

EXTENDED ABSTRACT

## Assessment of Time Integration Methods in the Numerical Solution of Two-Dimensional Shallow Water Equations

M. Asadi<sup>1</sup>, M. Mazaheri<sup>2\*</sup> and J. Mohamad Vali Samani<sup>3</sup>

- 1- Student of Department of Hydro-Structure, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University of Tehran.
- 2\*- Corresponding Author, Assistant Professor of Department of Hydro-Structure, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University of Tehran, Iran (*m.mazaheri@modares.ac.ir*).
- 3- Full Professor of Department of Hydro-Structure, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University of Tehran.

Received: 2 May 2018

Revised: 28 January 2019

Accepted: 2 February 2019

**Keywords:** 2D shallow water equations, Different time integration methods, Runge-Kutta third order method, Strang operator splitting method.

**DOI:** 10.22055/jise.2019.25785.1765.

### Introduction and objectives

The 2D shallow water equations are used in flow simulation of rivers, floodplains, coastal currents, etc. In the research, updating or the so-called numerical integration of temporal terms of two-dimensional equations using first-order methods is more stable but less accurate. In contrast, high-order accuracy methods have numerical stability problems and cause divergence (Brouwer et al., 2014). For this reason, second-order accurate methods with median properties are widely used. Despite much research on how to deal with spatial terms, according to a review by the authors, there is less research on how to deal with the temporal terms of equations. In addition, studies on time integration methods are limited to solving 1D problems. In this research, two different time integration methods of Runge-Kutta third order (RK-3 method) and Strang splitting operator method (Strang method), which have a second-order of accuracy and are commonly used in various research (Huang et al., 2013), have been investigated. Therefore, two models have been obtained in which the applied time integration methods are different, but the ways adopted to deal with spatial and sources terms of equations are same. Then, 1D and 2D reference problems are implemented using these two models and their results are presented in order to recognize the appropriate time integration method for solving 2D shallow water equations.

### Methodology

By solving the governing equations, the main characteristics of the flow, such as velocity and depth, would be obtained. In general, 2D Shallow water equations have no analytical solution; therefore, they should be solved using numerical methods which discretize the terms of equations. Based on the aims of this study, to compare the performance of the different time integration methods employed for solving shallow water equations discretization of temporal terms is done using two common methods, including the Strang operator splitting method (Strang method) and the Runge-Kutta third order method (RK-3 method). In the Strang method, the main equation is divided into two initial value subproblems; then the first subproblem is solved for a half-step of time; and finally, obtained results

are used as the initial conditions of the second subproblem to update the equations for a complete step. In the RK-3 method, the MUSCL method is used to reconstruct flow variables in each face of cells of the computational domain. In order to contribute to the convergence of the model, the friction source term is applied in a separate step. These two methods give a second order of accuracy and are repeatedly used by the researchers. After discretization of the governing equations, two models with different time integration methods were obtained. To examine them, 1D and 2D reference problems are implemented using both models.

### Findings

Reference problems include a 1D dam breakdown with experimental data and a 2D problem of oscillation water body in a parabolic domain with an analytical solution. The dam break test has carried out in a laboratory flume (Fig. 1). This test was implemented with both models and its simulation results have been obtained. The flow fluctuates in the flume shortly after the dam break. In order to have a proper judgment of the performance of the two models, water depths at specific locations where the depth laboratory data are available were extracted from both models (Fig. 2).

At the beginning, since the fluctuation of the flow is more intense, only the results of the RK-3 method are closer to experimental data. Over time, however, with less fluctuations, the results of both models are close to the experimental data.

The ideal 2D problem used in this research, which has an analytical solution given by Thacker (1981), is one of the important references for validating and evaluating the performance of 2D models (Delestre et al., 2011). In this test, water body never reaches the boundaries and the circle shape of water boundary must remain constant during the oscillations. In the figure (Fig. 3), the shoreline circle and depth contours are shown in the Strang method after four frequencies.

According to the results, the flow is correctly simulated by both models. The consistency of the simulation results with the analytical solution adequately demonstrates the capability of the models in the implementation of 2D shallow water problems. Although both models have satisfactory results, the statistical parameters were used to compare the performance of models with each other. The low errors in successive repetitions well describe the proper arrangement of methods used in both models for time integration and dealing with spatial and source terms. Nevertheless, the depth mean absolute error in the RK-3 method is incremental through time.

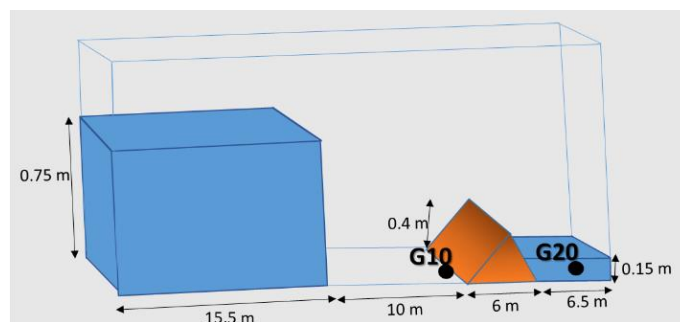


Fig. 1- The experimental setup of the 1D dam break test.

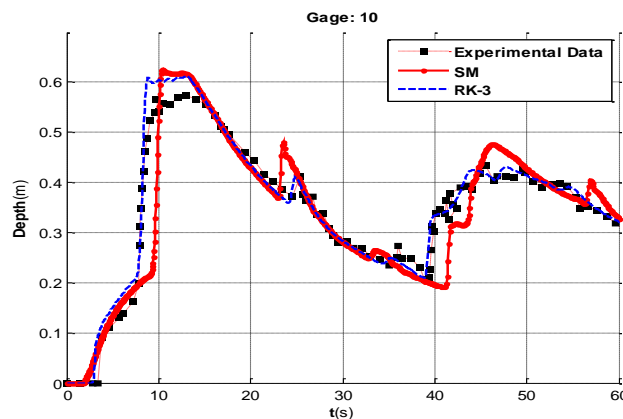


Fig. 2- Water depths obtained from two models and laboratory data at the point G10.

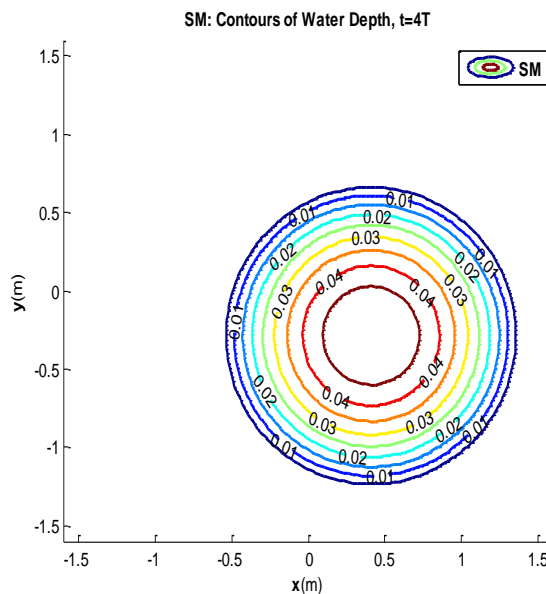


Fig. 3- Shoreline and water depth contours status for Strang method at  $t = 4T$ .

### Conclusions

In this study, in order to compare two common time integration methods, including RK-3 and Strang method, two models were implemented and used to simulate 1D and 2D flow problems. In the 1D dam break problem, which is an actual experimental test case, both models provide satisfactory results. However, at the beginning of the simulation when flow is completely fluctuating, the RK-3 method has a higher accuracy. But over time, by decreasing fluctuating, both models have identical results which are close to experimental data. In the 2D oscillation problem with an analytical solution, water boundary remains circular in different frequencies, which refers to the capability of both models to simulate 2D problems and indicates an appropriate arrangement of methods used to deal with spatial and sources terms in both models.

However, the absolute mean error in the RK-3 method increases with increasing number of oscillations. This can be due to the existence of various computational stages in the RK-3 method so that by simulation 2D problems there is a slight error that is cumulative in the various stages of this

method. However, in the Strang method, the absolute mean error is uniform and does not increase through the time.

### Acknowledgment

The authors thank Tarbiat Modares University and its Vice-Chancellor's Office for Research for providing facilities and funding the research costs.

### References

- 1- Brouwer, J., Reiss, J. and Sesterhenn, J. 2014. Conservative time integrators of arbitrary order for skew-symmetric finite-difference discretizations of compressible flow. *Computers & Fluids* 100, 1-12.
- 2- Huang, Y., Zhang, N. and Pei, Y. 2013. Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 7, 40-54.



© 2020 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



## بررسی روش‌های انتگرال‌گیری زمانی در حل عددی معادله‌های دوبعدی آب‌های کم‌عمق

مراد اسدی<sup>۱</sup>، مهدی مظاهری<sup>۲\*</sup> و جمال محمدولی سامانی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری گروه سازه‌های آبی دانشگاه تربیت مدرس.

۲- نویسنده مسؤل، استادیار گروه سازه‌های آبی دانشگاه تربیت مدرس m.mazaheri@modares.ac.ir

۳- استاد گروه سازه‌های آبی دانشگاه تربیت مدرس.

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۳

بازنگری: ۱۳۹۷/۱۱/۸

دریافت: ۱۳۹۷/۲/۱۲

### چکیده

حل عددی معادله‌های دوبعدی جریان نیازمند گسسته سازی ترم‌های مکانی و زمانی است و با انتگرال‌گیری عددی از ترم‌های زمانی، به‌روزرسانی معادله‌ها انجام می‌شود. در راستای افزایش دقت و پایداری حل، بیش‌تر از روش‌های با دقت مرتبه دو برای انتگرال‌گیری زمانی ترم‌های معادله‌ها استفاده می‌شود. در این مطالعه دو روش متداول در انتگرال‌گیری زمانی شامل روش Runge-Kutta مرتبه ۳ و روش تجزیه عملگر Strang، که دارای دقت مرتبه دو هستند موردبررسی قرار گرفته‌اند. برای داشتن قضاوتی صحیح از عملکرد این دو روش نسبت به هم، شیوه‌های عددی کاملاً یکسانی در برخورد با ترم‌های مکانی و ترم منبع‌های معادله به‌کار گرفته شد. سپس با استفاده از دو مدل به‌دست‌آمده که تنها روش برخورد با ترم‌های زمانی در آن‌ها متفاوت است، مسائل یک‌بعدی و دوبعدی دارای نتایج آزمایشگاهی یا حل تحلیلی اجرا شد. نتایج نشان می‌دهد که در مسائل یک‌بعدی با نوسان زیاد، روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ در ابتدا خطای کم‌تری داشته، اما با کاهش میزان نوسان، هر دو روش به دقت مشابهی خواهند رسید. در مسائل دوبعدی، پارامتر خطا در روش Strang برای تکرارهای مختلف روند یکنواختی خواهد داشت. اما مقدار خطای روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ کم است که با تکرار محاسبات اندکی افزایش می‌یابد. با این‌وجود هر دو مدل، مسائل جریان یک و دوبعدی را به‌درستی مدل‌سازی کرده که به‌خوبی بیانگر چینش صحیح روش‌های به‌کاررفته در آن‌ها در برخورد با ترم‌های مکانی، زمانی و ترم منبع‌ها است.

**کلید واژه‌ها:** معادله‌های دوبعدی آب‌های کم‌عمق، روش‌های انتگرال‌گیری زمانی متفاوت، روش Runge-Kutta مرتبه ۳، روش تجزیه عملگر Strang.

(al., 2001). در راستای افزایش دقت محاسبات، روش‌های متفاوتی برای گسسته کردن ترم‌های مکانی و زمانی به‌کاررفته است (De Lemos, 2012). لذا نیاز است از روش‌های با مراتب دقت بالاتر جهت گسسته کردن ترم‌های معادله‌ها استفاده نمود، اما استفاده از هر مرتبه‌ی دقت میسر نیست. زیرا روش‌های با مراتب دقت بالا در مجاورت گرادیان‌های موجود در مسئله نوسانات کاذب تولید کرده که به واگرایی مدل می‌انجامد (Brouwer et al., 2014). به همین دلیل در تحقیقات صورت گرفته غالباً روش‌های با دقت مرتبه‌ی یک یا دو استفاده می‌شود (Ahmed and John, 2015). با این‌وجود به دلیل دقت پایین روش‌های مرتبه اول، تمرکز بر روش‌های با دقت مرتبه دو بیشتر است به طوری که در بسیاری از تحقیقات صورت گرفته، گسسته‌سازی ترم‌های زمانی با بهره‌گیری از روش‌های با دقت مرتبه دو انجام شده است (Delis et al., 2011). می‌توان به روش‌های Adams-Bashforth، Crank-Nicolson، یا روش‌های Runge-Kutta و Hermite-Birkhoff که به صورت صریح به‌کاررفته و در آن‌ها سعی شده تا با کنترل طول گام‌های

### مقدمه

معادله‌های حاکم بر جریان آب‌های کم‌عمق دوبعدی، از نوع معادله‌های دیفرانسیل هذلولوی بوده (Toro, 2001) که در بررسی جریان در رودخانه، سیلاب‌دشت، سواحل و... به کار می‌روند (Amiri et al., 2012). این معادله‌ها خصوصیات جریان را در یک دامنه محاسباتی نسبت به زمان ارائه می‌دهند. لازم است تا عوامل تأثیرگذار بر مسئله تعیین و معادله‌ها به‌صورت عددی حل شوند. حل عددی معادله‌ها نیازمند گسسته سازی ترم‌های معادله بوده که با آزمون‌های صورت گرفته برتری روش‌های حجم محدود در گسسته کردن ترم‌های مکانی نشان داده شده است (Huang et al., 2013). پس از گسسته‌سازی می‌بایستی معادله‌ها برای گام زمانی بعدی محاسبه یا اصطلاحاً به‌روزرسانی شده که این کار با انتگرال‌گیری عددی ترم‌های زمانی صورت می‌گیرد (Nguyen-Ba et al., 2011). برای به‌روزرسانی مقادیر متغیرها می‌توان از روش اولری استفاده کرد که یک روش عددی پایدار با دقت مرتبه یک است (Gottlieb et

## مواد و روش ها

## گسسته کردن معادله ها

با حل کردن معادله های حاکم بر جریان سیالات می توان ویژگی های اصلی جریان مانند سرعت و عمق را در دامنه حل و نسبت به زمان به دست آورد. صورت کلی معادله های حاکم دوبعدی به صورت ذیل است.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial(x)} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial(y)} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (1)$$

که در آن  $\mathbf{U}$  بردار متغیرهای پایسته شامل مقادیر عمق و سرعت است.  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{G}$  نیز بردارهای شار هستند. بردار  $\mathbf{S}$  بیانگر ترم منبع های هندسی و اصطکاک است. اعمال ترم منبع عملاً شبیه سازی شرایط واقعی را امکان پذیر می کند (Zhou et al., 2001). معادله (۱) در حالت کلی فاقد حل تحلیلی است.

فرم ماتریسی معادله برداری فوق به صورت ذیل است:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hvu \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ hvu \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghs_{fx} \\ -ghs_{fy} \end{bmatrix}$$

در معادله (۲)،  $h$  عمق آب،  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت در راستای  $x$  و  $y$ ،  $g$  شتاب گرانش و  $Z_b$  رقوم بستر صلب است. برای گسسته کردن دامنه از مش بندی مستطیلی با ابعاد  $\Delta x \times \Delta y$  استفاده شده، همچنین شیب افت های  $S_{fx}$  و  $S_{fy}$  را می توان به کمک روابط نیمه تجربی نظیر مانینگ بیان کرد که با توجه به ضریب زبری مانینگ،  $n$ ، به صورت ذیل بیان می شوند:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{4h^3}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{4h^3} \quad (3)$$

زمانی پایداری مدل حفظ شود اشاره نمود (Nguyen-Ba et al., 2011).

برای مقایسه روش های انتگرال گیری زمانی، در تحقیق صورت گرفته توسط (2003) De Boer دو روش RK (Runge-Kutta) و (Collocated Coupled Solution Method) CCSM با اجرای مسائل یک بعدی بررسی شده که نتایج به دست آمده عملکرد بهتر روش RK را در مسائل دارای ناپیوستگی نشان می دهد. در تحقیق وی گسسته سازی ترم های انتقال در هر دو روش یک سان نبوده که همین امر تصمیم گیری قطعی در مورد روش انتگرال گیری زمانی برتر را سخت می کند. در تحقیقات (2014) Weill et al.، کارایی بهتر روش هایی که ترم های زمانی را به صورت غیرخطی گسسته می کنند نسبت به روش های کلاسیک مشخص شده اما از ترم اینرسی در معادله های یک بعدی آب های کم عمق صرف نظر شده است. اگرچه تحقیقاتی به منظور مقایسه روش های دارای دقت مرتبه دو توسط (2013) Ray and Saiduzzaman انجام شده اما مقایسه عملکرد این روش ها تنها با اجرای مسائل یک بعدی صورت گرفته است.

با توجه به اهمیت حفظ محدوده فیزیکی متغیرها، روش گسسته سازی رانگ کوتا محبوبیت بسیاری یافته است (Ketcheson et al., 2009). این روش دارای نسخه های متفاوتی بوده که دو نسخه رانگ کوتا مرتبه ۳ و مرتبه ۴ (RK-3 و RK-4) به گونه ای اصلاح شده اند که در مقابل نوسانات کاذب مقاوم باشند. در تحقیقات نیز روش های رانگ کوتا اصلاح شده برای به روزرسانی ترم های زمانی معادله ها به کار رفته و دقت مرتبه دو را به دست می دهند (Huang et al., 2013). یکی دیگر از شیوه های سراسر با به کار گرفته شده برای رسیدن به دقت مرتبه دو، به روزرسانی مقادیر متغیرها تا نیم گام زمانی سپس به کارگیری این مقادیر در محاسبات یک گام کامل، نظیر روش تجزیه عملگر Strang، است (Aureli et al., 2008). این روش ترم های زمانی معادله ها را به صورت غیرخطی گسسته می کند و همانند روش رانگ کوتا مرتبه ۳ یکی از روش های متداول در انتگرال گیری از ترم های زمانی معادله های دوبعدی آب های کم عمق است.

در تحقیق حاضر عملکرد دو روش رانگ کوتا مرتبه ۳ و Strang بررسی شده است. اما در ابتدا ترکیب جدیدی از روش های عددی مورد استفاده در انتگرال گیری مکانی با روش انتگرال گیری زمانی رانگ کوتا ارائه شد که نتایج به خوبی عملکرد این ترکیب از روش های عددی را نشان می دهد. سپس جهت مقایسه دو مدل گسسته سازی ترم های معادله های دو بعدی آب های کم عمق انجام گرفته، با این تفاوت که روش های انتگرال گیری زمانی به کار رفته در دو مدل مورد بررسی متفاوت است. در ادامه مسائل یک بعدی و دوبعدی مرجع با استفاده از دو مدل اجرا گردید که نتایج حاصل از اجرای آن ها در بخش ۳ و جمع بندی نتایج در بخش ۴ ارائه شده است.

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2,j}^{R,n}) \right] - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j+\frac{1}{2}}^{L,n}) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j-\frac{1}{2}}^{R,n}) \right] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_{0,i,j}^n$$

برای وجه سمت راست مرز سلول نیز همین روند استفاده می‌شود. در این معادله برای محاسبه‌ی بردار  $\mathbf{S}_{0,i,j}^n$  از معادله‌ی (۷) استفاده می‌شود که با استفاده از مقادیر تعمیم‌یافته به وجوه سلول در زمان  $n$  و برای سلول  $I_{i,j}$  به دست می‌آید:

$$\mathbf{S}_{0,i,j}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \frac{h_{i+1/2,j}^L + h_{i-1/2,j}^R}{2} \frac{z_{b,i+1/2,j} - z_{b,i-1/2,j}}{\Delta x} \\ -g \frac{h_{i,j+\frac{1}{2}}^L + h_{i,j-\frac{1}{2}}^R}{2} \frac{z_{b,i,j+\frac{1}{2}} - z_{b,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \end{bmatrix} \quad (۷)$$

با فرض تغییرات خطی در شیب بستر، مقادیر رقوم بستر نیز در مرز سلول به صورت مرکزگرا قابل تعیین هستند:

$$z_{b,i+1/2,j} = \frac{z_{b,i+1,j} + z_{b,i,j}}{2}, \quad z_{b,i-1/2,j} = \frac{z_{b,i,j} + z_{b,i-1,j}}{2} \quad (۸)$$

$$z_{b,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{b,i,j+1} + z_{b,i,j}}{2}, \quad z_{b,i,j-\frac{1}{2}} = \frac{z_{b,i,j} + z_{b,i,j-1}}{2}$$

گام سوم: برای محاسبه‌ی شارهای عددی  $F$  و  $G$  از روش Toro, ( FORCE (First ORder CEntred استفاده می‌شود ( Toro, 2009):

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FORCE} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^{LF}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{F}^{LW}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+\frac{1}{2}}) \right] \quad (۹)$$

روش به کاررفته برای گسسته کردن ترم‌های مکانی روش MUSCL (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) بوده که دارای دقت مرتبه دو در مکان است و مقادیر متغیرهای ارائه‌شده در مرکز سلول‌ها را به وجوه سلول تعمیم می‌دهد (Toro, 2009). لذا برای وجه چپ مرز  $(i + \frac{1}{2}, j)$  سلول نشان داده شده در شکل (۱)، مقدار متغیرهای پایستار از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n}{\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n} \right) (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) \quad (۴)$$

و در وجه راست مرز  $(i - \frac{1}{2}, j)$ :

$$\mathbf{U}_{i-1/2,j}^R = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n}{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n} \right) (\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n) \quad (۵)$$

در این معادله  $\Phi$  تابع برداری محدودکننده‌ی شیب است.

### گسسته‌سازی ترم‌های زمانی

#### روش انتگرال گیری زمانی تجزیه عملگر Strang

در روش تجزیه‌ی عملگر Strang مسئله اصلی به دو زیر مسئله‌ی مقدار اولیه تجزیه شده که زیر مسئله‌ی اول شامل مشتقات مکانی و ترم منبع هندسی و زیر مسئله‌ی دوم یک معادله دیفرانسیل ساده شامل ترم منبع اصطکاکی است. مقادیر متغیرهای جریان در زیر مسئله‌ی اول برای نیم گام زمانی به دست آمده و نتایج آن در زیر مسئله‌ی دوم به عنوان شرط اولیه لحاظ شده تا معادله‌ها برای یک گام کامل حل شود. روش Strang طی چهار گام برای حل معادله‌های دوبعدی آب‌های کم عمق به کاررفته است ( Aureli et al., 2008).

گام اول: با استفاده از معادله‌های (۴) و (۵)، تمامی مقادیر از مرکز سلول  $I_{i,j}$  به وجوه آن تعمیم یافته است.

گام دوم: مطابق با معادله (۶) که برای وجه سمت چپ مرز سلول ارائه شده، مقادیر تعمیم یافته به وجوه سلول با اعمال ترم منبع هندسی به نیم گام زمانی ارتقا می‌یابد:

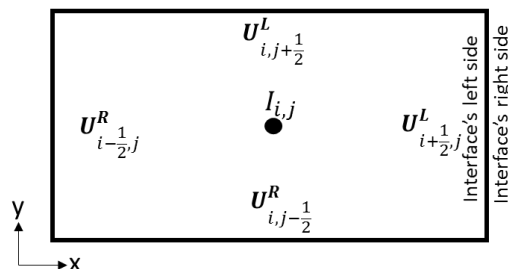


Fig. 1- Cell center and faces of  $(I_{i,j})$  cell

شکل ۱- مرکز، مرزها و وجوه سلول  $(I_{i,j})$

$$\mathbf{U}_{i,j}^* = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{FORCE} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{FORCE} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{FORCE} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{FORCE} \right) + \Delta t \mathbf{S}_{0,i,j}^{n+1/2} \quad (12)$$

ترم منبع  $\mathbf{S}_{0,i,j}^{n+1/2}$  نیز با استفاده از معادله (۷) قابل تعیین بوده اما برای محاسبه آن از مقادیر به دست آمده در نیم گام زمانی استفاده می شود. در ادامه مقادیر متغیرهای پایسته با دخالت دادن ترم منبع اصطکاکی  $\mathbf{S}_f(\mathbf{U}^*)$  به یک گام زمانی کامل ارتقا می یابد. وارد کردن ترم منبع اصطکاکی در یک مرحله جداگانه به پایداری بیش تر این روش کمک می کند (Caleffi et al., 2003).

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^* + \Delta t \mathbf{S}_f(\mathbf{U}_{i,j}^*) \quad (13)$$

### روش انتگرال گیری زمانی Runge-Kutta مرتبه ۳

روش اصلاح شده ی رانگ کوتا مرتبه ۳، RK-3، که توسط Mahdavi و Talebbeydokhti (2009) استفاده شده برای معادله ی (۱) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \frac{1}{3} k_0 + \frac{2}{3} k_2 + \frac{2}{3} k_3; \\ k_0 &= \mathbf{U}^n \\ k_1 &= k_0 + \Delta t \mathbf{L}(k_0) \\ k_2 &= \frac{3}{4} k_0 + \frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}(k_1) \\ k_3 &= \Delta t \mathbf{L}(k_2) \end{aligned} \quad (14)$$

تابع تعریف شده در معادله ی (۹) شار عددی را در وجه  $(i + \frac{1}{2}, j)$  به روش FORCE به دست می دهد که همین روند برای تابع شار  $G$  نیز استفاده می گردد. روش FORCE میانگینی از روش مرکزگرای لکس-فردریک، و روش دومرحله ای لکس-وندروف (ریچمایر) است که به صورت ذیل برای شارهای راستای  $x$  محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{LF}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+1/2}, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+1/2}) &= \\ \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+1/2}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+1/2}) \right] & \\ - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left( \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{R,n+1/2} - \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{L,n+1/2} \right) & \end{aligned} \quad (10)$$

9

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{LW}(\mathbf{F}_{i,j+1/2}^{L,n+1/2}, \mathbf{F}_{i,j+1/2}^{R,n+1/2}) &= \mathbf{F}(\mathbf{U}^{LW}); \\ \mathbf{U}^{LW} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_{i,j+1/2}^{R,n+1/2} + \mathbf{U}_{i,j+1/2}^{L,n+1/2} \right) \\ - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^{L,n+1/2}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^{R,n+1/2}) \right] & \end{aligned} \quad (11)$$

گام چهارم: پس از محاسبه ی مقادیر شارهای عددی در گام سوم، معادله (۱) بر اساس روش دو مرحله ای تجزیه عملگر Strang به دو قسمت، شامل معادله های (۱۲) و (۱۳) مجزا و گسسته سازی می شود.



در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی در محل عمق‌سنج‌های G10 و G20 در شکل (۳) نشان داده شده است. جریان در مدت کوتاهی پس از شکست سراسر فلوم را در برگرفته و نوسان می‌کند. برای داشتن قضاوت صحیحی از عملکرد دو مدل نتایج آن‌ها در محل عمق‌سنج G10 نسبت به داده‌های آزمایشگاهی با استفاده از پارامترهای آماری ارائه شده در معادله (۱۷) انجام شده مقایسه شده که در جدول (۱) آمده است.

همان‌طور که در شکل (۲) نیز مشخص است، محل عمق‌سنج G10 در ابتدا خشک بوده، اما در محل استقرار عمق‌سنج G20 مقداری آب ساکن قرار دارد.

با توجه به مقادیر جدول (۱) نتایج روش RK-3 هم‌خوانی بیش‌تر و خطای کم‌تری نسبت به روش Strang دارد. همچنین در نمودار ارائه شده برای اندازه‌گیر G20 در شکل (۳) می‌توان انطباق بیش‌تر نتایج روش رانگ کوتا مرتبه ۳ با داده‌های آزمایشگاهی را مشاهده کرد، البته این نتیجه‌گیری با توجه به مقدار کم‌تر پارامتر خطای MAE در روش رانگ کوتا مرتبه ۳ نسبت به روش Strang قابل استنباط است. اما نکته قابل توجه در بررسی دو مدل برای اجرای مسئله شکست سد این است که داده‌های آن برای مدت زمان ۶۰ ثانیه بررسی شده‌اند، در لحظات اولیه شکست سد که نوسانات جریان شدیدتر است، نتایج حاصل از روش RK-3 قرابت بیش‌تری با داده‌های آزمایشگاهی دارد. اما به‌مرور که شدت نوسانات کم‌تر شده و جریان آب کل بستر را می‌پوشاند، نتایج هر دو مدل به داده‌های آزمایشگاهی نزدیک‌تر می‌شود. این نوسانات و تغییرات سطح آب نسب به زمان در شکل (۴) نشان داده شده است.

پارامترهای آماری در هر دو مسئله یک و دوبعدی استفاده شده که به‌صورت ذیل محاسبه می‌شوند:

$$R^2 = \frac{[\sum (x - \bar{x})(x_{\text{exact}} - \bar{x}_{\text{exact}})]^2}{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (x_{\text{exact}} - \bar{x}_{\text{exact}})^2} \quad (17)$$

$$MAE = \frac{\sum |x - x_{\text{exact}}|}{N}$$

که در اینجا  $N$  تعداد داده‌های مسئله است.  $x$  متغیر حاصل از مدل و  $\bar{x}$  میانگین آن‌هاست. همچنین مقادیر دقیق (داده‌های آزمایشگاهی یا حل تحلیلی) متغیرها و  $\bar{x}_{\text{exact}}$  میانگین آن‌ها است. پارامتر  $R^2$  جذر مربعات خطا بوده و هم‌روندی داده‌ها را نشان می‌دهد. همچنین پارامتر (MAE)، میانگین خطای مطلق داده‌ها را نسبت به مقدار مرجع به دست می‌دهد.

در اینجا نیز در هر مرحله برای بازسازی مقادیر در وجوه سلول از روش MUSCL استفاده خواهد شد. همچنین تابع برداری  $L(U)$  برای یک سلول و بدون لحاظ کردن ترم منبع اصطکاکی به صورت ذیل خواهد بود:

$$\mathbf{L}(U_{i,j}) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{\text{FORCE}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{\text{FORCE}} \right] - \frac{1}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{\text{FORCE}} - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{\text{FORCE}} \right) + \Delta t \mathbf{S}_{0,i,j}^k \quad (15)$$

پس از تعیین  $U^*$  در معادله (۱۴)، برای تکمیل محاسبه همانند معادله (۱۵) در یک مرحله مجزا ترم منبع اصطکاکی اعمال می‌شود.

### تعیین گام‌های زمانی

دو روش انتگرال‌گیری زمانی مطرح شده به صورت صریح بوده، لذا طول گام‌های زمانی بایستی طوری محدود شود که شرایط لازم را برای پایداری و همگرایی مدل تضمین کند. این محدودیت توسط شرط CFL (Courant-Friderichs-Lewy) اعمال می‌شود تا گام زمانی مناسب برای محاسبات به دست آید (Aureli et al., 2008).

$$\Delta t = CFL \left[ \max \left( \frac{|u_{i,j}| + \sqrt{gh_{i,j}}}{\Delta x} + \frac{|v_{i,j}| + \sqrt{gh_{i,j}}}{\Delta y} \right) \right]^{-1} \quad (16)$$

در ادامه مسائل یک‌بعدی و دوبعدی که دارای جواب‌های مرجع می‌باشند با استفاده از هر دو روش و با اتخاذ شرایط کاملاً یک‌سان اجرا شده است.

### نتایج و بحث

#### مسئله یک‌بعدی: شکست سد (Concerted Action on Dam-break Modelling) CADAM

این مسئله مطابق شکل (۲) در یک فلوم آزمایشگاهی انجام شده است که بستر آن دارای ضریب مانینگ  $n = 0.0125 \text{ m}^{-1/3}$  است. در پایین دست سد عمق‌سنج‌هایی قرار گرفته که تا ۶۰ ثانیه پس از شکست سد، رقوم آب را برداشت کرده‌اند. به دلیل محصور بودن محل شکست، شرط مرزی سراب و پایاب به صورت بازگشتی است. در این مسئله گام مکانی دامنه محاسباتی برابر با  $\Delta x = 0.2 \text{ m}$  در نظر گرفته شده است. پس از شبیه‌سازی شکست سد با هر دو مدل، نتایج

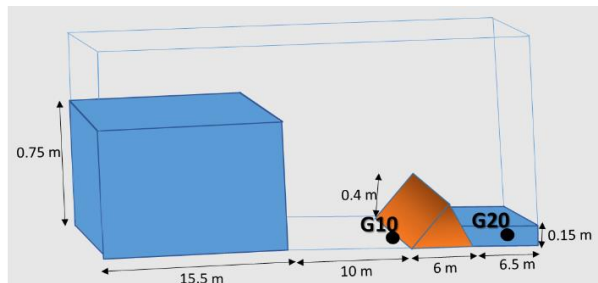


Fig. 2- Experimental setup of 1D CADAM dam-break test case  
 شکل ۲- جانمایی آزمایشگاهی مسئله یک بعدی شکست سد CADAM

جدول ۱- پارامترهای آماری ارائه شده برای عمق سنج G10

Table 1- R-squared and MAE for depth results of gage G10

Parameters	SM	RK-3
R <sup>2</sup> (%)	68.9	94.8
MAE	0.05	0.02

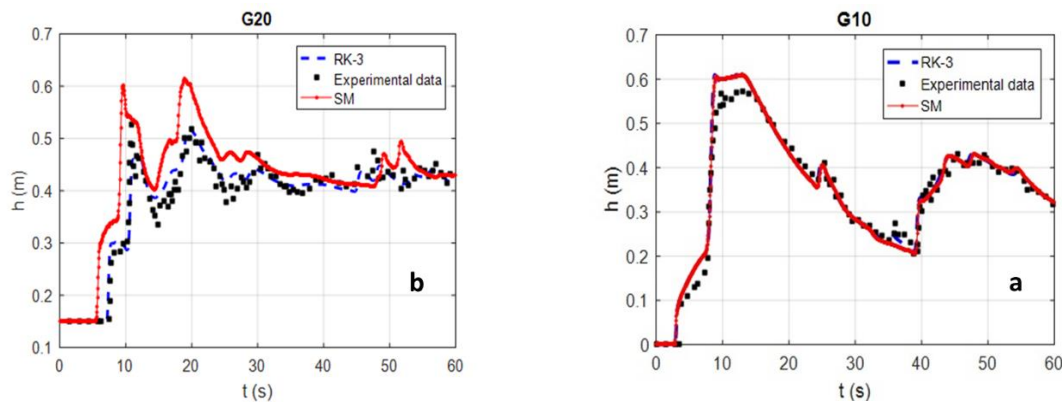


Fig. 3- Experimental water depths compare to models results, G10 (a), G20 (b)

شکل ۳- رقوم سطح آب حاصل از دو مدل و داده های آزمایشگاهی در محل عمق سنج های G10 (الف) و G20 (ب)

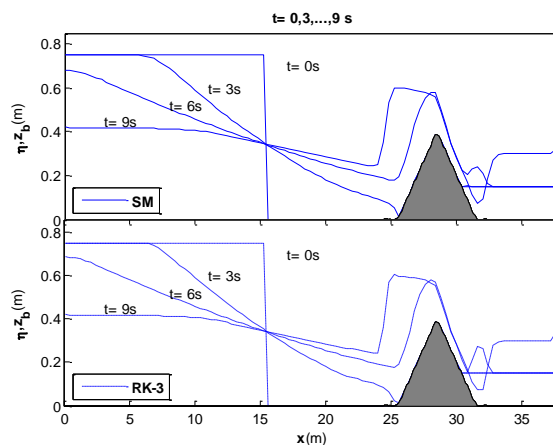


Fig. 4- Water depths after dam-break occurrence in both models

شکل ۴- سطح آب پس از شکست، زمان  $t = 0, 3, 6, 9 s$

داده شده است. همچنین در شکل (۷) پلانی از دایره‌ی نوسانی جریان در همین زمان برای روش رانگ کوتا مرتبه ۳ نشان داده شده است. خطوط هم‌تراز نشان داده شده در شکل (۷) مربوط به بستر بوده تا وضعیت قرارگیری دایره‌ی ساحلی جریان که نسبت به افق مایل است، به خوبی قابل درک باشد. نتایج به دست آمده در هر دو مدل دایره‌ای باقی ماندن ساحل جریان را به خوبی نشان می‌دهند. از آنجا که این مسئله ایده‌آل بوده و اصطکاک بستر وجود ندارد عملاً استهلاک انرژی جریان رخ نمی‌دهد، لذا مدل بایستی وضعیت سطح صاف جریان را حفظ کند که این وضعیت در زمان  $t=4T$  در شکل (۸) نشان داده شده است. در شکل (۸) پروفیل وضعیت جریان نسبت به بستر سهمی‌وار (بالا)، در یک امتداد خاص، و نمودار مربوط به عمق آب (پایین)، در راستای همان امتداد، نشان داده شده است. با توجه به نتایجی که این دو مدل به دست می‌دهند، روند جریان به درستی در هر دو مدل شبیه سازی می‌شود. هم‌روندی نتایج مدل‌های به کاررفته در این تحقیق با نتایج حل تحلیلی به خوبی قابلیت این دو مدل در اجرای مسائل دوبعدی آب‌های کم عمق را نشان می‌دهد.

با وجود نتایج راضی کننده به دست آمده از هر دو مدل، برای قیاس عملکرد دو مدل نسبت به هم از پارامترهای آماری مربوط به خطا در بررسی نتایج استفاده شده است. مقادیر بالای  $R^2$  که در شکل (۹) نشان داده شده، روند خوب بین نتایج هر دو مدل با داده‌های حل تحلیلی را نشان می‌دهد. اما برای بررسی خطای نتایج نسبت به حل تحلیلی، پارامتر میانگین خطای مطلق در شکل (۱۰) ارائه شده است. همان‌طور که از محورهای نشان داده شده در شکل (۱۰) قابل مشاهده است، مقادیر میانگین خطای مطلق عمق پس از تکرارهای مختلف کمتر از ۰/۱۵ درصد می‌باشد که مقدار پایین خطا در تکرارهای متوالی به خوبی بیانگر عملکرد مناسب هر دو مدل بوده علاوه بر این چپش مناسبی از روش‌های به کاررفته در برخورد با ترم‌های مکانی، ترم منبع‌ها و روش‌های انتگرال‌گیری زمانی را در این دو مدل نشان می‌دهد. با این وجود در روش رانگ کوتا مرتبه سه به مرور زمان و با افزایش تکرار محاسبات، میانگین خطای مطلق عمق روندی افزایشی داشته ولی در روش Strang تقریباً به صورت یکنواخت باقی می‌ماند. با این وجود از آنجا که روش رانگ کوتا مرتبه ۳ در هر گام زمانی، مطابق معادله (۱۴)، از چندین مرحله برای به‌روزرسانی متغیرها به گام بعد استفاده می‌کند، لذا افزایش خطای اندکی که در روش رانگ کوتا مرتبه ۳ مشاهده می‌شود، می‌تواند ناشی از تجمع خطا در مراحل مختلف این روش باشد.

همچنین میانگین خطای مطلق به دست آمده برای اندازه سرعت در هر دو مدل کمتر از ۴ درصد است. میزان خطای مطلق به دست آمده برای اندازه سرعت در شکل (۱۰) نشان می‌دهد که در شروع مدلسازی، روش رانگ کوتا مرتبه ۳ میزان خطای کمتری نسبت به روش Strang دارد. این نکته با توجه به اینکه در ابتدای

### مسئله دوبعدی: حجم آب مسطح نوسانی

حل‌های تحلیلی جریان دوبعدی نادر است (Delis et al., 2011). اما مسئله دوبعدی استفاده شده در این تحقیق به صورت ایده‌آل بوده که حل تحلیلی آن توسط Thacker (1981) ارائه شده و یکی از مراجع مهم جهت اعتبار سنجی و بررسی عملکرد مدل‌های دوبعدی است (Delestre et al., 2011). این مسئله نوسان حجم آب درون یک بستر سهمی‌وار شکل را به دست می‌دهد که معادله بستر آن به صورت ذیل است:

$$z_b(x, y) = z_0 \left( \frac{x^2 + y^2}{L^2} \right) \quad (18)$$

در معادله (۱۸)،  $z_b$  ارتفاع آب در هر نقطه، پارامتر ثابت  $z_0$  فاصله‌ی کانونی سهمی و  $L$  شعاع دایره‌ی نوسان کننده است. در این مسئله حجم آب دائماً در نوسان بوده اما ساحل آب همواره دایره‌ای ثابت با شعاع  $L$  و مرکز  $C$  خواهد بود. مرکز این دایره نیز شعاعی برابر با  $\xi$  را نسبت به مرکز دامنه،  $O$ ، در هنگام چرخش ایجاد می‌کند. این مقادیر در شکل (۵) نشان داده شده است. با نوسان حجم آب، معادله‌های جریان به صورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = & z_0 \left[ x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) - \frac{\xi}{2} \right] \\ & + z_0 - z_b(x, y) \\ u(t) = & -\xi \omega \sin(\omega t); \quad v(t) = -\xi \omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

که در این معادله  $h$  عمق آب و پارامتر ثابت  $\omega = \sqrt{2gz_0}/L$  بسامد چرخش حول مرکز دامنه در یک دوره‌ی تناوب کامل  $T$  است. اندازه‌ی بردار سرعت نیز مقدار ثابت  $|\mathbf{V}| = \xi \omega$  است که جهت آن نسبت به زمان دوران می‌کند. در این مسئله دامنه محاسباتی  $L=1 \text{ m}$ ,  $z_0=0.05 \text{ m}$  بوده و مقادیر  $-1.6 \text{ m} \leq (x, y) \leq 1.6 \text{ m}$  و  $\xi = 0.5$  است. ابعاد اتخاذ شده برای دامنه محاسباتی به گونه‌ای است که آب هرگز به مرزها نمی‌رسد. برای اجرای این مسئله سلول‌های شبکه دامنه محاسباتی برابر با  $\Delta x = \Delta y = 0.025 \text{ m}$  لحاظ شده است. با توجه به حل تحلیلی، مرز دایره آب در زمان نوسان بایستی ثابت بماند. در شکل (۶) دایره‌ی ساحلی جریان و خطوط تراز مربوط به عمق پس از چهار تناوب برای روش Strang نشان

خطای افزایشی مربوط به عمق جریان که در روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ مشاهده می شود، لزوم احتیاط در استفاده از این مدل جهت حل معادله های دوبعدی آب های کم عمق که دارای نوسان جریان هستند را نشان می دهد. لذا استفاده از روش Strang در حل مسائل دوبعدی آب های کم عمق، به دلیل تولید خطای کمتر، می تواند اطمینان بیشتری نسبت به نتایج حاصل از حل مسئله را به دست دهد.

مدلسازی، نمودار مربوط به میانگین خطای مطلق روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ زیر نمودار مربوط به روش Strang قرار می گیرد قابل استنباط است. با این وجود به مرور زمان و با افزایش تعداد تکرارها میزان خطا در روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ مشابه با روش Strang خواهد بود و نمودار خطای اندازه سرعت هر دو روش تقریباً منطبق می شوند. لذا با افزایش زمان اجرای مدل، می توان نتیجه گرفت که هر دو روش عملکرد مشابهی در برآورد اندازه سرعت خواهند داشت. با این وجود،

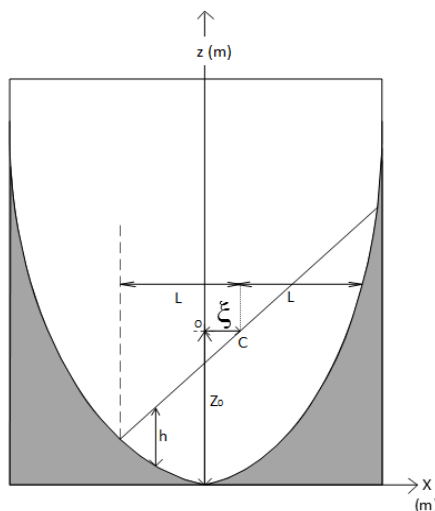


Fig. 5- Initial conditions of planar vacillatory water-body

شکل ۵- شرایط اولیه حجم آب مسطح نوسانی

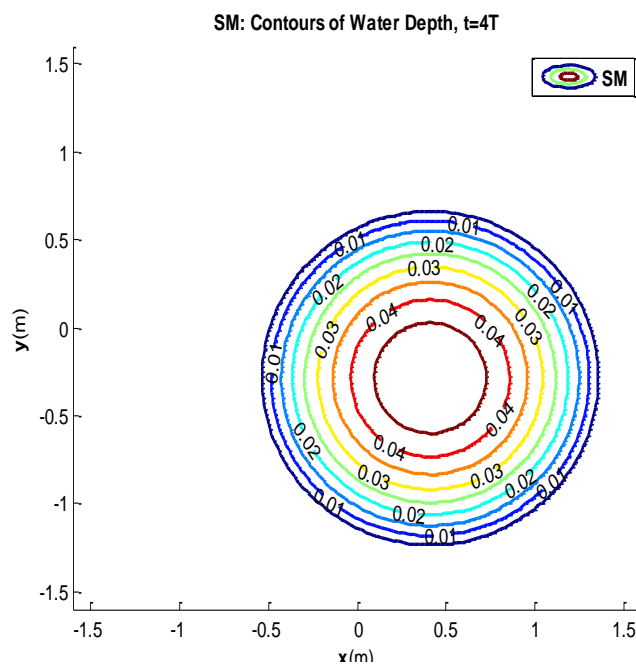


Fig. 6- Depth contours of Strang method at  $t=4T$

شکل ۶- وضعیت ساحل جریان و کانتورهای عمق آب برای روش Strang (SM) در زمان  $t=4T$

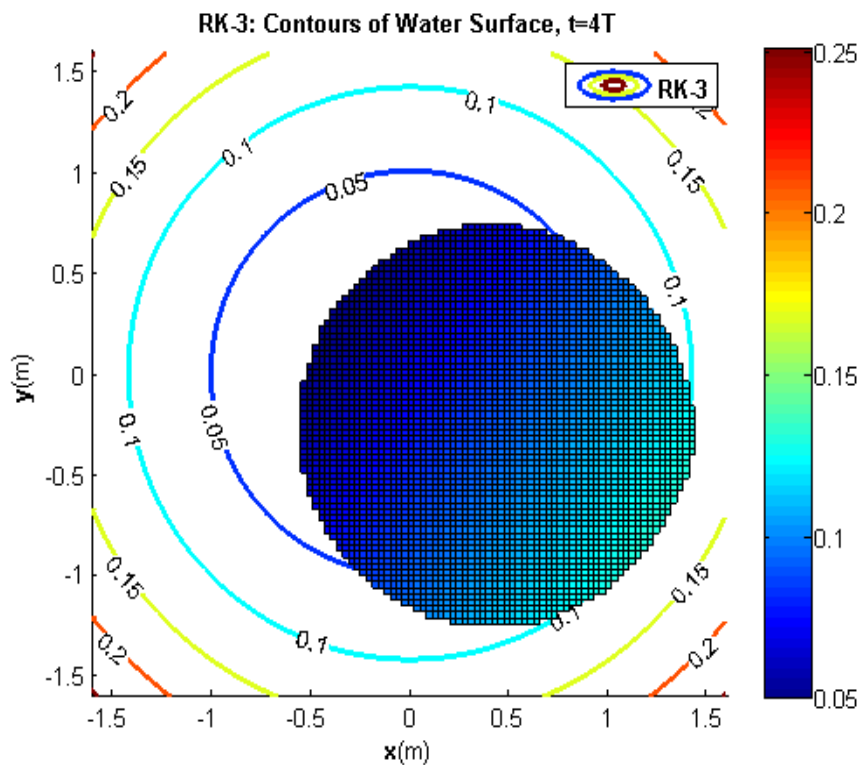


Fig. 7- Depth colorbar of RK-3 method at  $t=4T$

شکل ۷- وضعیت ساحل جریان و رقوم سطح آب برای روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ (RK-3) در زمان  $t=4T$

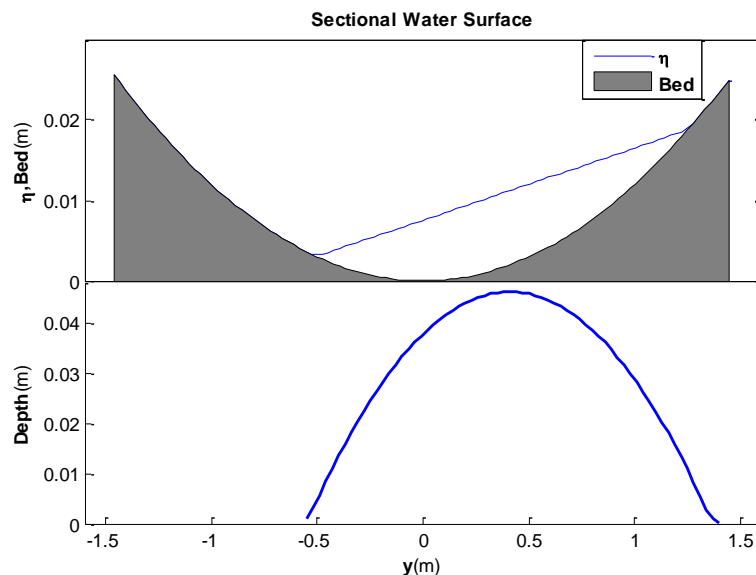


Fig. 8- Water level position relative to bed and depth in RK-3 method (Numerical and analytical solutions have overlap)

شکل ۸- وضعیت سطح آب نسبت به بستر و نمودار عمق آب در روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ در زمان  $t = 4T$  (نمودار حل عددی و تحلیلی بر هم منطبق اند)

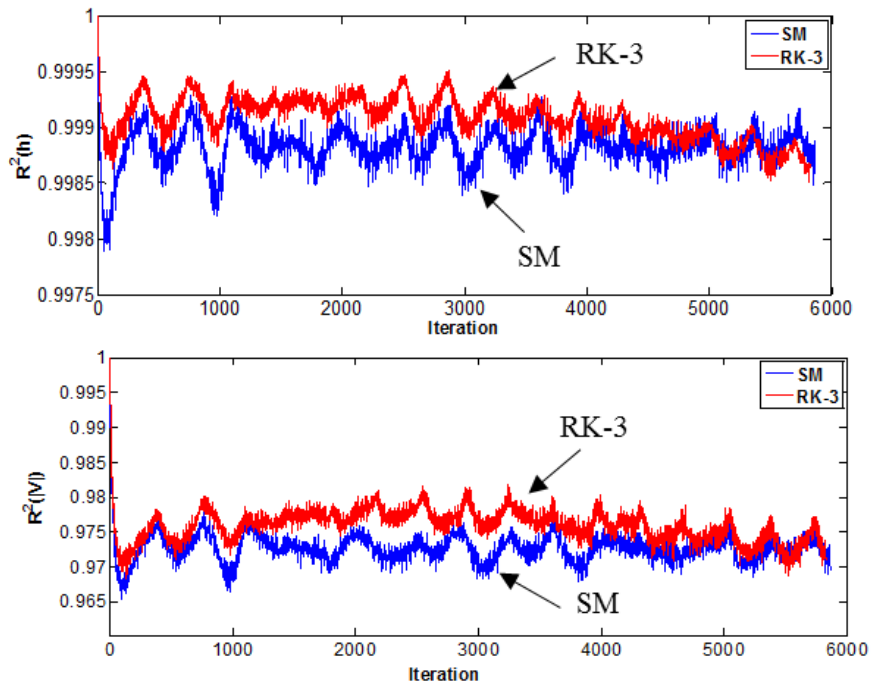


Fig. 9-  $R^2$  values of depth and absolute velocity of both method  
 شکل ۹- مقادیر  $R^2$  عمق و اندازه‌ی سرعت برای روش رانگ کوتا مرتبه ۳ (RK-3) و روش (SM) Strang

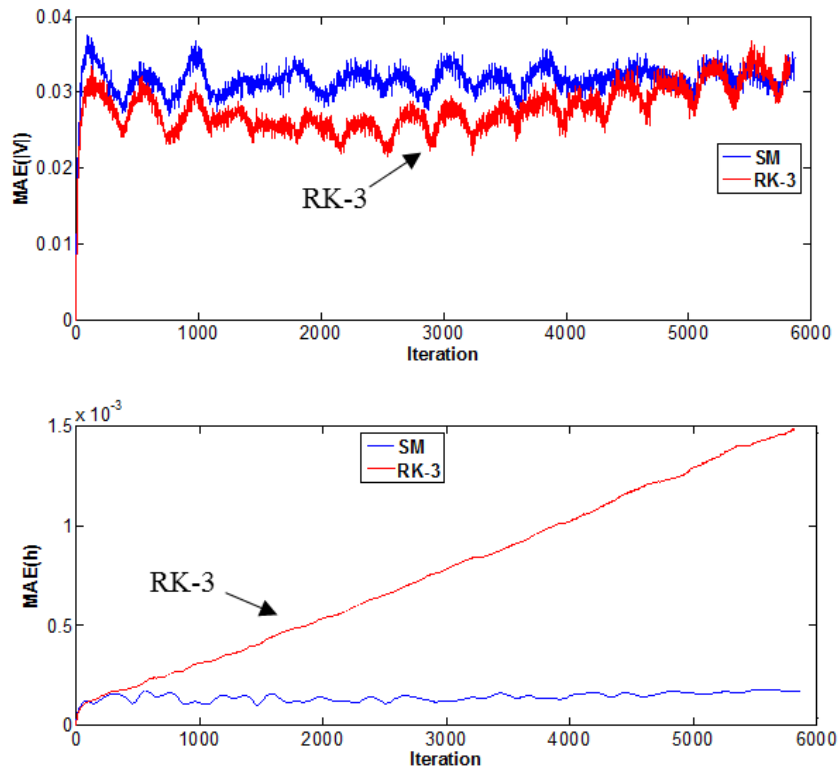


Fig. 10- MAE values of velocity (up) and depth (bottom) of both method  
 شکل ۱۰- پارامتر میانگین خطای مطلق اندازه سرعت (بالا) و عمق جریان (پایین) در هر دو مدل

### نتیجه گیری

است، نتایج هر دو مدل انطباق را ضعیف کننده‌ای با نتایج آزمایشگاهی داشته و روند کلی نوسان جریان را به خوبی نشان می‌دهند. باین وجود روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ در شروع شکست که نوسان جریان بیش تر است دقت بهتری دارد. اما با افزایش زمان، هر دو مدل مقادیر بسیار نزدیکی نسبت به داده‌های آزمایشگاهی داشته و نتایج تقریباً مشابهی را به دست می‌دهند. در مسئله دوبعدی ایده‌آل که یک حجم آب ثابت و در حال نوسان در یک بستر سه‌میبوار است، مطابق حل تحلیلی ساحل جریان همواره به صورت دایره‌ای باقی می‌ماند. در این مسئله نیز نتایج هر دو مدل در نوسان‌های مختلف دایره‌ای باقی مانده که نشان‌دهنده قابلیت مدل‌ها در برآورد روند صحیح جریان‌های دوبعدی است. همچنین در هر دو مدل مقادیر خطای میانگین مطلق به دست آمده برای عمق و اندازه سرعت اندک بوده که بیانگر چینی مناسب روش‌های به کاررفته در برخورد با ترم‌های مکانی و ترم منبع‌ها است. باین وجود، خطای میانگین مطلق در روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ با افزایش تعداد نوسان‌ها، به کندی افزایش می‌یابد. علت این امر می‌تواند ناشی از وجود گام‌های مختلف محاسباتی در روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ باشد به گونه‌ای که یک خطای اندک در مراحل مختلف موجود در این روش، در برخورد با مسائل دوبعدی به صورت تجمعی به وجود می‌آید. اما در روش Strang خطای میانگین مطلق نتایج به دست آمده یکنواخت بوده و با افزایش تعداد تکرارها میزان خطا افزایش نمی‌یابد.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از دانشگاه تربیت مدرس و معاونت پژوهشی آن برای ارائه تسهیلات و تقبل هزینه‌های تحقیق قدردانی می‌نمایند.

انجام به‌روزرسانی یا اصطلاحاً انتگرال‌گیری عددی ترم‌های زمانی معادله‌های دوبعدی آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش‌های با دقت مرتبه اول از لحاظ عددی پایدارتر بوده اما دقت پایین‌تری دارند. در مقابل روش‌های با مراتب دقت بالاتر دارای مشکلات پایداری عددی بوده و سبب واگرایی مدل خواهند شد. به همین دلیل روش‌های با دقت مرتبه دو که دارای ویژگی‌های بینابین هستند کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده‌اند. علی‌رغم تحقیقات زیاد صورت گرفته در خصوص نحوه برخورد با ترم‌های مکانی، با توجه به بررسی نویسندگان، تحقیقات در خصوص نحوه برخورد با ترم‌های زمانی معادله‌ها کم‌تر بوده و بررسی‌های صورت گرفته از روش‌های موجود محدود به حل مسائل یک‌بعدی است. لذا در این تحقیق دو روش انتگرال‌گیری زمانی متفاوت رانگ کوتاه مرتبه ۳ و روش Strang که دارای دقت مرتبه دو بوده و به‌صورت متداول در تحقیقات مختلف به کاررفته‌اند مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای این کار دو مدل که جهت حل معادله‌های دوبعدی آب‌های کم‌عمق استفاده مطرح گردید که در هر یک از آن‌ها یکی از دو روش رانگ کوتاه مرتبه ۳ و Strang جهت برخورد با ترم‌های زمانی معادله‌ها استفاده شده است. برای اینکه بتوان منحصرأ در مورد عملکرد روش‌های انتگرال‌گیری زمانی قضاوت نمود، در هر دو مدل از روش‌های یکسانی برای گسسته کردن ترم‌های مکانی و اعمال ترم منبع‌ها استفاده شد. پایداری و عملکرد مناسب این روش‌ها در تحقیقات مختلف گزارش شده و به کرات مورد استفاده محققین قرار گرفته‌اند. پس از تکمیل مدل‌ها، برای بررسی عملکرد آن‌ها دو مسئله که دارای نتایج دقیق هستند اجرا گردید. در مسئله یک‌بعدی شکست سد که دارای ترم منبع اصطکاکی

### References

- 1- Ahmed, N. and John, V. 2015. Adaptive time step control for higher order variational time discretizations applied to convection–diffusion–reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285, 83-101.
- 2- Amiri, S., Talebbeydokhti, N. and Baghlani, A. 2012. A two-dimensional well-balanced numerical model for shallow water equations. *Scientia Iranica* 20, 97-107.
- 3- Aureli, F., Maranzoni, A., Mignosa, P. and Ziveri, C. 2008. A weighted surface-depth gradient method for the numerical integration of the 2D shallow water equations with topography. *Advances in Water Resources*, 31, 962-974.
- 4- Brouwer, J., Reiss, J. and Sesterhenn, J. 2014. Conservative time integrators of arbitrary order for skew-symmetric finite-difference discretizations of compressible flow. *Computers & Fluids* 100, 1-12.
- 5- Caleffi, V., Valiani, A. and Zanni, A. 2003. Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research* 41, 167-177.

- 6- De Boer, A. 2003. Comparison of two numerical schemes for solving the 1D shallow water equations. *University of Twente, The Netherlands*.
- 7- De Lemos, M. J. 2012. Turbulence in porous media: modeling and applications, *Elsevier*.
- 8- Delestre, O., Lucas, C., Ksinant, P.-A., Darboux, F., Laguerre, C., Vo, T. T., James, F. and Cordier, S. 2011. SWASHES: a library of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *preprint, HAL hal-00628246*.
- 9- Delis, A. I., Nikolos, I. and Kazolea, M. 2011. Performance and comparison of cell-centered and node-centered unstructured finite volume discretizations for shallow water free surface flows. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18, 57-118.
- 10- Gottlieb, S., Shu, C.-W. and Tadmor, E. 2001. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*, 43, 89-112.
- 11- Huang, Y., Zhang, N. and Pei, Y. 2013. Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 7, 40-54.
- 12- Ketcheson, D. I., Macdonald, C. B. and Gottlieb, S. 2009. Optimal implicit strong stability preserving Runge–Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, 59, 373-392.
- 13- Mahdavi, A. and Talebbeydokhti, N. 2009. Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using FORCE-MUSCL scheme. *Journal of Hydraulic Research*, 47, 476-485.
- 14- Nguyen-Ba, T., Nguyen-Thu, H., Giordano, T. and Vaillancourt, R. 2011. Strong-stability-preserving 3-stage Hermite–Birkhoff time-discretization methods. *Applied Numerical Mathematics*, 61, 487-500.
- 15- Saiduzzaman, M. and Ray, S.K. 2013. Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water Equation. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences* 13.
- 16- Thacker, W. 1981. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 107, 499-508.
- 17- Toro, E. 2001. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. 2001. *Chichester, etc.: Wiley*.
- 18- Toro, E. F. 2009. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction, *Springer*.
- 19- Weill, S., Chiara-Roupert, R.d. and Ackerer, P. 2014. Accuracy and efficiency of time integration methods for 1D diffusive wave equation. *Computational Geosciences* 18,697-709
- 20- Zhou, J. G., Causon, D. M., Mingham, C. G. and Ingram, D. M. 2001. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics* 168,1-25.