد افزایش می‌یابد و چنانچه سایت مورد نظر یک ماکزیمم نسبی باشد، با احتمال  $q$  ارتفاع سایت مورد نظر به اندازه 2 واحد کاهش می‌یابد [1].

امروزه مشخص شده است که همه مدل‌های فوق به جز مدل RDSR در کلاس مدل KPZ قرار دارند. هدف از بررسی مدل RDSR این است که دقت و حساسیت روش‌های عددی را بررسی و نشان دهیم. این مدل مشخص شده است که در کلاس EW قرار می‌گیرد و در ادامه خواهیم دید که پارامترهای غیرجهان‌شمول به‌خوبی نشان می‌دهد که برای این مدل گسسته، هیچ پارامتر غیرخطی وجود ندارد.

مورد نظر با اندازه سیستم به‌بهترین شکل ممکن با روابط نظری هم‌خوانی داشته باشد.

### جزئیات شبیه‌سازی

برای تعیین پارامترهای غیر جهان‌شمول معادله KPZ در یک و دو بعد، شبیه‌سازی‌هایی را بر روی چند مدل گسسته رشد انجام می‌دهیم. همان‌طور که ذکر شد، برای تعیین این پارامترها، نیاز به تعیین دقیق مقادیر مربوط به نمای رشد  $\beta$  و نمای زبری  $\alpha$  است. برخلاف یک بعد که نتایج دقیق برای مقادیر این نماها مشخص است در دو بعد به دلیل عدم وجود مقدار دقیق این نماها، از بهترین نتایج عددی استفاده خواهیم کرد. شبیه‌سازی‌های یک بعدی را در شبکه‌ای با اندازه‌های کوچک انجام می‌دهیم چرا که قصد داریم اثرات اندازه محدود<sup>1</sup> را در الگوریتم‌های شبیه‌سازی تا حد ممکن کاهش دهیم تا این الگوریتم‌ها در بعدهای بالاتر-که نتایج دقیق تحلیلی در اختیار قرار ندارد- به ما کمک کنند تا نتایجی با کمترین اثرات اندازه شبکه را به دست آوریم. برای این منظور، بزرگترین اندازه شبکه را در یک بعد 2048 انتخاب می‌کنیم. برعکس در دو بعد تلاش می‌کنیم تا با بزرگترین اندازه‌های شبکه کار کنیم تا نتایج ما دقت کافی را داشته باشند. بنابراین بزرگترین اندازه سیستم 512 انتخاب شده است. برای رشد بر روی یک زیرلایه، مدل‌های مختلفی را انتخاب می‌کنیم که در ادامه به صورت مختصر با آنها آشنا می‌شویم. در هر لحظه‌ای از زمان همچون  $t$ ، یک سایت به صورت تصادفی از شبکه‌ای به اندازه  $L$  انتخاب می‌شود و با

<sup>4</sup> Random deposition with surface relaxation

<sup>5</sup> Single-step

<sup>1</sup> Finite Size Effects

<sup>2</sup> Ballistic Deposition

<sup>3</sup> Restricted solid-on-solid

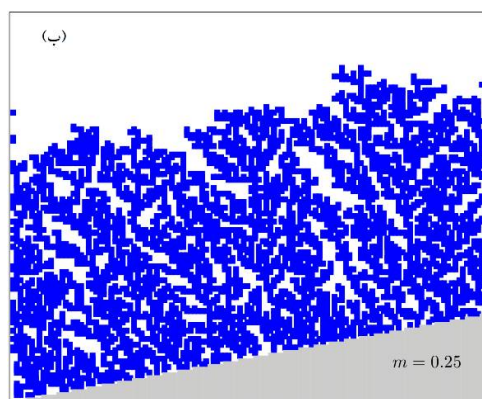
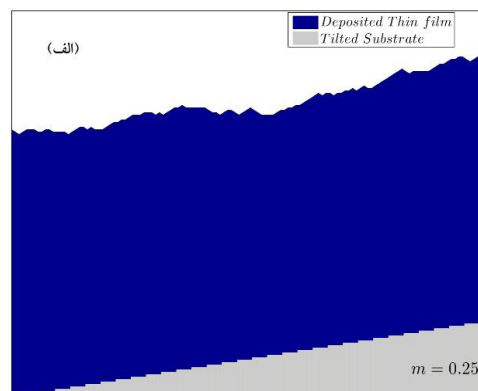
زیرلایه و یا محدود بودن آن تغییر کند. که در ادامه هر کدام را جداگانه بررسی می‌کنیم.

### الف) وابستگی به شیب زیرلایه

یکی از مشخصه‌های مهم معادله KPZ به رشد جانبی در حین رشد مربوط می‌شود این مشخصه باعث می‌شود که با مایل کردن زیرلایه، سرعت رشد تغییر نماید. اگر زیر لایه را با یک شیب  $m$  مایل کنیم به دلیل رشد جانبی و با توجه به علامت پارامتر غیر خطی  $\lambda$  در معادله<sup>1</sup>، می‌تواند سرعت رشد افزایش و یا کاهش یابد. شکل 1 اثر مایل کردن زیرلایه را برای دو مدل BD و RSOS نشان می‌دهد. رابطه بین سرعت رشد در یک زیرلایه مایل با شیب  $m$  به صورت زیر بیان می‌شود [8]:

$$v(m) = v_0 + \frac{\lambda}{2} m^2 \quad 4$$

که در این رابطه،  $v_0$  سرعت رشد در حالت شیب صفر یا بدون کجی زیر لایه می‌باشد. این رابطه به صورت گسترده برای تعیین پارامتر غیرخطی  $\lambda$  به کار رفته است. برای این منظور یک سطح شیب‌دار با شرط مرزی مارپیچی به صورت  $h(L) = h(1) + m(L-1)$  در نظر گرفته می‌شود و سپس با اندازه‌گیری سرعت رشد در شیب‌های مختلف می‌توان یک رابطه سهموی پردازش<sup>1</sup> شود و با استفاده از رابطه<sup>4</sup> می‌توان پارامتر غیرخطی  $\lambda$  را اندازه‌گیری کرد. لازم به ذکر است که این رابطه در حد زیرلایه‌های خیلی بزرگ دقیق است. در گذشته معمولاً فقط سعی می‌شد که برای بزرگترین اندازه ممکن در شبیه‌سازی، این پارامتر را اندازه‌گیری کرد. در مقاله اخیر [9]، ما سعی کردیم اثرات محدودیت اندازه سیستم را کاهش دهیم. برای این منظور پارامتر غیر خطی را برای سیستم‌ها با اندازه‌های



شکل 1. اثر مایل کردن زیرلایه در فرآیند رشد در یک شیب همانند 0,25 الف) مدل RSOS، ب) مدل BD بر روی زیر لایه‌ای به اندازه 128.

### سرعت رشد لایه‌های نازک:

میانگین آهنگ تغییرات ارتفاع بر روی یک زیر لایه به سرعت رشد معروف است. چنانچه در حین لایه‌نشانی حفراتی ایجاد شود (همانند مدل BD)، سرعت رشد بزرگتر از یک می‌باشد. ولی چنانچه در هر لحظه امکان عدم رشد به دلیل عدم برآورده شدن شرایط لازم ایجاد شود (همانند مدل‌های RSOS و SS)، سرعت رشد از یک کوچکتر است. نکته جالب دیگر اینکه سرعت رشد می‌تواند به دلیل شیب دار بودن

<sup>1</sup> Fit

پارامتر  $\Gamma$  موجود در معادله 2، نیز به ما کمک می‌کند. ارتباط بین پارامترهای  $\Gamma$  و  $A$  و همچنین پارامتر غیر خطی به صورت زیر مشخص می‌شود [6 و 12].

$$\Gamma = cA^{1/\alpha} \lambda \quad 7$$

که در آن  $c$  یک ثابتی است که بنا به تعاریف پذیرفته شده در یک بعد، مقدار 0/5 و در دو بعد، مقدار 1 را داراست. بنابراین با قرار دادن مقدار  $\lambda$  که از وابستگی سرعت رشد به شیب زیرلایه و براساس معادلات 4 و 5 تعیین می‌شود، و همچنین مقدار  $A$  که از وابستگی سرعت رشد به اندازه زیرلایه تعیین می‌شود، قادر خواهیم بود مقدار دقیق  $\Gamma$  را تعیین کنیم.

### نتایج و بحث

شکل 2 وابستگی سرعت رشد به شیب  $m$  زیرلایه را برای مدل‌های یک بعدی RSOS و دو بعدی BD نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تقعر منحنی برای مدل BD مثبت و برای مدل RSOS منفی می‌باشد که این به معنی مثبت و منفی بودن علامت پارامتر غیرخطی  $\lambda$  در معادله 1 می‌باشد. مقدار دقیق این پارامتر پس از انجام یک پردازش مناسب بر اساس معادله 4 برای یک اندازه زیرلایه مشخص تعیین می‌شود سپس جهت کاهش اثرات اندازه، با استفاده از رابطه 5، مقادیر به دست آمده را برای اندازه‌های مختلف را برون‌یابی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل 3 نشان داده شده است بهترین برآورد از مقدار پارامتر  $\lambda$  را در حد ترمودینامیک به دست می‌آوریم. مقادیر به دست آمده برای مدل‌های مختلف گسسته رشد در جدول 1 نشان داده شده است. همچنین برای مقایسه با سایر نتایج، اعداد گزارش شده توسط سایر نویسندگان نیز ذکر شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اعداد به دست آمده از دقت بسیار خوبی برخوردار هستند.

مختلف اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از رابطه زیر حد ترمودینامیک پارامتر غیرخطی را تعیین می‌کنیم [9]:

$$\lambda(L) = \lambda_{\infty} + BL^{2\alpha-2} \quad 5$$

که در آن  $\lambda_{\infty}$  و  $B$  به ترتیب حد ترمودینامیک پارامتر غیرخطی  $\lambda$  و یک ثابت هستند. در محاسبات شبیه سازی مربوط به دو بعد، ما از بهترین مقدار عددی به دست آمده برای مقدار نمای زبری  $\alpha = 0.3869(4)$  [10] استفاده می‌کنیم. نکته مهم در تعیین پارامترهای مرتبط با معادله 1 این است که برای اندازه‌گیری آنها نیاز است که اندازه زیرلایه به سمت بی‌نهایت میل کند که متأسفانه در کارهای شبیه‌سازی این کار امکان پذیر نیست بنابراین تمام گزارش‌های عددی گذشته به دلیل انجام محاسبات بر روی یک شبکه محدود، دارای خطای مربوط به اندازه سیستم هستند. روش پیشنهاد شده در مرجع 9 به ما کمک می‌کند تا اثر مربوط به اندازه شبکه را در تعیین پارامتر غیرخطی  $\lambda$  تا حد ممکن از بین ببریم و در نتیجه نتایج دقیق‌تری در مقایسه با گزارش‌های گذشته به دست آوریم.

### ب) وابستگی به اندازه زیرلایه

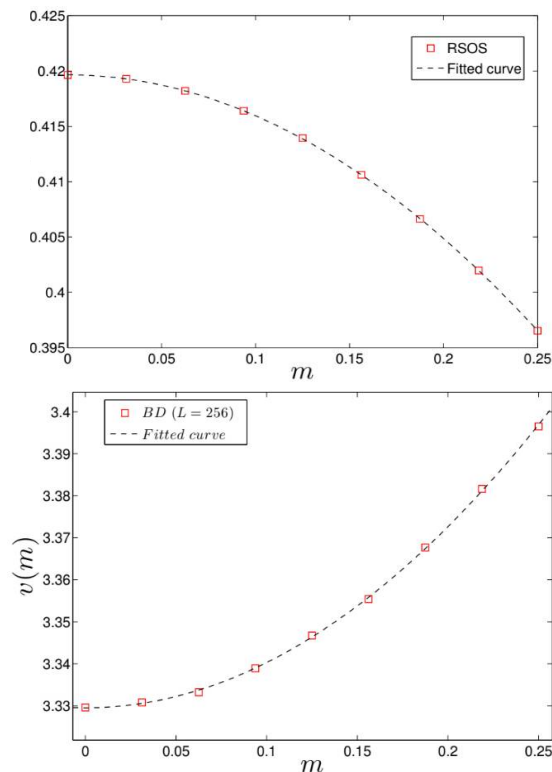
به دلیل عدم امکان رشد طول همبستگی عرضی سطح در فرآیند رشد بر روی زیرلایه‌های کوچک، سرعت رشد بر روی آنها با سرعت رشد بر روی زیرلایه‌های بی‌نهایت بزرگ متفاوت است. رابطه بین سرعت رشد و اندازه زیرلایه به صورت زیر می‌باشد [11]

$$v(L) = v_{\infty} + A \frac{\lambda}{2} L^{2\alpha-2} \quad 6$$

که در آن  $v_{\infty}$  سرعت رشد در حد زیرلایه با اندازه بی‌نهایت و  $A$  یک ثابتی است که به نسبت  $v/D$  از معادله 1 مرتبط می‌باشد. همچنین این ثابت در تعیین

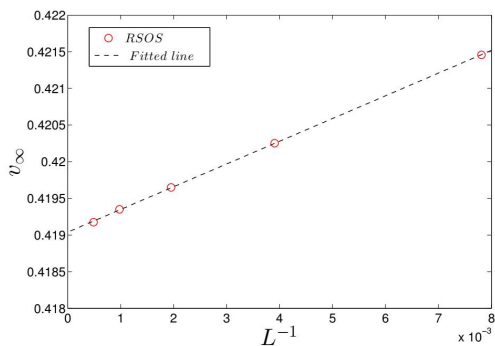
است. دقت نتایج ما به دلیل محدودیت‌های اعمالی در اندازه زیرلایه، کوچکتر و یا در حد اعداد گزارش شده است. البته نتایج به دست آمده با در نظر گرفتن بازه خطای آماری توافق خوبی با بقیه گزارش‌ها دارد. در نهایت با استفاده از مقادیر  $A$  و به کمک رابطه 7، پارامتر  $\Gamma$  را برآورد می‌کنیم. در اکثر گزارش‌ها معتبر، معمولاً تاکنون از این روش برای محاسبه  $\Gamma$  به دلیل خطای زیاد، کمتر استفاده می‌شود. دلیل عمده این خطا مربوط به عدم دقت پارامتر غیرخطی  $\lambda$  در گزارش‌های گذشته می‌شود که ما به کمک رابطه 5 آن را کاهش داده‌ایم. نتایج به دست آمده برای مدل RSOS با در نظر گرفتن خطاهای آماری با نتایج گزارش شده به جز در مورد  $\Gamma$  همخوانی خوبی دارد [13]. به نظر می‌رسد که این اختلاف به دلیل عدم در نظر گرفتن اثرات اندازه محدود باشد چرا که با توجه به رابطه 7 می‌توان  $\lambda$  را حدود 0/75 برآورد کرد که با جواب ارائه شده توسط رابطه 5 همخوانی ندارد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود تمام پارامترهای غیر خطی مدل KPZ در مورد مدل RDSR تقریباً صفر هستند (مقادیر به دست آمده کمتر و یا در حد خطا آماری بوده‌اند). بنابراین به صورت واضح تعیین این پارامترهای غیر جهانشمول به ما این امکان را می‌دهد که در مورد کلاس جهانشمول این مدل به عنوان یک مثال از مدل کلاس EW با دقت خوبی اعلام نظر کنیم. نکته مهم دیگر اینکه چنانچه در در روابط 5 تا 7 از نمای زبری دقیقی استفاده نشود در آن صورت انتظار رفتار خطی همانند شکل‌های 3 و 4 را نخواهیم داشت و این بدان معناست که مشاهده رفتار خطی مناسب نشان‌دهنده دقت نماهای زبری استفاده شده نیز می‌باشد.

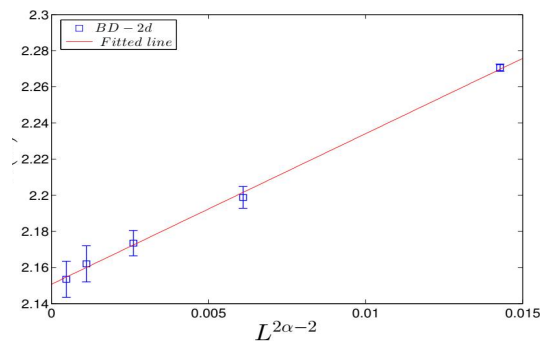


شکل 2. وابستگی سرعت رشد به میزان مایل بودن زیرلایه ( $m$ ) برای مدل‌های RSOS یک بعدی (شکل سمت راست) و BD دو بعدی (شکل سمت چپ). خط چین مشخص کننده منحنی پردازش شده بر اساس معادله 4 می‌باشد.

همچنین برای محاسبه سرعت رشد در حد ترمودینامیک و با استفاده از معادله 6 در حالتی که زیرلایه به صورت کاملاً افقی قرار دارد، سرعت رشد را برای مدل‌های مختلف گسسته محاسبه کردیم. شکل 4 وابستگی سرعت رشد را برحسب اندازه زیرلایه برای مدل RSOS یک بعدی نشان می‌دهد عرض از مبدأ این منحنی مشخص کننده سرعت رشد در حد ترمودینامیک و شیب این منحنی برابر با  $A\lambda/2$  است که با استفاده از مقایر به دست آمده برای پارامتر غیرخطی  $\lambda$ ، می‌توان ثابت  $A$  را محاسبه کرد. مقادیر به دست آمده برای سرعت رشد در حد ترمودینامیک در جدول 1 ذکر شده است. به طور مشابه اعداد گزارش شده توسط سایر روش‌ها نیز در این جدول ذکر شده



شکل 4. وابستگی سرعت رشد به اندازه شبکه در مدل RSOS یک بعدی. شیب و عرض از مبدا این نمودار به معادله 6 مرتبط می‌شوند



شکل 3. وابستگی پارامتر غیر خطی مرتبط با معادله KPZ در مدل BD دوبعدی به اندازه شبکه عرض از مبدا این نمودار حد ترمودینامیک این پارامتر را مشخص می‌کند.

جدول 1. پارامترهای غیر جهان‌شمول برای برخی از مدل‌های معروف کلاس KPZ. قابل ذکر است که نتایج ذکر شده برای مدل SS برگرفته از مقاله اخیر ما در مرجع [9] می‌باشد. همچنین برای مقایسه، اعداد گزارش شده توسط سایر نویسندگان (در صورت وجود) در زیر هر عدد ذکر شده است.

بعد	مدل	$v_\infty$	$\lambda$	$\Gamma$	A
d=1	BD	2,1397(5)	1,283(3)	4,88(8)	2,76(5)
		2,1398(7) [13]	1,30 [14]	4,90(5) [13]	2,7(2) [13]
			1,34 [15]		
	RSOS	0,41905(5)	-0,7355(8)	0,258(6)	0,837(6)
	0,41903(3) [13]	-0,75 [16]	0,252(1) [13]	0,81(3) [13]	
	SS	$\frac{1}{2}(p-q)$	$(q-p)$	$\frac{1}{2}(q-p)$	1
	RDSR	1	$\sim 0$	$\sim 0$	-
d=2	BD	3,33403(8)	2,151(6)	58(4)	3,6(1)
		3,33396(3) [17]	2,15(10) [17]	57(7) [17]	
	RSOS	0,31277(9)	-0,406(2)		1,212(6)
		0,31270(1) [13]	-0,414 [18]	0,6677	1,2005 [18]

ترمودینامیک با مدل پیوسته متناظر (یعنی معادله 1) تعیین کنیم. دقت به کار رفته در تعیین پارامتر غیرخطی  $\lambda$  نیز از مهمترین یافته‌های این پژوهش می‌باشد که می‌تواند میزان غیر خطی بودن مدل رشد مورد نظر را با دقت مناسبی برآورد کند.

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق ما تلاش کردیم تا به بررسی پارامترهای غیر جهان‌شمول مدل‌های گسسته کلاس KPZ بپردازیم. برای این منظور شبیه‌سازی‌های گسترده‌ای بر روی مدل‌های گسسته متعارف همچون BD, RSOS و SS انجام دادیم. نتایج این شبیه‌سازی‌ها به ما کمک می‌کند که ارتباط این مدل‌های گسسته را در حد



1+1 and 2+1 dimensions, *Physical Review E* **101.6** (2020) 062108.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.101.062108>

[10] A. Pagnani, G. Parisi, Numerical estimate of the Kardar-Parisi-Zhang universality class in (2+1) dimensions, *Physical Review E* **92.1** (2015) 010101.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.92.010101>

[11] J. Krug, P. Meakin, Universal finite-size effects in the rate of growth processes, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **23**, (1990) L987.

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/23/18/009/meta>

[12] J. Krug, H. Spohn, Mechanism for rough-to-rough transitions in surface growth. *Physical Review Letter* **64.19** (1990) 2332.

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.64.2332>

[13] T.J. Oliveira, S.C. Ferreira, S.G. Alves, Universal fluctuations in Kardar-Parisi-Zhang growth on one-dimensional flat substrates. *Physical Review E* **85.1** (2012) 010601.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.85.010601>

[14] J. Krug, P. Meakin, T. Halpin-Healy, Amplitude universality for driven interfaces and directed polymers in random media, *Physical Review A* **45.2** (1992) 638.

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.45.638>

[15] T.J. Oliveira, S.G. Alves, S.C. Ferreira, Kardar-Parisi-Zhang universality class in (2+1) dimensions: Universal geometry-dependent distributions and finite-time corrections. *Physical Review E* **87.4** (2013) 040102.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.87.040102>

[16] M. Torres, R. Buceta, Growing interfaces: A brief review on the tilt method, *arXiv:1711.09652* (2017). <https://arxiv.org/abs/1711.09652>

[17] S.G. Alves, T.J. Oliveira, S.C. Ferreira, Origins of scaling corrections in ballistic growth

مرجع‌ها

[1] A.-L. Barabási, H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press (1995).

[2] M. Kardar, G. Parisi, Y.C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters* **56.9** (1986) 889. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.56.889>

[3] S.F. Edwards, D.R. Wilkinson, (1982). The surface statistics of a granular aggregate, *Proceedings of the Royal Society A* **381** (1780) 17.

<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1982.0056>

[4] E. Altman, L.M. Sieberer, L. Chen, S. Diehl, J. Toner, Two-dimensional superfluidity of exciton polaritons requires strong anisotropy, *Physical Review X* **5.1** (2015) 011017.

<https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.5.011017>

[5] T. Halpin-Healy, Directed polymers in random media: Probability distributions, *Physical Review A* **44.6** (1991) R3415.

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.44.R3415>

[6] J. Krug, P. Meakin, T. Halpin-Healy, Amplitude universality for driven interfaces and directed polymers in random media. *Physical Review A* **45.2** (1992) 638.

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.45.638>

[7] I.M. Johnstone, On the Distribution of the Largest Eigenvalue in Principal Components Analysis, *The Annals of Statistics* **29** (2001) 295.

<https://www.jstor.org/stable/2674106?seq=1>

[8] J. Krug, Classification of some deposition and growth processes. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **22.16** (1989) L769.

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/22/16/002/meta>

[9] E. Daryaei, Universality and crossover behavior of single-step growth models in

models. *Physical Review E* **90.5** (2014) 052405.  
<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.90.052405>

[18] Halpin-Healy, Timothy, (2+ 1)-dimensional directed polymer in a random medium: Scaling phenomena and universal distributions, *Physical Review Letter* **109.17** (2012) 170602.  
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.170602>