

## The effect of variations of dimensions of a coaxial to WG1800 waveguide coupler on its frequency

Maryam Mostajeran\* , Ali Mohammad Nikdoust

Department of Physics, University of Yazd, Yazd, Iran

Received: 17.04.2019    Final revised: 21.04.2020    Accepted: 09.05.2020

Doi: [10.22055/JRMBS.2020.15562](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15562)

### Abstract

The fabrication tolerances for a coaxial to WG1800 waveguide coupler cause the variations of its electromagnetic parameter such as the working frequency. In order to investigate the effect of these uncertainty on the electromagnetic parameters, Monte Carlo method is usually used, which is very time consuming. In this paper, the generalized Polynomial Chaos (gPC) method is first used for study the effect of variations of dimensions of a WR187 rectangular cavity on the resonant frequency. To assessment the accuracy of this method, these results are compared with the Monte Carlo and the theory methods. In the second step, the effect of variations of dimensions of a coaxial to WG1800 waveguide coupler on its frequency is investigated using the gPC Method.

**Keywords:** Fabrication tolerances, Variations, Monte Carlo, generalized Polynomial Chaos, frequency

---

\* Corresponding Author: [mostajeran@yazd.ac.ir](mailto:mostajeran@yazd.ac.ir)



## اثر تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 روی فرکانس

مریم مستأجران\*، علی محمد نیک‌دوست

دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

دریافت: 1398/01/28 ویرایش نهائی: 1399/02/02 پذیرش: 1399/02/20

Doi: [10.22055/JRMBS.2020.15562](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15562)

### چکیده

خطای ساخت در کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800، باعث تغییر پارامترهای الکترومغناطیسی آن مانند فرکانس کار می‌شود. برای بررسی اثر این تغییرات، معمولاً از روش مونت‌کارلو استفاده می‌شود که بسیار زمان‌بر است. در این مقاله با استفاده از روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته، ابتدا اثر تغییرات ابعاد کاواک مستطیلی WR187 در فرکانس تشدید توضیح داده می‌شود. برای ارزیابی دقت این روش، نتایج حاصل، با نتایج روش تئوری و مونت‌کارلو مقایسه می‌شود. سپس با استفاده از روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته اثر تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 روی فرکانس بررسی می‌شود.

**کلیدواژگان:** خطای ساخت، تغییرات، مونت‌کارلو، چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته، فرکانس

### مقدمه

این روش بسیار زمان‌بر است. به منظور کاهش زمان اجرای شبیه‌سازی می‌توان روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم یافته (GPC<sup>4</sup>) را پیشنهاد داد [1]. اثر تغییرات ابعاد (عدم اطمینان در ابعاد) کاواک مورد استفاده در شتاب‌دهنده FLASH در DESY بر فرکانس تشدید آن با استفاده از روش gPC بررسی شده است [2]. نتایج نشان می‌دهد تغییرات کدامیک از ابعاد اثر بیشتری بر فرکانس تشدید دارد. اثر عدم اطمینان در ابعاد کاواک میانه در کاواک ابرسانای TESLA بر ویژگی‌های آن (فاکتور کیفیت، شانت امپدانس و فرکانس تشدید) با استفاده از روش gPC انجام شده است [3-4]. نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از روش مونت‌کارلو تطابق خوبی داشته است.

در فیزیک شتاب‌دهنده‌ها، محاسبه پارامترهای الکترومغناطیسی ساختارهای رادیو فرکانسی (RF<sup>1</sup>) مانند موجبرها، کوپلرها و کاواک‌ها بسیار اهمیت دارند. فرکانس قطع و فرکانس تشدید، از جمله پارامترهای الکترومغناطیسی به ترتیب برای موجبرها و کاواک‌ها هستند. این پارامترها به هندسه ساختارهای RF بستگی دارند. در دنیای واقعی، ابعاد ساختارهای RF به علت خطاهای ساخت تغییر می‌کنند، لذا در طراحی ساختارهای RF باید اثر تغییرات ابعاد در محاسبه پارامترهای الکترومغناطیسی بررسی شود. برای مطالعه اثر تغییرات ابعاد معمولاً از روش مونت‌کارلو<sup>2</sup> استفاده می‌شود. در این روش برای افزایش دقت نتایج باید نمونه<sup>3</sup> مورد نظر به تعداد نسبتاً زیادی اجرا شود، لذا

\* نویسنده مسئول: mostajeran@yazd.ac.ir

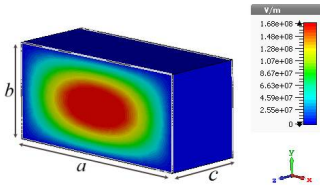
<sup>1</sup> Radio Frequency

<sup>2</sup> Monte Carlo

<sup>3</sup> Sample

<sup>4</sup> generalized Polynomial Chaos

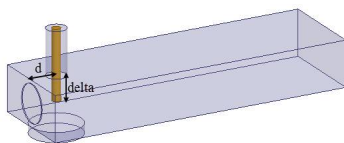
به کاواک WR187 معروف است [5]. در این مقاله ابتدا می‌خواهیم، تأثیر تغییرات پارامتر  $a$  و  $b$  بر فرکانس تشدید را بررسی کنیم.



شکل 1. الگوی میدان الکتریکی مربوط به مُد  $TM_{110}$  [6]

### کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800

در شتاب‌دهنده‌های ذرات، کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800 اتصال‌دهندهٔ موجبر به کاواک شتاب‌دهی است. امواج رادیو فرکانسی تولید شده توسط کلاستران<sup>2</sup> وارد موجبر شده و سپس از طریق کوپلر وارد ساختار شتاب‌دهی می‌شوند. کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800 در شتاب‌دهندهٔ KEKB ژاپن مورد استفاده قرار می‌گیرد و در فرکانس 500 مگاهرتز کار می‌کند [7]. در شکل 2، شماتیک کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800 که به وسیلهٔ نرم‌افزار شبیه‌سازی CST طراحی شده است، نشان داده می‌شود [8].



شکل 2 شماتیک کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800 [8]

در شکل 2 مقدار ورود کوکسیال به داخل موجبر،  $\delta$  و فاصلهٔ کوکسیال تا موجبر،  $d$  است. ماتریس پراکندگی،  $S$ ، دارای درایه‌هایی است که توان‌های تابیده شده و انعکاس یافته از پورت‌ها که منبع توان سیستم هستند را به یکدیگر مربوط می‌کنند. به‌عنوان مثال  $S_{11}$  توان بازگشتی به پورت یک است (در

در این مقاله، روش gPC ابتدا برای بررسی اثر تغییرات ابعاد کاواک مستطیلی بر فرکانس تشدید، با استفاده از نرم‌افزار شبیه‌سازی CST<sup>1</sup> و برنامه‌نویسی پایتون انجام می‌شود. برای ارزیابی دقت روش gPC، نتایج حاصل از این روش را با نتایج حاصل از روش تئوری و مونت‌کارلو مقایسه می‌کنیم. سپس، اثر تغییرات ابعاد کوپلر کوکسیال به موجبر WG1800 بر فرکانس کار آن را با استفاده از روش gPC، بررسی می‌کنیم.

### ساختارهای رادیو فرکانسی

#### کاواک مستطیلی WR187

کاواک‌های تشدید مستطیلی بر اساس ابعاد و محدودهٔ فرکانسی به دو دستهٔ WR و WG تقسیم‌بندی می‌شوند. کاواک‌های WR در محدودهٔ فرکانسی گیگاهرتز و کاواک‌های WG در محدودهٔ فرکانسی مگاهرتز کار می‌کنند. فرکانس تشدید، فرکانسی است که در آن کاواک می‌تواند یک نوسان آزاد را تقویت کند. برای یک کاواک مستطیلی فرکانس تشدید با استفاده از رابطهٔ 1 محاسبه می‌شود [5].

$$f_{mnl} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2} \quad 1$$

در اینجا،  $\epsilon$  ضریب گذردهی الکتریکی محیط،  $\mu$  ضریب تراوایی مغناطیسی محیط،  $m$  و  $n$  و  $l$  ثابت‌های جداسازی مربوط به مد و  $a$  و  $b$  و  $c$  پارامترهای مربوط به ابعاد کاواک مستطیلی هستند. اگر  $a > b > c$  باشد مُد تشدید غالب کاواک، مُد  $TM_{110}$  است. الگوی میدان الکتریکی مربوط به مُد  $TM_{110}$  در شکل 1 نشان داده شده است.

کاواک تشدید مورد نظر، کاواکی با ابعاد  $a = 4,755 \text{ cm}$  ( $a = 187 \text{ inch}$ )،  $b = 2,215 \text{ cm}$  و  $c = 2 \text{ cm}$  با فرکانس تشدید  $7,4655 \text{ GHz}$  است که

<sup>2</sup> Klystron

<sup>1</sup> CST STUDIO SUITE

یکنواخت در بازه  $[-1, 1]$  باشند، تابع  $f(\vec{\xi})$  با استفاده از بسط چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر از رابطه 2 به دست می‌آید [10].

$$f(\vec{\xi}) = \sum_{\alpha \in \chi(M, N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}), \quad 2$$

در اینجا،  $M$  تعداد متغیرها،  $N$  مرتبه بسط،  $\alpha$  شاخص چند بُعدی،  $c_\alpha$  ضرایب بسط و  $\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})$  چند جمله‌ای پایه لژاندر چند متغیره است.  $\mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi})$  برابر با حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر تک متغیره است. حالت‌های مختلف شاخص  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$  با استفاده از شرط  $\chi(M, N) = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^M : \sum_{i=1}^M \alpha_i \leq N \right\}$  تشکیل می‌شوند. با محاسبه ضرایب بسط از رابطه 3، تابع  $f(\vec{\xi})$  تعیین می‌شود.

$$c_\alpha = \frac{\mathbb{E} \left[ f(\vec{\xi}) \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}) \right]}{\mathbb{E} \left[ \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}) \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}) \right]} \quad 3$$

$$= \frac{1}{\gamma_\alpha} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f(\vec{\xi}) \mathbf{P}_\alpha(\vec{\xi}) \rho(\vec{\xi}) d\vec{\xi},$$

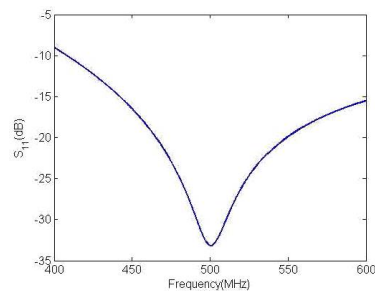
در اینجا،  $\mathbb{E}$  نماد میانگین،  $\rho(\vec{\xi})$  تابع چگالی  $\gamma_\alpha = \left( \frac{2}{2\alpha_1 + 1} \right) \dots \left( \frac{2}{2\alpha_M + 1} \right)$  احتمال متغیرها است.  $\rho(\vec{\xi})$  برابر با  $\rho(\xi_1) \dots \rho(\xi_M)$  است. مقادیر  $f(\vec{\xi})$  به‌ازای متغیرهای ورودی  $(t_1, \dots, t_M)$  که در ادامه به‌عنوان گره‌ها<sup>4</sup> معرفی می‌شوند، مشخص است. با محاسبه انتگرال رابطه 3 به‌روش کلینشو کورتیز<sup>5</sup> [11]، ضرایب بسط از رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_\alpha = \frac{1}{\gamma_\alpha} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_M=1}^n f(t_{1,i_1}, \dots, t_{M,i_M}) P_{\alpha_1}(t_{1,i_1}) \dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M}) w(t_{1,i_1}) \dots w(t_{M,i_M}). \quad 4$$

<sup>4</sup> Nodes

<sup>5</sup> Clenshaw-curtis

شکل 2 پورت یک، ورودی کواکسیال در نظر گرفته شده است). در طراحی ابزارهای الکترومغناطیسی هدف، کمینه کردن  $S_{11}$  است. در شکل 3 پارامتر پراکندگی  $S_{11}$  برحسب فرکانس برای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 نشان داده شده است [8]، که در فرکانس کار<sup>1</sup> (500 مگاهرتز) مقدار کمینه  $S_{11}$  را دارد. اگر پهنای باند این کوپلر را محدوده فرکانسی که پارامتر پراکندگی آن کمتر از  $-30 \text{ dB}$  است در نظر بگیریم، این کوپلر می‌تواند در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز مورد استفاده قرار بگیرد. برای بررسی اثر تغییرات پارامتر  $d$  و  $\delta$  بر فرکانس کار از روش gPC استفاده می‌کنیم.



شکل 3. نمودار پارامتر پراکندگی  $S_{11}$  برحسب فرکانس [8].

### روش چند جمله‌ای آشوب تعمیم‌یافته (gPC)

روش gPC، اولین بار توسط قانم<sup>2</sup> و اسپانوس<sup>3</sup> مطرح شد. اگر به‌ازای برخی متغیرهای ورودی  $\vec{\xi}$  مقدار تابع  $f(\vec{\xi})$  مشخص باشد، برای به‌دست آوردن تابع  $f(\vec{\xi})$  می‌توان از روش gPC استفاده کرد [9]. در این روش یک تابع برحسب چند جمله‌ای‌های متعامد بسط داده می‌شود. با فرض اینکه متغیرهای ورودی تابع  $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_M)$  دارای توزیع تصادفی

<sup>1</sup> Working Frequency

<sup>2</sup> Ghanem

<sup>3</sup> Spanos

(PDF)، است. با برآورد کردن (فیت کردن) تابع بر داده‌های به دست آمده، PDF به دست می‌آید. در این مقاله از برآوردگر کرنل<sup>3</sup> در MATLAB برای محاسبه PDF استفاده می‌شود [14]. در روش gPC برای انتخاب مرتبه بسط مناسب، باید خطای نسبی تابع را محاسبه کرد. برای محاسبه خطای نسبی تابع از رابطه<sup>8</sup> استفاده می‌شود.

$$Error = E \left[ \left| \frac{f_T(\bar{\xi}) - f_N(\bar{\xi})}{f_T(\bar{\xi})} \right| \right], \quad 8$$

که  $f_T(\bar{\xi})$  مقدار واقعی تابع و  $f_N(\bar{\xi})$  مقدار تابع از روش شبیه‌سازی (روش gPC در مرتبه بسط  $N$ ) است. برای مواردی که مقادیر  $f_T(\bar{\xi})$  معلوم نیست از روش تخمین خطای پسین<sup>4</sup> استفاده می‌شود. روش تخمین خطای پسین اولین بار توسط نوبایل<sup>5</sup> مطرح شد [15]. در این روش، به جای تابع  $f_T(\bar{\xi})$  مقدار تابع از روش gPC به ازای یک مرتبه بسط بالاتر ( $f_{N+1}(\bar{\xi})$ ) در نظر گرفته شده و خطای نسبی تابع از رابطه<sup>9</sup> به دست می‌آید.

$$Error = E \left[ \left| \frac{\sum_{\alpha \in Z(M, N+1)} c_\alpha P_\alpha(\bar{\xi}) - \sum_{\alpha \in Z(M, N)} c_\alpha P_\alpha(\bar{\xi})}{\sum_{\alpha \in Z(M, N+1)} c_\alpha P_\alpha(\bar{\xi})} \right| \right], \quad 9$$

خطای مرتبه  $(N+1)$  در روش gPC، علاوه بر رابطه<sup>9</sup> می‌توان برحسب خطای ضرایب بسط<sup>6</sup> هم محاسبه کرد (رابطه<sup>10</sup>). اثبات آن در پیوست (الف) آورده شده است.

$$Error = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{C}^{(N+1)} & -\vec{C}^{(N)} \\ \vec{C} & \end{matrix} \right\|}{\left\| \vec{C}^{(N+1)} \right\|}. \quad 10$$

که  $(t_{1,i_1}, \dots, t_{M,i_M})$  گره‌های روش کلینشو کورتیز [12]،  $f(t_{1,i_1}, \dots, t_{M,i_M})$  مقدار تابع به دست آمده از جایگذاری گره‌ها به عنوان متغیرهای ورودی، حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های  $P_{\alpha_1}(t_{1,i_1}) \dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M})$  لژاندر با جایگذاری گره‌ها به عنوان متغیر ورودی، حاصل ضرب تابع وزن<sup>1</sup> متناظر با گره‌ها و  $n$  تعداد گره‌ها هستند. نحوه محاسبه گره‌ها و تابع وزن به روش کلینشو کورتیز در [12] توضیح داده شده است. برای  $N \geq 1$  تعداد گره‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$n = 2^N + 1 \quad 5$$

در حالت کلی، تابع  $f(\vec{X})$  دارای  $M$  متغیر  $X_1, \dots, X_M$  است به طوری که هر یک از متغیرها دارای توزیع تصادفی در بازه  $[a_i, b_i]$  هستند، برای بسط این تابع برحسب چند جمله‌ای لژاندر باید متغیر ورودی آن را بر اساس بازه  $[-1, 1]$  تبدیل کرد. برای تبدیل کردن متغیر  $X_i$  برحسب گره‌های  $t_i$  از رابطه<sup>6</sup> استفاده می‌شود [13].

$$X_i(t_i) = \frac{b_i - a_i}{2} t_i + \frac{b_i + a_i}{2}. \quad 6$$

با استفاده از تابع تبدیل یافته، ضرایب بسط از رابطه<sup>7</sup> به دست می‌آید.

$$c_\alpha = \frac{1}{\gamma_\alpha} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_M=1}^n f(X_1(t_{1,i_1}), \dots, X_M(t_{M,i_M})) \quad 7$$

$P_{\alpha_1}(t_{1,i_1}) \dots P_{\alpha_M}(t_{M,i_M}) w(t_{1,i_1}) \dots w(t_{M,i_M})$ . پس از تعیین ضرایب و مشخص شدن تابع  $f(\vec{X})$  برای  $\mathcal{N}$  نمونه تصادفی  $\vec{X}$ ، مقدار  $f(\vec{X})$  حاصل می‌شود که دارای توزیع تصافی، تابع چگالی احتمال<sup>2</sup>

<sup>4</sup> Posteriori Error

<sup>5</sup> Nobile

<sup>6</sup> Coefficient Error

<sup>1</sup> Weight

<sup>2</sup> Probability Density Function

<sup>3</sup> Kernel

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,\dots,0} + \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha \in \chi(1,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^M \sum_{\alpha \in \chi(2,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \xi_j) + \dots + \sum_{i=1}^M \dots \sum_{\substack{k=1 \\ k>\dots>i}}^M \sum_{\alpha \in \chi(M,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \dots, \xi_k) \quad 13$$

در اینجا، با تعریف  $f_0 = c_{0,\dots,0}$ ،  $f_i(\xi_i) = \sum_{\alpha \in \chi(1,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i)$ ،  $f_{i,j}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{\alpha \in \chi(2,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \xi_j)$  و  $f_{i,\dots,k}(\xi_i, \dots, \xi_k) = \sum_{\alpha \in \chi(M,N)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \dots, \xi_k)$ ، رابطه 13 را می‌توان به صورت رابطه 14 نوشت [17].

$$f(\vec{\xi}) = f_0 + \sum_{i=1}^M f_i(\xi_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^M f_{i,j}(\xi_i, \xi_j) + \dots + \sum_{i=1}^M \dots \sum_{\substack{k=1 \\ k>\dots>i}}^M f_{i,\dots,k}(\xi_i, \dots, \xi_k) \quad 14$$

شاخص سابل مرتبه اول برای هر متغیر، برابر با نسبت واریانس مربوط به همان متغیر به واریانس مربوط به کل متغیرها است. برای تابع  $M$  متغیره  $f(\vec{\xi})$  سابل مرتبه اول برحسب متغیر  $\xi_i$ ،  $S_i$ ، با استفاده از رابطه 15 به دست می‌آید [17].

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_{\xi_i} \left[ E \left[ f(\vec{\xi}) \mid \xi_i \right] \right]}{V \left[ f(\vec{\xi}) \right]}, \quad 1 \leq i \leq M \quad 15$$

در اینجا،  $V$  نماد واریانس و  $E \left[ f(\vec{\xi}) \mid \xi_i \right]$  نماد میانگین‌گیری از تابع  $f(\vec{\xi})$  با ثابت در نظر گرفتن  $\xi_i$  است. سابل مرتبه دوم،  $S_{i,j}$ ، میزان تأثیر برهم‌کنش متغیر  $\xi_i$  و  $\xi_j$  در خروجی تابع را نشان می‌دهد که از رابطه 16 به دست می‌آید [18].

$$S_{i,j} = \frac{V_{\xi_i, \xi_j} \left[ E \left[ f(\vec{\xi}) \mid \xi_i, \xi_j \right] \right]}{V \left[ f(\vec{\xi}) \right]} - S_i - S_j, \quad 1 \leq i < j \leq M \quad 16$$

که  $\vec{C}^{(N+1)}$  ضرایب بسط مرتبه  $N+1$  و  $\vec{C}^{(N)}$  ضرایب بسط مرتبه  $N$  هستند.

### شاخص سابل

شاخص‌های سابل<sup>1</sup>، میزان تأثیر هر یک از متغیرهای ورودی و برهم‌کنش متغیرها را در خروجی تابع نشان می‌دهد [16]. به‌طور مثال، تابع دو متغیره  $f(\vec{\xi})$  را در نظر بگیرید. برای مرتبه  $N=3$  حالت‌های مختلف شاخص  $\alpha$  براساس  $\alpha \in \mathbb{N}^2 : (\alpha_1 + \alpha_2) \leq 3$  به صورت  $(0,0)$ ،  $(0,1)$ ،  $(1,0)$ ،  $(0,2)$ ،  $(2,0)$ ،  $(1,1)$ ،  $(1,2)$ ،  $(2,0)$ ،  $(2,1)$  و  $(3,0)$  تشکیل می‌شوند. با توجه به رابطه 2، تابع  $f(\vec{\xi})$  بسط داده می‌شود، رابطه 11.

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} \mathbf{P}_{0,0}(\vec{\xi}) + c_{0,1} \mathbf{P}_{0,1}(\vec{\xi}) + c_{0,2} \mathbf{P}_{0,2}(\vec{\xi}) + c_{0,3} \mathbf{P}_{0,3}(\vec{\xi}) + c_{1,0} \mathbf{P}_{1,0}(\vec{\xi}) + c_{1,1} \mathbf{P}_{1,1}(\vec{\xi}) + c_{1,2} \mathbf{P}_{1,2}(\vec{\xi}) + c_{2,0} \mathbf{P}_{2,0}(\vec{\xi}) + c_{2,1} \mathbf{P}_{2,1}(\vec{\xi}) + c_{3,0} \mathbf{P}_{3,0}(\vec{\xi}) \quad 11$$

رابطه 11 را می‌توان به صورت رابطه 12 نوشت که اثبات آن در پیوست ب آورده شده است.

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{\alpha \in \chi(1,3)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i) + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{M=2} \sum_{\alpha \in \chi(2,3)} c_\alpha \mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \xi_j) \quad 12$$

در اینجا،  $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i)$  چند جمله‌ای پایه لژاندر تک متغیره،  $\mathbf{P}_\alpha(\xi_i, \xi_j)$  چند جمله‌ای پایه لژاندر دو متغیره هستند. با توجه به رابطه 12، تابع  $M$  متغیره  $f(\vec{\xi})$  را می‌توان به صورت توابع تک متغیره، دو متغیره و چند متغیره تفکیک کرد، (رابطه 13).

<sup>1</sup> Sobol Indices

چاپ می‌شود. به‌طور مثال، مقادیر پارامتر X و Y با استفاده از دستور زیر در محیط پایتون در فایل structure.txt چاپ می‌شود.

```
with open ('structure.txt','w') as f:
    f.write('%f \n' % X)
    f.write('%f \n' % Y)
f.close()
```

III. نرم‌افزار CST حاوی مدل طراحی شده، با

استفاده از فایل bas که قبلاً تهیه شده است (چگونگی ایجاد فایل bas در مرجع [8] توضیح داده شده است) در محیط پایتون فراخوانی و اجرا می‌شود.

```
from subprocess import call } (1)
call(["CST_MWS_Path\CST DESIGN ENVIRONMENT.exe"
      , "m", "file_Path\cmdfile.bas"]) } (2)
```

(1) برای فراخوانی نرم‌افزار CST توسط برنامه پایتون، تابع call از کتابخانه subprocess فراخوانی شده است.

(2) با این دستور، نرم‌افزار CST فراخوانی و اجرا می‌شود. این دستور شامل دو بخش است، بخش اول مسیر نصب نرم‌افزار CST روی سیستم و بخش دوم مسیر قرار گرفتن فایل bas را نشان می‌دهد.

با اجرای نرم‌افزار CST، نتایج شبیه‌سازی در پوشه Result ذخیره می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از برنامه پایتون فراخوانی کرد. به‌عنوان مثال، با اجرای مدل مربوط به کاواک WR187، فرکانس تشدیدی در پوشه Result در فایل Model.log چاپ می‌شود. با استفاده از دستورات زیر در محیط پایتون می‌توان مقدار فرکانس تشدیدی را از فایل Model.log فراخوانی کرد.

در اینجا،  $E[f(\xi)]$  نماد میانگین‌گیری از تابع  $f(\xi)$  با ثابت در نظر گرفتن  $\xi_i$  و  $\xi_j$  است. رابطه 17 برای سائل کل برقرار است [19].

$$S^{Total} = \sum_{i=1}^M S_i + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^M S_{i,j} \quad 17$$

$$+ \dots + \sum_{i=1}^M \dots \sum_{\substack{k=1 \\ k>\dots>i}}^M S_{i,\dots,k} = 1$$

در اینجا،  $M$  تعداد متغیرها و  $S_{i,\dots,k}$  شاخص سائل مرتبه  $M$  است.

کنترل نرم‌افزار CST با استفاده از برنامه پایتون

در روش gPC، باید مدل طراحی شده در نرم‌افزار CST به تعداد گره‌ها اجرا شود و تابع خروجی به‌ازای گره‌ها محاسبه شود. به‌این منظور، نرم‌افزار شبیه‌سازی CST را با استفاده از برنامه پایتون کنترل می‌کنیم تا به‌طور خودکار اجرا شود. نرم‌افزار CST بر اساس زبان برنامه‌نویسی VBA<sup>1</sup> ساخته شده است. به‌طور کلی برای کنترل نرم‌افزار CST توسط پایتون به چندین فایل با پسوند مختلف (فایل با پسوند CST حاوی مدل طراحی شده، فایل با پسوند bas شامل دستورات VBA، فایل با پسوند txt شامل مقادیر پارامترها و فایل با پسوند py شامل دستورات پایتون) نیاز است. مراحل کنترل نرم‌افزار شبیه‌سازی CST با استفاده از برنامه پایتون عبارتند از:

- I. مدل مورد نظر (به‌عنوان مثال، کاواک WR187 و یا کوپلر کوآکسیال به موجبر WG1800) در نرم‌افزار CST شبیه‌سازی و ذخیره می‌شود.
- II. پارامترهای تعیین شده در طراحی مدل، توسط برنامه‌ای برای ورود به فایل bas در فایل متنی

<sup>1</sup> Visual Basic Application

شکل 4. الف: تب نتایج، گزینه نتایج تک بُعدی، ب: تعریف فرکانس در مینیم مقدار  $S_{11}$  (فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800).

با اجرای مدل مقدار فرکانس کار در پوشه Result در فایل `S1,1_0D_xAtGlobalYMin.rd0` چاپ می‌شود. با استفاده از دستور زیر در محیط پایتون می‌توان مقدار فرکانس کار را فراخوانی کرد.

```
Frequency = open('coupler/Result/S1,1_0D_xAtGlobalYMin.rd0', 'r').read()
```

### استفاده از روش gPC در پایتون برای محاسبه

#### فرکانس تشدید کاواک WR187

برای به دست آوردن تابع  $f(x, y)$  (تابع فرکانس تشدید کاواک WR187) با استفاده از روش gPC، برنامه زیر را در محیط پایتون می‌نویسیم.

```
import chaospy as cp
from numpy import legendre as Leg } (1)

M = 2
order_P = 2 } (2)

n = 2 * order_P + 1 } (3)

Node, Weight = cp.quad_clenshaw_curtis(n-1, -1, 1) } (4)

f = np.loadtxt('Frequency.txt') } (5)

i = -1
for a1 in range(order_P + 1):
    for a2 in range(order_P + 1):
        alpha = abs(a1 + a2)
        if order_P >= alpha:
            i += 1
            a = [a1, a2] } (7)

for j in range(0, n, 1):
    for k in range(0, n, 1):
        Pa1[i, j] = Leg.Legendre(a1, Node[j])
        Pa2[i, k] = Leg.Legendre(a2, Node[k])
        P[j, k] = Pa1[i, j] * Pa2[i, k]

        W[j, k] = Weight[j] * Weight[k] } (8)

Integral[i] = sum(sum(W * P * f)) } (10)

for m in range(M):
    gamma[m] = ((2.0 * a[m] + 1) / 2.0) } (11)
Gamma[i] = np.prod(gamma)

c[i] = np.dot(Gamma[i], Integral[i]) } (12)
```

```
lines = open('cavity\Result\Model.log').readlines()
index = [x for x in range(len(lines))
         if 'frequency' in lines[x].lower()]

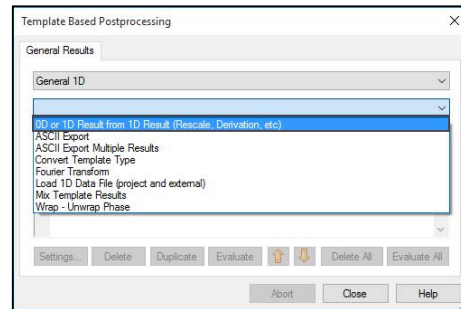
p = list(np.array([item.split() for item in
                  lines[index[3]].split('\n')[1:-1]]).flat)
q = list(np.array([item.split() for item in
                  lines[index[3]+1].split('\n')[1:-1]]).flat)

Frequency = q[p.index('Frequency')]
```

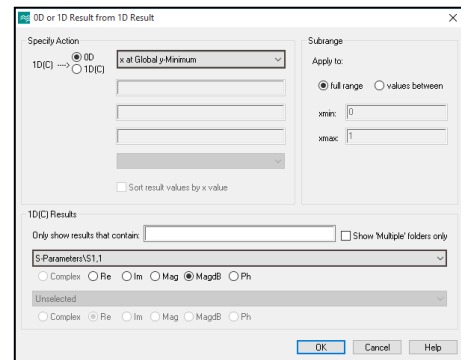
به این ترتیب، با اجرای متعدد نرم‌افزار CST (به تعداد گره‌ها) فرکانس‌های تشدید مربوط به ابعاد کاواک WR187 را به دست می‌آوریم و با دستور زیر در فایل Frequency.txt ذخیره می‌کنیم.

```
import numpy as np
np.savetxt('Frequency.txt', Frequency, fmt='%.12f')
```

همچنین برای فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800، در قسمت پس پردازش<sup>1</sup> نرم‌افزار CST، نتایج یک بُعدی را انتخاب می‌کنیم، (شکل 4 الف). سپس با انتخاب گزینه `x at Global y-Minimum` برای نمودار پارامتر پراکندگی  $S_{11}$ ، فرکانس کار را تعیین می‌کنیم، (شکل 4 ب).



الف



ب



13) کتابخانه sympy برای تعریف متغیر x و y

به عنوان سمبل فراخوانی شده است.

14) چند جمله‌ای پایه لژاندر  $P_\alpha = P_{\alpha_1}(x)P_{\alpha_2}(y)$

تعریف شده است.

15) تابع  $f(x, y)$  با استفاده از رابطه 2 تعریف

می‌شود.

پس از اجرای این برنامه، تابع به صورت زیر به دست

می‌آید.

```
f(x,y) = 0.000901602094584902*x**2 - 0.00106875131755339*x*y
- 0.0279610178507774*x + 0.0136614456815839*y**2
- 0.277356966631323*y + 7.46561083369622
```

برای به دست آوردن PDF تابع  $f(x, y)$ ،  $10^4$  نمونه

تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه  $[-1, 1]$  برای

متغیرهای x و y ایجاد می‌کنیم (دستور زیر).

```
x = sorted((cp.Uniform(-1.0,1.0)).sample(10**4))
y = sorted((cp.Uniform(-1.0,1.0)).sample(10**4))
```

با جایگذاری این نمونه‌های تصادفی در تابع  $f(x, y)$ ،  $10^4$  مقدار برای فرکانس تشدید به دست می‌آید. تابع چگالی احتمال از روش کرنل با دستور زیر محاسبه می‌شود.

```
from scipy import stats
kde = stats.gaussian_kde(f)
freq = np.linspace(f.min(), f.max(), 25)
PDF = kde(freq)
```

در این برنامه، کتابخانه scipy فراخوانی و از قسمت

stats تابع کرنل با نام kde تعریف می‌شود. سپس

تعدادی نمونه تصادفی برای f در نظر گرفته و با نام

freq مشخص می‌کنیم و PDF آن را به دست می‌آوریم

(در قسمت نتیجه‌گیری، نتایج آورده شده است)

### شاخص سائل در برنامه‌ی پایتون

برای محاسبه شاخص حساسیت سائل می‌توان از

بسته Chaospy استفاده کرد. این بسته حاوی ابزار

Sensitivity برای توصیف شاخص سائل است که در

آن توابعی مانند Sens\_m برای محاسبه شاخص سائل

مرتبه اول، Sens\_m2 برای محاسبه شاخص سائل

```
import sympy as sy
x = sy.Symbol('x')
y = sy.Symbol('y') } (۱۳)
```

```
i=-1
for a1 in range (order_P+1):
    for a2 in range (order_P+1):
        alpha = abs(a1 + a2)
        if order_P>=alpha:
            i+= 1
            La1[i] = Leg.Legendre(a1,x)
            La2[i] = Leg.Legendre(a2,y)
            L[i]=La1[i]*La2[i] } (۱۴)
```

```
def f(x,y):
    return sum(c*L) } (۱۵)
```

1) کتابخانه chaospy برای محاسبه گره‌ها و تابع وزن

فراخوانی و از کتابخانه numpy توابع لژاندر فراخوانی

می‌شوند.

2) تعداد متغیرها با M و مرتبه بسط N با

order\_P تعریف شده است.

3) تعداد گره‌های روش کلینشو کورتیز با استفاده از

رابطه 5 مشخص می‌شود.

4) با استفاده از کتابخانه chaospy گره‌ها و تابع وزن

متناظر با گره‌ها از روش کلینشو کورتیز به دست می‌آید.

5) نتایجی که در قسمت قبل به دست آمده، در این

قسمت فراخوانی می‌شود (به طور مثال، فایل

Frequency.txt ذخیره شده در قسمت قبل).

6) شرط  $\chi(2, 2) = \{\alpha \in \mathbb{N}^2 : (\alpha_1 + \alpha_2) \leq 2\}$

شده است.

7) شاخص  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  تعریف می‌شود.

8) حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر به ازای

گره‌ها  $(P_{\alpha_1}(t_{1,i_1})P_{\alpha_2}(t_{2,i_2}))$  به دست می‌آید.

9) حاصل ضرب تابع وزن متناظر با گره‌ها

$w(t_{1,i_1})w(t_{2,i_2})$  محاسبه می‌شود.

10) با این دستور، حاصل انتگرال رابطه 3 با استفاده از

روش کلینشو کورتیز به دست می‌آید.

11) حاصل رابطه  $\gamma_\alpha = (\frac{2}{2\alpha_1+1})(\frac{2}{2\alpha_2+1})$

محاسبه می‌شود.

12) با این دستور، ضرایب بسط با استفاده از رابطه 7

محاسبه می‌شود.

مرتبه دوم وجود دارند. شاخص سائل در پایتون توسط برنامه زیر محاسبه می‌شود.

```
import chaospy as cp
x, y = cp.variable(2)
from gPC import f as function } (1)

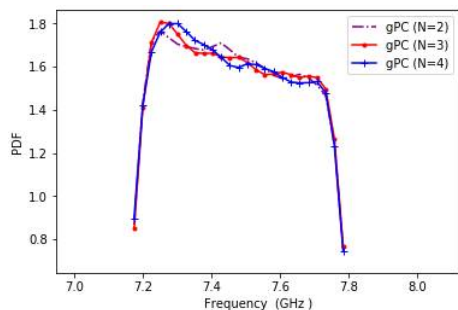
x=cp.Uniform(-1,1)
y=cp.Uniform(-1,1)
distribution = cp.J(x, y) } (2)

frist_order_sobol = cp.descriptives.sensitivity
.Sens_m(function,distribution) } (3)

second_order_sobol = cp.descriptives.sensitivity
.Sens_m2(function,distribution) } (4)
```

### 1) PDF فرکانس تشدید با استفاده از روش gPC

با استفاده از روش gPC فرکانس تشدید را برای مرتبه‌های مختلف بسط ( $N=2$ ،  $N=3$  و  $N=4$ ) به دست آوردیم. با فرض  $10^4$  نمونه تصادفی برای هر دو پارامتر  $a$  و  $b$ ، PDF فرکانس تشدید را برای کاواک WR187 به دست آوردیم (شکل 5).



شکل 5. نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس تشدید کاواک WR187 با استفاده از روش gPC به ازای مرتبه‌های مختلف بسط.

در شکل 6 برای بررسی همگرایی نتایج حاصل از این روش، نمودار درصد خطای نسبی فرکانس تشدید به دست آمده از روش gPC بر حسب مرتبه‌های مختلف بسط نشان داده شده است.

1) تابع  $f(x, y)$  که با استفاده از روش gPC

در پایتون به دست آمده فراخوانی می‌شود.

2) برای محاسبه شاخص‌های سائل در

قسمت 3 و 4، باید نوع توزیع تصادفی

متغیرهای ورودی مشخص شود. در اینجا برای

متغیرهای ورودی توزیع تصادفی یکنواخت در

بازه  $[-1, 1]$  تعریف شده است.

3) از کتابخانه Chaospy، تابع Sens\_m برای

محاسبه شاخص سائل مرتبه اول فراخوانی

می‌شود. این تابع، شاخص سائل مرتبه اول را بر

اساس رابطه 15 محاسبه می‌کند.

4) تابع Sens\_m2 برای محاسبه شاخص سائل

مرتبه دوم فراخوانی می‌شود. این تابع، شاخص

سائل مرتبه دوم را بر اساس رابطه 16 به دست

می‌آورد.

### نتایج

نتایج تغییرات ابعاد کاواک WR187 بر فرکانس

### تشدید

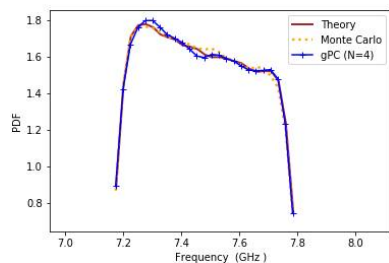
با در نظر گرفتن  $0.1 \text{ cm}$  تغییرات ابعاد به‌عنوان

خطای ساخت کاواک WR187، پارامتر  $a$  دارای

توزیع تصادفی یکنواخت در بازه

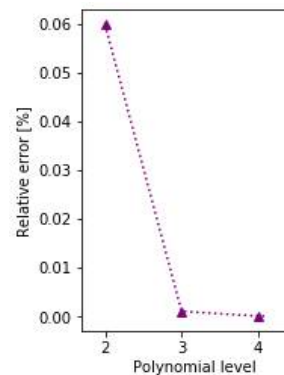
در روش مونت‌کارلو،  $10^4$  نمونه تصادفی در بازه  $[4,655\text{cm}, 4,855\text{cm}]$  برای پارامتر  $a$  و  $10^4$  نمونه تصادفی در بازه  $[2,115\text{cm}, 2,315\text{cm}]$  برای پارامتر  $b$  در نظر گرفته می‌شود. به‌ازای هر نمونه تصادفی برای پارامترهای  $a$  و  $b$ ، مدل با ابعاد جدید در نرم‌افزار شبیه‌سازی CST تحت کنترل پایتون ایجاد و فرکانس تشدید آن محاسبه شد. سپس PDF فرکانس تشدید به‌دست آمد.

برای سنجش دقت روش gPC، نمودار PDF فرکانس تشدید به‌دست آمده از روش gPC در مرتبه بسط  $N = 4$  با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو مقایسه شده است، (شکل 7). با استفاده از این نتایج، میانگین فرکانس تشدید برای روش gPC در مرتبه بسط  $N = 4$  برابر  $7,4685\text{GHz}$  و برای روش مونت‌کارلو برابر  $7,4687\text{GHz}$  است، که به ترتیب  $0\%04$  و  $0\%042$  از مقدار فرکانس تشدید اولیه کواک، اختلاف دارد.



شکل 7. مقایسه نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس تشدید کواک WR187 به‌دست آمده از روش gPC در مرتبه بسط  $N = 4$  با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو.

همان‌طور که در شکل 7 دیده می‌شود، نتایج روش gPC به‌ازای مرتبه بسط  $N = 4$  که در مدت زمان بسیار کمتری نسبت به روش مونت‌کارلو به‌دست آمده است نیز تطابق نسبتاً خوبی با تئوری دارد (روش مونت‌کارلو تقریباً 72 ساعت و روش gPC نزدیک به 6 ساعت).



شکل 6. نمودار درصد خطای نسبی فرکانس تشدید کواک WR187 برحسب مرتبه‌های مختلف بسط.

درصد خطای نسبی روش‌های gPC در مرتبه‌های بسط  $N = 2$ ،  $N = 3$  و  $N = 4$  به ترتیب برابر با  $6 \times 10^{-2}$ ،  $1 \times 10^{-3}$ ،  $8,3 \times 10^{-5}$  است که خطای روش gPC در مرتبه بسط  $N = 4$  مینیمم مقدار را دارد، لذا از روش gPC در مرتبه بسط  $N = 4$  برای مقایسه با روش‌های تئوری و مونت‌کارلو استفاده می‌کنیم.

## 2) PDF فرکانس تشدید با استفاده از روش

### تئوری

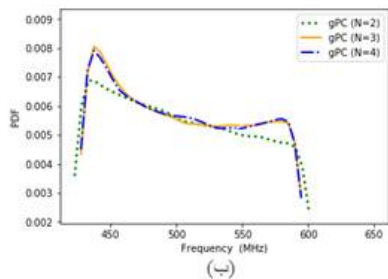
با توجه به رابطه 1، با فرض اینکه فضای داخل کواک خال و مد غالب آن  $TM_{110}$  باشد رابطه 18 برای محاسبه فرکانس تشدید برقرار است.

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} \quad (18)$$

در اینجا،  $\epsilon_0$  ضریب گذردهی الکتریکی خال و  $\mu_0$  ضریب تراوایی مغناطیسی خال هستند. به‌ازای  $10^4$  نمونه تصادفی برای بازه‌های مورد نظر پارامتر  $a$  و  $b$ ، فرکانس تشدید محاسبه شد و PDF آن به‌دست آمد.

## 3) PDF فرکانس تشدید با استفاده از روش

### مونت‌کارلو



شکل 8. نمودار تابع چگالی احتمال فرکانس کار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به دست آمده از روش gPC به ازای مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات الف) 2%، ب) 10%.

با استفاده از PDF های به دست آمده برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای  $d$  و  $\delta$ ، مقدار میانگین و انحراف معیار استاندارد فرکانس کار محاسبه کردیم (جدول 1).

جدول 1. میانگین و انحراف معیار استاندارد فرکانس کار با استفاده از PDF های به دست آمده برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800.

روش gPC در مرتبه بسط	توصیف آماری	فرکانس کار (MHz)	
		تغییرات 2% پارامتر $\delta$ و $d$	تغییرات 10% پارامتر $\delta$ و $d$
N=2	میانگین	501,3505	505,02463
	انحراف معیار	9,6243	51,605195
N=3	میانگین	501,29858	505,4778
	انحراف معیار	9,63087	49,9328
N=4	میانگین	501,3643	505,290
	انحراف معیار	9,6367	49,966

برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای  $d$  و  $\delta$ ، در صد فرکانس‌های که در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز قرار دارند در جدول 2 آورده شده است.

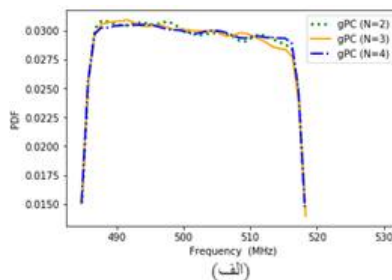
جدول 2. درصد فرکانس‌های موجود در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز برای تغییرات 2% و 10% پارامترهای کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800.

درصد فرکانس‌های موجود در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز
--

برای بررسی اینکه هر یک از پارامترهای  $a$  و  $b$  چه میزان در فرکانس تشدید اثر دارند شاخص سائیل محاسبه می‌شود. شاخص سائیل مرتبه اول برای پارامتر  $a, S_a$ ، برابر  $1,005716 \times 10^{-2}$  و برای پارامتر  $b, S_b$ ، برابر  $0,98993795$  است. همچنین، شاخص سائیل مرتبه دوم برای پارامترهای  $a$  و  $b, S_{a,b}$ ، برابر  $4,9 \times 10^{-6}$  است. بزرگتر بودن  $S_b$  از  $S_a$  نشان می‌دهد، اثر تغییرات پارامتر  $b$  بیشتر از اثر تغییرات پارامتر  $a$  بر فرکانس تشدید است.

### نتایج تغییرات ابعاد کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 بر فرکانس کار

برای ارزیابی تغییرات پارامتر  $d$  و  $\delta$  بر فرکانس کار کوپلر از روش gPC برای مرتبه‌های  $N=2, N=3$  و  $N=4$  استفاده می‌کنیم. به طور مثال، با در نظر گرفتن 2% تغییر در مقادیر این دو پارامتر،  $d$  در بازه  $[126,42\text{mm}, 131,58\text{mm}]$  و  $\delta$  در بازه  $[117,6\text{mm}, 122,4\text{mm}]$  تغییر می‌کنند. به همین ترتیب 10% تغییر در مقادیر این پارامترها را در نظر گرفتیم. در شکل 8، با در نظر گرفتن  $10^6$  نمونه تصادفی برای پارامترهای  $d$  و  $\delta$ ، PDF فرکانس کار را برای تغییرات 2% و 10% به دست آوردیم.



GPC برای 2٪ کمتر از 10٪ است. با استفاده از نتایج به‌دست آمده، می‌توان گفت 2٪ خطا در ساخت کوپلر کوکسیال به موجب WG1800 مجاز خواهد بود. در جدول 3، شاخص سائیل مرتبه اول برای پارامتر  $S_d$ ،  $S_{d,delta}$ ، شاخص سائیل مرتبه اول برای پارامتر  $delta$ ،  $S_{d,delta}$ ، و شاخص سائیل مرتبه دوم برای پارامترهای  $d$  و  $delta$ ، به‌ازای تغییرات 2٪ و 10٪ نشان داده شده است.

جدول 3. شاخص سائیل مرتبه اول و دوم برای پارامتر  $d$  و  $delta$  به‌ازای تغییرات 2٪ و 10٪ پارامترهای کوپلر کوکسیال به موجب WG1800.

	شاخص سائیل	N = 2	N = 3	N = 4
تغییرات 2٪ پارامتر $d$ و $delta$	$S_{delta}$	92,604463	92,591182	92,652996
	$S_d$	7,395427	7,408077	7,345954
	$S_{d,delta}$	$11 \times 10^{-4}$	$74 \times 10^{-4}$	$105 \times 10^{-3}$
تغییرات 10٪ پارامتر $d$ و $delta$	$S_{delta}$	94,862319	94,785984	95,113353
	$S_d$	5,035444	5,038758	4,702459
	$S_{d,delta}$	0,1	0,175	0,184

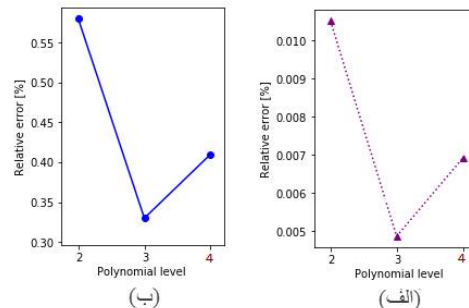
با توجه به جدول 3 برای تغییرات 2٪ و 10٪،  $S_{delta}$  بزرگتر از  $S_d$  است که نشان می‌دهد اثر تغییرات پارامتر  $delta$  بیشتر از پارامتر  $d$  بر فرکانس کار است.

### نتیجه‌گیری

روش gPC بر پایه بسط چند جمله‌ای‌های متعامد است. با استفاده از این روش، می‌توان اثر خطا در پارامترهای هندسه مدل را بر خروجی مورد مطالعه، بررسی کرد. اگر چه زمان اجرای این روش نسبت به روش مونت‌کارلو کمتر است ولی با افزایش پارامترهای دارای خطا در مدل، زمان اجرای این روش

روش GPC در مرتبه بسط	تغییرات 2٪ پارامتر $d$ و $delta$	تغییرات 10٪ پارامتر $d$ و $delta$
N = 2	87	16,2
N = 3	86,95	16
N = 4	87,05	16,35

با در نظر گرفتن تغییرات 2٪ برای پارامترهای  $d$  و  $delta$ ، حدود 87 درصد فرکانس کار در باند فرکانسی 487 تا 516 مگاهرتز قرار دارند. برای تغییرات 10٪ پارامترهای  $d$  و  $delta$  حدود 16 درصد فرکانس کار در این باند فرکانسی قرار دارند. در شکل 9، نمودار درصد خطای نسبی تغییرات فرکانس کار با استفاده از روش gPC برحسب مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات 2٪ و 10٪ پارامترهای  $d$  و  $delta$  نشان داده شده است.



شکل 9. نمودار درصد خطای نسبی فرکانس کار کوپلر کوکسیال به موجب WG1800 برحسب مرتبه‌های مختلف بسط برای تغییرات الف) 2٪، ب) 10٪.

با توجه به جدول 1 برای 2٪ تغییرات، مقدار میانگین فرکانس کار تقریباً 501 MHz است که به‌مقدار اولیه فرکانس کار (500 MHz) نزدیک‌تر است. با توجه به شکل 9، برای تغییرات 2٪، مینیمم مقدار خطای نسبی (مرتبه بسط = 3) برابر  $5 \times 10^{-3}$  است. در حالی که، برای تغییرات 10٪، مینیمم مقدار خطای نسبی (مرتبه بسط = 3) برابر  $3,3 \times 10^{-1}$  است، پس خطای روش

برای اثبات خطای ضرایب، تابع تک متغیره ( $M=1$ ) در نظر گرفته شده است که خطای آن با استفاده از رابطه 9 به صورت زیر به دست می آید.

$$Error = E \left[ \frac{\left| \sum_{\alpha \in Z(1,N+1)} c_{\alpha}^{(N+1)} P_{\alpha}(\xi_1) - \sum_{\alpha \in Z(1,N)} c_{\alpha}^{(N)} P_{\alpha}(\xi_1) \right|}{\left| \sum_{\alpha \in Z(1,N+1)} c_{\alpha}^{(N+1)} P_{\alpha}(\xi_1) \right|} \right],$$

که  $c_{\alpha}^{(N+1)}$  ضرایب بسط به ازای مرتبه  $N+1$  و  $c_{\alpha}^{(N)}$  ضرایب بسط به ازای مرتبه  $N$  هستند. با محاسبه سیگما و فاکتورگیری از چند جمله‌ای‌های لژاندر رابطه زیر حاصل می شود.

$$Error = E \left[ \frac{\left| (c_0^{(N+1)} - c_0^{(N)}) P_0(\xi_1) + \dots + (c_N^{(N+1)} - c_N^{(N)}) P_N(\xi_1) \right|}{\left| P_N(\xi_1) + c_{N+1}^{(N+1)} P_{N+1}(\xi_1) \right|} \right],$$

صورت و مخرج کسر به توان دو رسیده و از آن جذر گرفته می شود.

$$Error = E \left[ \frac{\sqrt{\left| (c_0^{(N+1)} - c_0^{(N)}) P_0(\xi_1) + \dots + (c_N^{(N+1)} - c_N^{(N)}) P_N(\xi_1) \right|^2}}{\sqrt{\left| P_N(\xi_1) + c_{N+1}^{(N+1)} P_{N+1}(\xi_1) \right|^2}} \right],$$

با حل توان دو صورت و مخرج کسر توسط اتحاد مربع چند جمله‌ای و تعریف حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های متعامد  $P_{\alpha}(\xi_1) P_{\beta}(\xi_1) = 0$  و  $P_{\alpha}^2(\xi_1) = 1$  رابطه خطا به صورت زیر ساده می شود.

هم افزایش می یابد. با استفاده از شاخص سابل، پارامترهایی که خطای آنها در خروجی مورد نظر اثر بیشتری دارند را می توان تعیین کرد. روش gPC، برای مطالعه فرکانس تشدید در کاواک WR187 و فرکانس کار در کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به کار برده شد. در این مطالعه، برای کاواک WR187، تغییرات 0.1 cm پارامترهای  $a$  و  $b$  در نظر گرفته شد. با مقایسه PDF های فرکانس تشدید به دست آمده از روش های gPC، تئوری و مونت کارلو، دقت روش gPC نشان داده شد. همچنین، پارامترهای هندسه ساختار کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 به عنوان متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت با تغییرات 2٪ و 10٪ در نظر گرفته شد. با در نظر گرفتن تغییرات 2٪ برای پارامترهای ورودی این ساختار، حدود 87٪ فرکانس کار در باند فرکانسی مجاز قرار می گیرند ولی برای تغییرات 10٪ پارامترهای ورودی، حدود 16٪ فرکانس کار در باند فرکانسی مجاز قرار دارند. نشان داده شد، میانگین فرکانس کار PDF بدست آمده برای تغییرات 2٪ به مقدار اولیه فرکانس کار (500MHz) نزدیک تر است، همچنین خطای روش gPC برای تغییرات 2٪ کمتر از تغییرات 10٪ است. لذا به نظر می رسد، در ساخت کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 خطای 2٪ در ابعاد ساختار می تواند مجاز باشد. با محاسبه شاخص سابل پارامترهای  $d$  و  $\delta$  برای این کوپلر، مشخص شد که در محاسبه فرکانس کار پارامتر  $\delta$  بیشترین تأثیر را دارد. نتایج این مقاله در ساخت کوپلر کواکسیال به موجبر WG1800 می تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

پیوست الف)

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} + \sum_{\alpha \in \chi(1,3)} c_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}(\xi_1) + \sum_{\alpha \in \chi(1,3)} c_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}(\xi_2) + \sum_{\alpha \in \chi(2,3)} c_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}(\xi_1, \xi_2)$$

در اینجا، اگر چند جمله‌ای پایه لژاندر تک متغیره را با  $\mathbf{P}_{\alpha}(\xi_i)$  و چند جمله‌ای پایه لژاندر دو متغیره را با  $\mathbf{P}_{\alpha}(\xi_i, \xi_j)$  نمایش دهیم آنگاه رابطه بالا به صورت زیر ساده می‌شود.

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{\alpha \in \chi(1,3)} c_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}(\xi_i) + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{M=2} \sum_{\alpha \in \chi(2,3)} c_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}(\xi_i, \xi_j)$$

### مرجع‌ها

[1] P. Mattia, C.M. Sergio, G.M. Dimitrov, Comparative Analysis of Uncertainty Propagation Methods for Robust Engineering Design, *Guidelines for a Decision Support Method Adapted to NPD Processes* (2007).

<https://designsociety.org/publication/25352>

[2] J. Heller, U. Van Rienen, T. Flisgen, C. Schmidt, Uncertainty Quantification for Complex RF-structures Using the State-space Concatenation Approach, *Progress In Electromagnetics Research Proceedings, Prague, Czech Republic* (2015) 374-378.

<https://cds.cern.ch/record/2132775>

[3] C. Schmidt, T. Flisgen, J. Heller, U. van Rienen, Comparison of techniques for uncertainty quantification of superconducting radio frequency cavities, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications* (2014) 117-120.

<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6903838>

[4] J. Heller, T. Flisgen, C. Schmidt, U. van Rienen, Quantification of geometric

$$Error = \frac{\sqrt{|c_0^{(N+1)} - c_0^{(N)}|^2 + \dots + |c_N^{(N+1)} - c_N^{(N)}|^2 + |c_{N+1}^{(N+1)}|^2}}{\sqrt{|c_0^{(N+1)}|^2 + \dots + |c_N^{(N+1)}|^2 + |c_{N+1}^{(N+1)}|^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N+1} |c_i^{(N+1)} - c_i^{(N)}|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N+1} |c_i^{(N+1)}|^2}}$$

که  $c_{N+1}^{(N)}$  برابر صفر است. با توجه به تعریف نرم مرتبه

دوم ( $\|\vec{C}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^N |c_i|^2}$ ) رابطه زیر برای خطای ضرایب برقرار است.

$$Error = \frac{\|\vec{C}^{(N+1)} - \vec{C}^{(N)}\|}{\|\vec{C}^{(N+1)}\|}$$

### پیوست ب

در رابطه 11، اگر چند جمله‌ای پایه لژاندر چند متغیره را به صورت حاصل ضرب چند جمله‌ای‌های لژاندر تک متغیره بنویسیم، خواهیم داشت.

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} P_0(\xi_1) P_0(\xi_2) + c_{0,1} P_0(\xi_1) P_1(\xi_2) + c_{0,2} P_0(\xi_1) P_2(\xi_2) + c_{0,3} P_0(\xi_1) P_3(\xi_2) + c_{1,0} P_1(\xi_1) P_0(\xi_2) + c_{1,1} P_1(\xi_1) P_1(\xi_2) + c_{1,2} P_1(\xi_1) P_2(\xi_2) + c_{2,0} P_2(\xi_1) P_0(\xi_2) + c_{2,1} P_2(\xi_1) P_1(\xi_2) + c_{3,0} P_3(\xi_1) P_0(\xi_2)$$

در اینجا  $P_0(\xi_1) = P_0(\xi_2) = 1$  است. بنابراین، می‌توان نوشت.

$$f(\vec{\xi}) = c_{0,0} + [c_{1,0} P_1(\xi_1) + c_{2,0} P_2(\xi_1) + c_{3,0} P_3(\xi_1)] + [c_{0,1} P_1(\xi_2) + c_{0,2} P_2(\xi_2) + c_{0,3} P_3(\xi_2)] + c_{1,1} P_1(\xi_1) P_1(\xi_2) + c_{1,2} P_1(\xi_1) P_2(\xi_2) + c_{2,1} P_2(\xi_1) P_1(\xi_2)$$

با استفاده از رابطه 2، رابطه بالا به صورت زیر به دست می‌آید.

- [11] M.S. Eldred, C.G. Webster, P.G. Constantine, Evaluation of Non-Intrusive Approaches for Wiener-Askey Generalized Polynomial Chaos, *Proceedings of the 10th AIAA nondeterministic approaches conference* (2008) 1892-1914.  
<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2008-1892>
- [12] J. Waldvogel, Fast construction of the Fejer and Clenshaw–Curtis quadrature rules, *BIT Numerical Mathematics* **46** 1 (2006) 195-202.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10543-006-0045-4>
- [13] S.H. Lee, W. Chen, A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box type functions, *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers* (2007) 1275-1284.  
<https://asmedigitalcollection.asme.org/IDE/TC-CIE/proceedings-abstract/IDETC-CIE2007/48078/1275/330248>
- [14] F. Jamshidi, M. Falah, Z. Khani, M. Keshavarz, Density estimation for statistics and data, *Statistics Research Institute, Statistical Centre of Iran* (2005).  
<http://www.srtc.ac.ir/Archives-of-research-projects/ID/1697>
- [15] F. Nobile, R. Tempone, C.G. Webster, An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **46** 5 (2008) 2411-2442.  
<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/070680540>
- [16] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, S. Tarantola, Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total uncertainties in single cell cavities for BESSY VSR using polynomial chaos, *In 5<sup>th</sup> International Particle Accelerator Conference, Dresden, Germany* (2014) pp.415.  
<https://cds.cern.ch/record/1748644>
- [5] D.M. Pozar, *Microwave engineering*, John Wiley & Sons (2009).
- [6] M. Mostajeran, F. Kazemi. The resonant frequencies of the rectangular waveguide cavity resonator WR-187 using CST software and MATLAB program interface, *3rd National Conference on Particle Accelerators and their applications*, (2017) 246-249.  
<http://psi.ir/farsi.asp?page=iranpac2017>
- [7] F. Naito, K. Akai, N. Akasaka, E. Ezura, T. Kageyama, T. Shintake, Y. Takeuchi and Y. Yamazaki, Input coupler for the KEKB normal conducting cavity, *Proceedings Particle Accelerator Conference 3 IEEE*, (1995) 1806-1808.  
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/505368>
- [8] M. Mostajeran, F. Kazemi. Optimization of a high-power coaxial coupler to 1800 waveguide coupler with high input power using CST simulator controlled by MATLAB., *Iranian Journal of Physics Research*, **17** 5, (2018)795-804.  
[https://ijpr.iut.ac.ir/article\\_1322.html](https://ijpr.iut.ac.ir/article_1322.html)
- [9] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic Finite Element Method: Response Statistics, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer, New York, (1991) 101-119.  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3094-6\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3094-6_4)
- [10] J. Feinberg, Some improvements and applications of non-intrusive polynomial chaos expansions, *PhD Thesis*, University of Oslo (2015).  
<https://duo.uio.no/handle/10852/48588>



sensitivity index, *Computer Physics Communications* **181** 2 (2010) 259-270.

<https://sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465509003087>

[17] S. Tennøe, G. Halnes, G.T. Einevoll, Uncertainty: A Python toolbox for uncertainty quantification and sensitivity analysis in computational neuroscience, *Frontiers in neuroinformatics* **12** (2018) 49.

<https://frontiersin.org/articles/10.3389/fninf.2018.00049/full>

[18] K. Sargsyan, C. Safta, K. Chowdhary, S. Castorena, S. De Bord, B. Debusschere, UQTK version 3.0.4 user manual, *Sandia National Laboratories, Sandia report*, (2017) 11051.

<https://usermanual.wiki/Pdf/UQTKv304manual.25208448>

[19] I.M. Sobol, Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates, *Mathematics and computers in simulation* **55** 1-3 (2001) 271-280.

<https://sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378475400002706>