روش های عددی قیمت گذاری اختیار تحت مدل هستون

علی بلفکه[1] ، دکتر سید نوراله موسوی[2]، دکتر سیما مشایخی[3]

۱-کارشناسی ارشد ریاضی مالی، گروه ریاضی، دانشگاه اراک ، اراک

۲-گروه ریاضی، دانشگاه اراک ، اراک

۳- گروه ریاضی، دانشگاه اراک ، اراک

چکیده

مدل هستون یک مدل توسعه یافته مدل بلک-شولز-مرتون است که اجازه می دهد نوسانات قیمت به صورت تصادفی انتخاب شوند. راه حل های دقیق برای مدل هستون وجود دارد، اما راه حل های تقریبی از طریق شبیه سازی عددی مورد نیاز است.روش هایی که در گذشته وجود دارد، بر روش تفاضلات متناهی و اجزا متناهی روی معادلات دیفرانسیل جزئی متمرکز شده است. حال این مقاله نشان می دهد که چگونه مدل هستون را می توان با استفاده از روش اجزا متناهی تصادفی شبیه سازی کرد و نتایج به دست آمده در این روش را با روش هایی که در گذشته شبیه سازی شده است، مقایسه می کنیم.

واژگان کلیدی: مدل هستون ، قیمت گذاری اختیار اروپایی، روش اجزا متناهی تصادفی ، روش اجزا متناهی

1-مقدمه

در سال ۱۹۹۳ ، هستون مدل بلک-شولز-مرتون که در آن نوسانات با یک فرآیند تصادفی مدل بندی شده بود، معرفی کرد (Heston, 1993) . مدل هستون ارزیابی دقیق تری از مشتقات مالی را ارائه می دهد. همچنین برای اختیار های اروپایی، می توان از یک راه حل دقیق فرم بسته استفاده کرد، در حالی که سایر مدل های نوسان تصادفی را می توان به صورت عددی حل کرد.

بیشتر محاسبات قیمت اختیار با تقریب عددی از حل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE)(Quarteroni et al , 2009) انجام می شود. که یکی از پرکاربردترین روش های حل عددی، روش های تفاضلات متناهی (FDMs) هستند. این روش ها دارای محدودیت های مانند شرایط اولیه و مرزی پیوسته و شبکه های دکارتی هستند. جواب های تولید شده در FDMs فقط در نقاط شبکه موجود است و در نقاط دیگر به درون یابی نقاط شبکه تکیه می کند.

یکی از روش های دیگر تقریب عددی PDE ، روش های اجزا متناهی (FEMs) هستند. روش های اجزا متناهی می توانند شرایط اولیه و مرزی گوناگون را اداره کنند و علاوه براین جواب تقریبی بدست آمده ، توابع پایه ای پیوسته هستند که در تمام نقاط دامنه تعریف شده اند.

معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDEs) در زمینه های وسیعی کاربرد دارد. یکی از کاربردهای مهم این معادلات، ارایه مدل برای نوسانات قیمت در بازار سهام است. فهم کامل SDEs نیازمند آشنایی با احتمال و فرایندهای تصادفی پیشرفته است. برای شبیه سازی عددی SDEs، کافی است آشنایی مختصری با روش اویلر برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و درک مستقیمی از متغیرهای تصادفی داشته باشیم. یکی از روش های تقریب عددی SDEs، روش اجزا متناهی تصادفی (SFEM) است. در روش اجزا متناهی تصادفی برای حل SDE چون معادله به زمان و مکان بستگی دارد لذا دو حالت در نظر می گیریم، ابتدا زمان را ثابت نگه می داریم و معادله را نسبت به مکان حل می کنیم. که به گسسته سازی ناقص موسوم است، اگر معادله را هم نسبت به زمان و هم نسبت مکان حل کنیم گسسته سازی کامل انجام شده است.

در بخش ۲ ، مدل نوسان تصادفی هستون را معرفی می کنیم. در بخش ۳، PDE مدل هستون همراه با شرایط مرزی و اولیه شرح می دهیم. سپس FDMs و FEMs به صورت مختصر در این بخش مورد بررسی قرار می گیرند.

در بخش ۴، روش اویلر و SFEM را برای SDE مدل هستون شرح می دهیم. در این بخش ابتدا روش اویلر را برای SDE مدل هستون مورد بررسی قرارمی دهیم و با توجه به فرآیند وینر استوانه ای دامنه حرکت براونی خود را گسسته می کنیم. سپس با استفاده از روش اویلر، SFEM را برای مدل هستون شرح خواهیم داد. در بخش ۵، آزمایش های عددی را برای نشان دادن کاربرد و کارایی روش های تعریف شده در مدل هستون برای قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش ۶، نتیجه گیری کلی برای این مطالعه شرح خواهیم داد.

۲- مدل هستون

مدل بلک-شولز-مرتون (Black and Scholes, 1973) در چهل سال از انتشار آن در سال ۱۹۷۳ به پرکاربردترین مدل ریاضی برای حل مسئله قیمت گذاری اختیار تبدیل شده است. این مدل نه تنها یک راه حل تحلیلی برای قیمت گذاری اختیارهای وانیلی یعنی فرمول بلک-شولز ارائه می دهد، بلکه به عنوان اساس قوی برای مدل های توسعه دهنده عمل می کند. از سوی دیگر روش های مختلفی وجود دارد که نشان می دهد مدل بلک-شولز-مرتون با واقعیت مشاهده شده تناقض دارد. به عنوان مثال یکی از اشکالات مدل، فرض نوسان ثابت بودن است که در آن قیمت سهام پیوسته مرکب معمولا با نوسان ثابت توزیع می شود. اما در بسیاری از مطالعات تجربی و استدلال های اقتصادی نشان داده شده است که توزیع قیمت سهام پیوسته مرکب همیشه با نوسان ضمنی ارتباط دارد، حقایقی که با فرض ثابت بودن نوسان مدل بلک-شولز-مرتون تناقض دارد.

برای حل مسئله مدل بلک-شولز-مرتون ، بسیاری از محققان یک فرآیند تصادفی را تعیین می کنند که در آن نوسان به عنوان نوسان تصادفی شناخته می شود. این فرآیند تصادفی به مدل هستون معرفی شده است، که به عنوان یک معیار مناسب برای مسئله هایی با نوسان ضمنی است. مدل هستون به فرم معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t) = S(t)\left[(r-q)\mathrm{d}t + \sqrt{v(t)}\mathrm{d}W_1(t)\right] \\ \mathrm{d}v(t) = \kappa(\theta - v(t))\mathrm{d}t + \xi\sqrt{v(t)}\mathrm{d}W_2(t) \\ \mathrm{E}[\mathrm{d}W_1(t)\mathrm{d}W_2(t)] = \rho\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

تعریف شده است. که در آن $S(t)$ فرآیند قیمت سهام در زمان t، $v(t)$ فرآیند نوسان ضمنی، r نرخ بهره بدون ریسک، q نرخ سود سهام، κ نرخ بازگشت میانگین واریانس، θ سطح بازگشت میانگین واریانس، ξ نوسان واریانس و $W_i(t), i = 1,2$ دو حرکت براونی با همبستگی ρ تعریف شده است.

۳. حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی مدل هستون

فرض کنید $g(t, v, S)$ نشان دهنده قیمت اختیار در زمان t است، که درآن v نوسان و S فرآیند قیمت سهام تعریف شده است. بنابراین $g(t,v,S) := e^{-r(T-t)}\mathrm{E}[h(V(T),S(T))]$ که در آن $h(V(T),S(T))$ قیمت اختیار در زمان T است. حال با استفاده از قضیه فاینمن-کاک معادله دیفرانسیل جزئی تابع $g(t,v,S)$ به صورت زیر

$$g_t + \frac{1}{2}\xi^2 v g_{vv} + \rho\xi S v g_{Sv} + \frac{1}{2}S^2 v g_{SS} + \kappa(\theta - v)g_v + (r-q)S g_S - r = 0 \qquad (2)$$

همراه با شرط $g(T,v,S) = h(v,S)$ در زمان T تعریف می شود. حال می توان معادله بالا را با توجه به تغییر متغیر $y = \log(S/K)$ و $\tau = T - t$ به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$U_\tau - \frac{1}{2}\xi^2 v U_{vv} - \rho\xi v U_{yv} - \frac{1}{2}v U_{yy} - \kappa(\theta - v)U_v - \left(r - q - \frac{1}{2}v\right)U_y + rU = 0 \qquad (3)$$

که در آن شرط اولیه $U(0,v,y) = h(v, Ke^y)$ در زمان $\tau = 0$ اعمال می شود و $U(\tau,v,y) = g(t,v,S)$ است. حال شرایط دیریکله و اولیه معادله (۲) برای قیمت گذاری اختیار اروپایی زیر نشان می دهیم.(خرید: $\eta = 1$; فروش: $\eta = -1$)

$$\begin{cases} U(t, v_{\min}, y) = [\eta(Ke^y e^{-q\tau} - Ke^{-r\tau})]^+ \\ U(t, v, y_{\max}) = \frac{1+\eta}{2}[\eta(Ke^{y_{\max}} e^{-q\tau} - Ke^{-r\tau})]^+ \\ U(t, v_{\max}, y) = \frac{1+\eta}{2}Ke^y e^{-q\tau} + \frac{1-\eta}{2}Ke^{-r\tau} \\ U(t, v, y_{\min}) = \frac{1-\eta}{2}[\eta(Ke^{y_{\min}} e^{-q\tau} - Ke^{-r\tau})]^+ \\ U(0, v, y) = [\eta(Ke^y - K)]^+ \end{cases} \qquad (4)$$

حال روش های تفاضلات متناهی و اجزا متناهی برای معادله (2) با شرایط مرزی (4) شرح خواهیم داد.

۳ .۱. روش تفاضلات متناهی

برای تعریف روش تفاضلات متناهی PDE مدل هستون(2) ، ابتدا شبکه دکارتی و شبکه زمانی به صورت زیر

$$\begin{gathered} v_i = v_{\min} + i\Delta v \ , \ i = 0, \dots, I \ , \ \Delta v = (v_{\max} - v_{\min})/I \\ y_j = y_{\min} + j\Delta y \ , \ j = 0, \dots, J \ , \ \Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/J \\ \tau_n = n\Delta\tau \ , \ n = 0, \dots, N \ , \ \Delta\tau = \frac{T}{N}. \end{gathered}$$

تعریف می کنیم، که در آن N،J وI اعداد صحیح هستند. سپس دستگاه گسسته ای را برای تقریب $u_{i,j}^n \approx U(v_i, y_j, \tau_n)$ به صورت

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta\tau}-\theta L_h u_{i,j}^{n+1}-(1-\theta)L_h u_{i,j}^{n}=0 \tag{5}$$

که در آن

$$\begin{aligned} L_h u_{i,j}^{n} &= \frac{1}{2}\xi^2 v_i \frac{u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}}{(\Delta v)^2}+\rho\xi v_i \frac{u_{i+1,j+1}^{n}+u_{i-1,j-1}^{n}-u_{i-1,j+1}^{n}-u_{i+1,j-1}^{n}}{4\Delta v\Delta y} \\ &+\frac{1}{2}v_i \frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}+\kappa(\theta-v_i)\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta v} \\ &+\left(r-q-\frac{1}{2}v_i\right)\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}-ru_{i,j}. \end{aligned} \tag{6}$$

$$n=1,\dots,N \text{ و } i=1,\dots,I-1, j=1,\dots,J-1\,.$$

تعریف می کنیم. مقادیر $u_{0,j}^{n}, u_{I,j}^{n}, u_{i,0}^{n}, u_{i,J}^{n}$ و $u_{i,j}^{0}$ از (2) به دست می آیند. پارامتر θ سه روش موجود در تفاضلات متناهی : روش اویلر صریح (θ=۰) ، روش اویلر بازگشتی ضمنی (θ= ۱) و روش کرانک نیکلسون ضمنی ($\theta=0.5$) را بیان می کند. روش FDM در (5) ، روشی بسیار کاربردی و از نظر پیاده سازی ساده است.

۳ .۲. روش اجزا متناهی

روش اجزا متناهی روش بسیار منعطفی برای محاسبه حل عددی PDEs می باشد.به طور کلی این روش دارای سه ویژگی کلیدی است که از نقطه نظر عملی آن را بسیار قابل توجه کرده است. اولین ویژگی، FEM برای دامنه های به شکل های مختلف مناسب است. دومین ویژگی FEM این است که کارکردن با شرایط مرزی که شامل مشتق حل هستند (مانند شرایط مرزی نیومن در PDEs)، می تواند بسیار آسان باشد. سومین ویژگی، پس از آن که حل دقیق را با یک تابع چند جمله ای برای حل اجزا (المان) تقریب زدیم، می توانیم از آنالیز توابع برای ارزیابی دقت FEM استفاده کنیم.

فرض کنید Ω دامنه محاسباتی، Γ مرز دامنه و $S(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ نشان دهنده فضای توابع با مشتقات اول است که متعلق به $L^2(\Omega)$ باشند ($L^2(.)$ فضای توابع مربع انتگرال را نشان می دهد). پارامتر h را، پارامتری که اندازه شبکه را نشان می دهد در نظر میگیرم.

حال فرض می کنیم $\mathbf{x} = (v, y)^T$ و سپس برای $\mathbf{x} \in \Gamma$ تابع $f^h(\mathbf{x})$ که نشان دهنده تقریب از $f(\mathbf{x})$ است ، را در نظر می گیریم. اگر $f(\mathbf{x})$ پیوسته باشد، آنگاه می توانیم $f^h(\mathbf{x})$ را از درون یابی $f(\mathbf{x})$ در $S^h|_\Gamma$ به دست آوریم. در غیر این صورت $f^h(\mathbf{x}) \in S^h|_\Gamma$ است. حال فضای آفین $S_f^h = \{U^h \in S^h \mid U^h = f^h \text{ on } \Gamma\}$ و زیر فضای $S_0^h = \{\phi^h \in S^h \mid \phi^h = 0 \text{ on } \bar{\Omega}\} \subset S_0(\Omega)$ را تعریف می کنیم و سپس معادله (2) را برای FEM به صورت

$$U_\tau - \nabla \cdot A\nabla U + b \cdot \nabla U + rU = 0 \qquad (6)$$

تعریف می کنیم. که درآن $b = \begin{bmatrix} -\kappa(\theta - v) + \frac{1}{2}\xi^2 \\ -(r-q) + \frac{1}{2}v + \alpha\rho\xi \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}v\xi^2 & \alpha v\rho\xi \\ (1-\alpha)v\rho\xi & \frac{1}{2}v \end{bmatrix}$ است. در این مطالعه α را برابر ۱ در نظر می گیریم. سپس با توجه به گسسته سازی فضایی نیمه گسسته (6) و با فرض این که $U^h \in S_f^h$ داریم

$$\int_\Omega U_\tau^h \cdot \phi^h \, \mathrm{d}\Omega + \mathcal{B}(U^h, \phi^h) = 0 \ \text{ for all } \phi^h \in S_0^h , \qquad (7)$$

که در آن

$$\mathcal{B}(U^h, \phi^h) = \int_\Omega \big(\nabla\phi^h \cdot (A\nabla U^h) + \phi^h(b \cdot \nabla U^h + rU^h)\big)\mathrm{d}\Omega.$$

با استفاده از طرح گسسته زمانی در FDM یک سیستم گسسته را برای (7) به صورت

$$\int_\Omega \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta\tau}\phi_h \, \mathrm{d}\Omega + \theta\mathcal{B}(U_h^{n+1}, \phi^h) + (1-\theta)\mathcal{B}(U_h^n, \phi^h) = 0 \quad , \quad n = 0,1, \dots, N. \qquad (8)$$

برای هر $\phi^h \in S_0^h$ تعریف می کنیم. . پارامتر θ سه روش موجود: روش اویلر صریح ($\theta = 0$)، روش اویلر بازگشتی ضمنی (θ=1) و روش کرانک نیکلسون ضمنی ($\theta = 0.5$)، را بیان می کند. د ر این مقاله S^h را فضای توابع پایه مربعی پیوسته در نظر می گیریم، زیرا توابع پایه مربعی جواب های تقریبی دقیق تری به ما می دهند.

٤. حل عددی معادله دیفرانسیل تصادفی مدل هستون

فرآیندهای معادله (1) در زمان پیوسته هستند، با این حال شبیه سازی این فرآیند ها در مراحل زمان گسسته انجام می شود. بنابراین اولین قدم برای شبیه سازی تقریب یک فرآیند زمان پیوسته با یک فرآیند زمان گسسته است. پس فرآیندهای $S(t)$ و $v(t)$ در (1) را می توان به شکل کلی زیر نوشت:

$$X_{t+\mathrm{dt}} = X_t + \mu(X_{\mathrm{t}}, t)dt + \sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z. \qquad (9)$$

حال X_t را در بازه زمانی $[0,\tau]$ شبیه سازی می کنیم که dt فاصله زمانی در هر مرحله است. بنابراین فرآیند (9) را می توان به صورت فرآیند ایتو

$$X_{t+dt} = X_t + \int_t^{t+dt} \mu(X_u, u)du + \int_t^{t+dt} \sigma(X_u, u)dW_u \qquad (10)$$

نوشت که در آن W_t حرکت براونی است. ایده اصلی این است که در زمان t مقدار X_t مشخص است و مقدار X_{t+dt} را در زمان $t + dt$ با توجه به X_t به دست می آوریم. حال طرح اویلر و روش اجزا متناهی در SDE مدل هستون را مورد بررسی قرار می دهیم.

٤ .١. طرح اویلر مدل هستون

ساده ترین راه برای گسسته سازی فرآیند در معادله $(2-4)$ با استفاده از گسسته سازی اویلر است. این مشابه تقریب انتگرال ها با استفاده از قاعده روبه جلو اویلر است. انتگرال زیر به عنوان حاصلضرب انتگرال در زمان t و دامنه انتگرال dt تقریبی شده است

$$\int_{t}^{t+dt} \mu(X_u, u)du \approx \mu(X_t, t) \int_{t}^{i+\Delta t} du = \mu(X_i, t)dt.$$

ما ازقاعده روبه جلو اویلر استفاده می کنیم، زیرا در زمان t مقدار $\mu(X_t, t)$ مشخص است وسپس مقدار $\mu(X_{t+dt}, t + dt)$ در زمان $t + dt$ به دست می آوریم. انتگرال دوم به صورت

$$\int_{r}^{t+dt} \alpha(X_u, u)du \approx \sigma(X_t, t)$$

$$\int_{t}^{t+\omega t} dW_n = \sigma(X_t, t)(W_{t+\mathrm{dt}} - W_t) = \sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z$$

تقریب می شود. که در آن $W_{t+\mathrm{dt}} - W_t$ و $\sqrt{dt}Z$ در توزیع یکسان هستند و Z متغیر نرمال استاندارد است. فرم گسسته اویلر معادله $(4-2)$ به صورت کلی به فرم

$$X_{t+dt} = X_t + \mu(X_{\mathrm{t}}, t)dt + \sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z \qquad (11)$$

تعریف می شود. حال فرم گسسته اویلر مدل هستون را برای قیمت سهام و واریانس شرح می دهیم.

۱.٤. ۱. طرح اویلر برای واریانس

SDE واریانس معادله (1) با استفاده (10) به صورت

$$v_{t+\,\mathrm{dt}} = v_t + \int_{t}^{t+\mathrm{dt}} \kappa(\theta - v_{\mathrm{t}})du + \int_{t}^{t+dt} \sigma\sqrt{v_u}dW_w$$

تعریف می شود. فرم گسسته طرح اویلر برای واریانس به صورت

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_V\ . \qquad (12)$$

تعریف می شود. احتمال تولید مقدار منفی v_{t+dt} برابر است با

$$\Pr\,(v_{t+dt} < 0) = \Phi\left(\frac{-(1-\kappa dt)v_t - \kappa\theta dt}{\sigma\sqrt{v_t}\sqrt{dt}}\right).$$

است. که در آن $\Phi(x)$ نشان دهنده تابع توزیع نرمال است که در x توزیع می شود. سپس هنگامی که گسسته سازی اویلر را روی واریانس اعمال می کنیم، باید تابع قدر مطلق اعمال کنیم تا مقادیر منفی ایجاد شده در شبیه سازی را نادیده بگیریم.

۴.۱.۲. طرح اویلر برای قیمت سهام

SDE قیمت سهام معادله (1) با استفاده (10) به صورت

$$S_{t+dt} = S_t + (r-q)\int_t^{t+dt} S_u du + \int_t^{t+dt} \sqrt{v_u} S_u dW_u \,,$$

نوشته می شود. حال فرم گسسته طرح اویلر برای قیمت سهام به صورت زیر

$$S_{t+dt} = S_t + (r-q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t \sqrt{dt} Z_S \qquad (13)$$

تعریف می شود. اکنون برای شبیه سازی فرایند قیمت سهام ما از تابع لگاریتم طبیعی با استفاده لم ایتو از SDE استفاده می کنیم. سپس این فرایند تولید شده از تابع لگاریتم را با استفاده از تابع نمایی بر می گردانیم، که به صورت

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\sqrt{dt}Z_S\right) \qquad (14)$$

تعریف می شود. برای پیاده سازی شبیه سازی اویلر ، ما با مقادیر S_0 برای قیمت سهام و v_0 برای واریانس شروع می کنیم و با استفاده از مقادیر (S_t, v_t) در زمان t و معادله های (12) و (14) مقادیر (S_{t+dt}, v_{t+dt}) را در زمان $t+dt$ به دست می آوریم.

۴.۲. روش اجزا متناهی تصادفی

در این بخش، تقریب معادله (1) را با روش اجزا متناهی شرح می دهیم. برای حل SDEs به روش اجزا متناهی باید حرکت براونی تولید شده به صورت گسسته در آوریم. برای گسسته سازی حرکت براونی ما به تعریف حرکت براونی

استوانه ای نیاز داریم، که به اختلال سفید معروف است. سپس حرکت براونی استوانه ای (اختلال سفید) را در معادله (9) قرار می دهیم و با استفاده از طرح اویلر در معادله (14)، مقدار X_{t+dt} در زمان $t + dt$ با توجه به X_t به دست می آوریم. این فرآیند تقریب ، برای تقریب واریانس و قیمت سهام در معادله (1) به روش اجزا متناهی استفاده می کنیم.

۵- تحلیل عددی

در این بخش، نتایج آزمایش های عددی به دست آمده در اختیار خرید اروپایی بر اساس مدل هستون را شرح می دهیم. ابتدا نتایج بدست آمده در روش های تفاضلات متناهی و اجزا متناهی در PDE مدل برای اختیار خرید اروپایی را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس نتایج به دست آمده در روش اجزا متناهی تصادفی و طرح اویلر در SDE مدل هستون را نشان خواهیم داد. در پایان روش های بیان شده را با هم مقایسه می کنیم.

پارامترهای مورد استفاده برای آزمایش های عددی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- پارامترهای مورد استفاده در آزمایش عددی مدل هستون.

پارامتر	اندازه
قمیت اولیه سهام	S0=100.0
واریانس اولیه	v0=0.25
نرخ بازگشت میانگین واریانس	κ=1.0
میانگین واریانس	θ = 0.09
نرخ بهره ریسک-خنثی	r = 0.05

نرخ سود سهام	q = 0.01
ضریب همبستگی	ρ = -0.7
زمان سر رسید	T = 1.0
قیمت اعمال	Kc=110.0

ابتدای کار یک فرم بسته (راه حل دقیق) برای قیمت گذاری اختیار اروپایی برای مدل هستون ارائه می دهیم. که این فرم بسته شامل ارزیابی یک انتگرال است که باید به صورت عددی تقریب زده شود. حال با استفاده از فرمول اصلی هستون (Heston, 1993)، داریم

$$f(\phi_j) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\phi_j \ln K} f_k(\phi_j; x, v)}{i\phi_j}\right], \; k = 1,2 \qquad (15)$$

که در آن $f_k(\phi_j : x, v), k = 1,2$ توابع مشخصه در مدل هستون هستند. جزئیات تکمیلی این فرمول در (Quarteroni,2009) آورده شده است. حال نتایج استفاده از FEM و FDM در قیمت گذاری اختیارخرید اروپایی را ارائه می دهیم. برای این منظور، ما در این مطالعه از گسسته سازی فضایی و روش گسسته سازی زمان کرانک-نیکلسون و در روش اجزا متناهی PDE مدل هستون از تابع پایه مربعی استفاده می کنیم.

دامنه محاسبات گسسته سازی فضایی در PDE را $v \in [0.0,4.0]$ و $S \in [Ke^{-2}, Ke^{2}]$ انتخاب می کنیم، همچنین دامنه زمانی در بازه (0,1) در نظر می گیریم. سپس دامنه فضایی و زمانی به ترتیب N_x=۱۰۰ و $N_T = N_x *$ N_x تقسیم می کنیم. حال تقریب قیمت اختیار در قیمت اعمال، خطای نسبی و زمان محاسبات طرح کرانک-نیکلسون با استفاده از FEM و FDM را در جدول ۲ نشان می دهیم. با توجه به این جدول ، مقدار تقریبی در طرح کرانک-نیکلسون FEM نسبت به طرح کرانک-نیکلسون FDM دقیق تر است و خطای نسبی کمتری دارد. برای بررسی آزمایشات عددی بیشتر می توانید به (Chen et al ,2019) مراجعه کنید.

حال نتایج آزمایش های عددی را برای طرح اویلر رو به جلو و و طرح اویلر SFEM برای SDE مدل هستون مورد بررسی قرار می دهیم. این نتایج به صورت خلاصه در جدول ۲ آمده است. در روش های محاسباتی برای SDE مدل هستون، با $N = 10000$ شبیه سازی و $M = 30$ مسیر نمونه ای میانگین قیمت خرید اروپایی را محاسبه می کنیم. با استفاده از فرمول (1) مقدار واقعی مدل هستون، فرمول های (12) و(14) روش اویلر مدل هستون و با استفاده از روش اویلر و اختلال سفید تقریبی از روش SFEM مدل هستون را برای اختیار خرید اروپایی به دست می آوریم. مقدار پارامترها را با توجه جدول (1) مقدار دهی می کنیم.

جدول۲- مقدار تقریبی،خطای نسبی و زمان محاسبات روشهای بیان شده در مدل هستون.

روش	مقدار تقریبی روش	خطای نسبی	زمان محاسبات
	PDE		
C-N FEM	4.1083	.0032	563.81s
C-N FDM	4.1350	.0264	701.13s
	SDE		
اویلر	4.8527	.0035	102.2s
اویلر SFEM	4.1121	.7441	96.8s
راه حل دقیق	4.1086		31s

با توجه به جدول (2)، مقدار تقریبی طرح اویلر SFEM برای تقریب اختیار خرید SDE مدل هستون با توجه به خطای نسبی بهتر از روش اویلر است. بنابراین طرح اویلر SFEM برای تقریب اختیار خرید اروپایی SDE مدل هستون کارا تر است.

همچنین با توجه جدول (2) متوجه خواهیم شد که زمان محاسبات در SFEM و FEM قیمت گذاری اختیارخرید اروپایی مدل هستون نسبت به روش های دیگر بهتر هستند. پس می توان گفت روش اجزا متناهی در SDE و PDE مدل هستون، روش مناسب تری از جهت مدت زمان محاسبات است.

٦- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله ، ابتدا با استفاده از طرح کرانک-نیکلسون FEM و طرح کرانک - نیکلسون FDM در PDE ، برا ی اختیار خرید اروپایی مدل هستون را بررسی کردیم و مشاهده کردیم که روش کرانک-نیکلسون FEM برای این مدل دقیق تر و از جهت زمانی مناسب تر است و سپس با استفاده طرح اویلر و طرح اویلر SFEM در SDE، برا ی اختیار خرید اروپایی مدل هستون نتیجه گرفتیم که طرح گسسته سازی اویلر SFEM برای تقریب کارا تر است.

در ادامه این کار می توان سرعت همگرایی و جذر میانگین مربعات خطا را در داده های مختلف و روش های متفاوت مورد بررسی قرار داد.

منابع

[1] Fischer Black and Myron Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, The journal of political economy, (1973), pp. 637–654.
[2] A. Quarteroni and A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer series in computational mathematics, Springer, 2009.
[3] Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report . Bruno Sudret. Armen Der Kiureghian. 2000.
[4] Xi Chen , John Burkardt and Max Gunzburger. High Accuracy Finite Element Methods for Option Pricing under Heston's Stochastic Volatility Model 2019
[5] Changwei Xiong, Valuation of double barrier european options in hestons stochastic volatility model using finite element methods, master's thesis, Rutgers University, 2013.
[6] Gunter Winkler, Thomas Apel, and Uwe Wystup, Valuation of options in Heston's stochastic volatility model using finite element methods, Foreign Exchange Risk. Risk Publications, London, (2001), pp. 278–313.
[7] Euler scheme for the variance, quadratic exponential (QE) scheme,378–380.
[8]روش المانهای محدود برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی .آمنه اسمعیلی وند.۱۳۹۱.