روش‌های بدون شبکه در قیمت گذاری اختیارها

فاطمه مرادی [a]، سیما مشایخی [b]

[a] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک

[b] استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک

فاطمه مرادی (۰۹۳۷۱۰۸۰۹۱۸ و fatimamoradi217@gmail.com)

چکیده: قیمت یک قرارداد اختیار را می‌توان با استفاده از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بلک-شولز به دست آورد. هرچند اکثر مدل های مشتقات مالی دارای جواب‌های تحلیلی هستند، اما معمولا می توان به سادگی آنها را به دست آورد. بنابراین روش‌های عددی گزینه مناسبی برای یافتن تقریبات عددی از آنهاست. روش های عددی گوناگونی برای تعیین قیمت اختیارها در صنعت و همچنین در دنیای آکادمیک وجود دارد، از جمله متداول‌ترین این روش‌ها می توان به روش‌های مونت کارلو، تفاضلات متناهی، اجزای محدود و بدون شبکه اشاره کرد. روش های بدون شبکه بر پایه توابع پایه شعاعی در مقایسه با روش های تفاضلات متناهی نیاز به تولید شبکه ندارد و می تواند روش دقیق تر و پایدارتری برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد. در این مقاله یک اختیار اروپایی و یک اختیار با مانع را با استفاده از روش بدون شبکه با توابع پایه شعاعی مختلف قیمت‌گذاری و آنها را از جهت دقت تقریب مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: روش های بدون شبکه؛ اختیاراروپایی؛ اختیار با مانع؛ معادله بلک-شولز.

۱. مقدمه

یکی از انواع اختیارات وانیلی اختیار اروپایی است که عبارت است از قراردادی که به خریدار حق خرید (call) یا فروش (put) یک دارایی پایه را با قیمت تعیین شده (قیمت اعمال) در تاریخ معین (زمان سررسید) می دهد. یک اختیار نامتعارف اختیاری است که دارای ویژگی های بیشتری نسبت به اختیارهای وانیلی است. یک مثال از اختیارهای نامتعارف اختیارهای بامانع هستند، که با رسیدن قیمت دارایی پایه به مانع، اختیار با ارزش (یا بی ارزش) می شود. یک فرمول تحلیلی برای ارزیابی ارزش اختیارهای خرید و فروش وجود دارد، بلک و شولز [1] نشان دادند که ارزش اختیارها را می توان با استفاده حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی به دست آورد که به عنوان معادله بلک-شولز شناخته می شود.

اخیرا روش های بدون شبکه RBF برای حل عددی معادله بلک-شولز مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. به عنوان مثال، فاشور و همکاران [2]و[3]حل عددی اختیار آمریکایی با استفاده از روش های بدون شبکه RBF را مورد بررسی قرار دادند. هون [4] و هون و ماو [5] از RBF ها برای تبدیل معادله بلک-شولز به یک دستگاه معادلات مرتبه اول در زمان به منظور اعمال روش های عددی همچون روش رانگه-کوتا مرتبه چهارم بر روی آن بهره گرفتند. همچنین آنها نشان دادند که این روش همچون روش های تفاضلات متناهی نیاز به تولید شبکه ندارند و از آنجایی که RBFها بی نهایت بار به طور پیوسته مشتق پذیر هستند، مشتقات مراتب بالاتر ارزش اختیار را می توان مستقیما با استفاده از مشتقات RBF ها به سادگی به دست آورد. همچنین بهینه سازی پارامترهای روش های بدون شبکه توسط پترسون و همکاران [6] بررسی شده است. کوک و همکاران [7] ، گوتو و همکاران [8] و مارکوزی و همکاران [9] نیز تقریب RBF برای ارزش اختیارها را مورد بررسی قرا دادند.

در این مقاله به رویکرد تابع پایه شعاعی بدون شبکه RBF به عنوان یک تقریب مکانی برای حل عددی ارزش اختیارهای اروپایی و اختیارهای بامانع می پردازیم. ابتدا معادله بلک-شولز را مورد بررسی قرار می دهیم و اختیار های اروپایی وانیلی و نامتعارف با مانع را شرح می دهیم. در بخش ۳ به روش های بدون شبکه و RBF ها می پردازیم و چهار نوع RBF را مورد بررسی قرار می دهیم در بخش ۴ معادله بلک _شولز را گسسته سازی می کنیم. در بخش ۵ دو نوع اختیار وانیلی و نامتعارف را به روش بدون شبکه با چهار RBF مختلف قیمت گذاری می کنیم و آنها را از جهت دقت تقریب مقایسه می کنیم و در بخش آخر نتایج حاصل، گزارش و نتیجه گیری می شود.

۲. قیمت گذاری اختیارها

۱,۲. اختیارهای اروپایی

ارزش اختیارهای خرید و فروش اروپایی با فرض ریسک خنثی بودن قیمت دارایی پایه با استفاده از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی زیر به نام معادله بلک-شولز به دست می آید:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,(S,t)\in(0,S_{max})\times[0,T] \quad (۱)$$

که در آن V ارزش اختیار در زمان t و دارایی پایه با قیمت S می باشد و r نرخ بهره ریسک خنثی، σ نوسانات قیمت دارایی و T زمان سررسید قرارداد اختیار است. شرط نهایی در زمان سررسید T به صورت زیر است:

$$V(S,T)=\begin{cases}\max\{S-K,0\} & ,call\ option\\ \max\{K-S,0\} & ,put\ option\end{cases} \quad (۲)$$

با شرایط مرزی زیر:

$$V(0,t)=\begin{cases}0 & ,call\ option\\ Ke^{-r(T-t)} & ,put\ option\end{cases} \quad (۳)$$

$$V(S_{\max},t)=\begin{cases}S_{\max}-Ke^{-r(T-t)} & ,call\ option\\ 0 & ,put\ option\end{cases} \quad (۴)$$

جواب تحلیلی معادله فوق برای ارزش اختیار خرید اروپایی به صورت زیر است:

$$V(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (۵)$$

که در آن N(.) تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است و

$$d_{1,2}=\frac{\log\frac{S}{K}+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (۶)$$

و با توجه به رابطه اختیار خرید C(S,t) و فروش P(S,t) اروپایی به صورت زیر، ارزش اختیار فروش اروپایی نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$S+P(S,t)-C(S,t)=Ke^{-r(T-t)} \quad (۷)$$

۲،۲. اختیارهای با مانع

یکی از انواع اختیارات نامتعارف، اختیارهای بامانع است. با توجه به اینکه اختیارهای بامانع انعطاف پذیری بیشتری دارند، بیشتر مورد توجه قرار می گیرند. اختیار های با مانع می توانند اختیارهای "knock-out" یا "knock-in" باشند. اختیار knock-out می‌تواند اعمال شود مگر اینکه قیمت دارایی S قبل از سررسید به مانع E برسد. . اختیار knock-in می‌تواند اعمال شود اگر قیمت دارایی S قبل از سررسید از مانع E عبور کند.

اختیار های knock-out را می توان به دو اختیار " up-and-out " و " down-and-out " طبقه بندی کرد . اگر قیمت دارایی پایه قبل از زمان سررسید از پایین به مانع E برسید، اختیار " up-and-out " بی ارزش می شود و اگر قیمت دارایی پایه قبل از زمان سررسید از بالا به مانع E برسید، اختیار "-down and-out" بی ارزش می شود. اختیار های knock-in را می توان به اختیار های " up-and-in " و " down-and-in " طبقه بندی کرد . اختیار up-and-in بی ارزش است مگر اینکه قیمت دارایی پایه قبل از زمان سررسید از پایین به مانع E برسد. اختیار " down-and-out " ارزش ندارد مگر اینکه قیمت دارایی پایه قبل از زمان سررسید از بالا به مانع E برسید.

اختیار down-and-out را با قیمت اعمال K و مانع E در نظر بگیرید قیمت این اختیار در رابطه زیر صدق می کند :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 & S<E \\ V=0 & S\le E \end{cases} \tag{8}$$

با شرط نهایی:

$$V(S,t)=\max(S(T)-K,0) \tag{9}$$

در نتیجه ، تابع بازده X به صورت زیر است :

$$X=\begin{cases} \max(S(T)-K,0) & ,S>E \\ 0 & ,S\le E \end{cases} \tag{10}$$

۳. روش های بدون شبکه

محاسبه داده ها با ابعاد بالا در بسیاری از حوزه های علمی مسئله مهمی است اما بسیاری از روش های عددی مرسوم مبتنی بر شبکه نمی توانند از پس چنین مشکلاتی برآیند. هنگامی که با تغییر هندسه حوزه مورد نظر مواجه می شویم، روش های بدون شبکه فرصت مناسب تری نسبت به تکنیک های کلاسیک گسسته سازی مانند تفاضلات متنهاهی و اجزای متناهی هستند، علاوه براین، گسسته سازی بدون شبکه از شبکه مستقل است، زیرا این تکنیک ها فقط بر اساس مجموعه ای از نقاط مستقل است. مسئله برازش داده های پراکنده یکی از مشکلات اساسی در تئوری تقریب و به طورکلی مدل سازی داده است ، از طرفی تقریب بدون شبکه برای PDEها نیز می تواند اعمال شود.

۱,۳. توابع پایه شعاعی:

تابع $\Phi(X)=\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ شعاعی نامیده می شود هرگاه تابع تک متغییره $\varphi:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ چنان موجود باشد که $\Phi(X)=\varphi(r)$ بطوریکه $r=\|X\|$ و $\|.\|$ روی $\mathbb{R}^d$ یک نرم است. این تعریف نشان می دهد که یک تابع شعاعی Φ دارای ویژگی زیر است:

اگر $\|x_1\|=\|x_2\|$ آنگاه برای هر x_1 و x_2 متعلق به $\mathbb{R}^d$ داریم $\Phi(x_1)=\Phi(x_2)$ و همچنین تابع تک متغییره φ را تابع شعاعی معیین مثبت روی $\mathbb{R}^d$ می گوییم اگرو فقط اگر تابع چند متغییره Φ معیین مثبت روی $\mathbb{R}^d$ باشد.

توابع پایه شعاعی به روش های مختلفی دسته بندی می شوند در این نوشتار تقسیم بندی توابع پایه ای شعاعی را به صورت توابع پایه ای هموار (بینهایت مشتق پذیر) و توابع پایه ای شعاعی قطعه ای هموار درنظر می گیریم. در اینجا چهار نوع تابع پایه شعاعی متفاوت زیر را برای حل عددی معادله بلک-شولز در روش بدون شبکه مورد بررسی قرار می دهیم:

چند ربعی MQ: (multi quadric)

$$\varphi(r)=\sqrt{(1+(\varepsilon r)^2)} \tag{11}$$

ربعی معکوس IQ : (Inverse quadratic)

$$\varphi(r)=\frac{1}{1+(\varepsilon r)^2} \tag{12}$$

چند ربعی معکوس IMQ : (Inverse multiquadric)

$$\varphi(r)=\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}} \qquad (13)$$

چند ربعی ماترن :(Quadratic Matern)

$$\varphi(r)=e^{\varepsilon r}(3+3\varepsilon r+(\varepsilon r)^2) \qquad (۱۴)$$

۴. گسسته سازی

اگر عمگر دیفرانسیل در معادله (۱) به صورت زیر خلاصه شود:

$$F_1=\frac{1}{2}\delta^2 S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+rS\frac{\partial}{\partial S}-r \qquad (۱۵)$$

آنگاه PDE (۱) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}+F_1V(S,t)=0 \qquad (۱۶)$$

که یک PDE پسرو در زمان با شرط نهایی ۲ یا ۱۰ است. با بکار گیری از روش θ برای گسسته سازی زمان در معادله (۱۶) خواهیم داشت:

$$\frac{V(S,t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}+(1-\theta)F_1V(S,t+\Delta t)+\theta F_1V(S,t)=0 \qquad (۱۷)$$

که $0\le\theta\le 1$ پارامتر ضمنی را نشان می دهد، پس از تجدید آرایش عبارات در (۱۷) داریم :

$$[1+(1-\theta)\Delta t.F_1].V(S,t+\Delta t)=[1-\theta.\Delta t.F_1].V(S,t) \qquad (۱۸)$$

یعنی

$$H_1.V(S,t+\Delta t)=G_1.V(S,t) \qquad (۱۹)$$

که

$$H_1=1+(1-\theta)F_1 \quad , \qquad G_1=1-\theta.\Delta t.F$$

تابع پایه شعاعی چند ربعی (MQ) برای تقریب ارزش اختیار V(S,t) به صورت زیر تعریف می شود [8] :

$$\phi(S,S_j)=\sqrt{C^2+\|S-S_j\|^2} \qquad (۲۰)$$

که S_j قیمت دارایی در نقطه محل j برای تقریب ارزش اختیار V است. $\|S-S_j\|$ فاصله شعاعی هر یک از N نقاط پراکنده S_j را نشان می دهد، پارامتر C مثبت است و به عنوان پارامتر شکل شناخته می شود. مقدار C بر پایداری و دقت تقریب اثر دوگانه دارد : هر چه C افزایش یابد دقت نیز افزایش

می یابد اما فقط به قیمت بد وضع شدن ماتریس RBF می انجامد ، این تاثیر به عنوان اصل بده بستان شناخته می شود.

بنابرین تقریب ارزش اختیار V(S,t) با استفاده از تابع پایه شعاعی به صورت زیر است:

$$V(S,t) \simeq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^t . \varphi(S, S_j) \qquad (۲۱)$$

که N تعداد کل نقاط هم محل در زمان t است ، λ_j^t پارامتر های مجهول وابسته به زمان t ، $\lambda_j^t = \lambda_j^t(t)$ ، $\lambda_j^{t+\Delta t} = \lambda_j^t(t+\Delta t)$ که Δt اندازه گام زمانی است.

بعد از جایگزینی معادله(۲۱) در معادله ی (۱۸)خواهیم داشت :

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{t+\Delta t} H_1 . \varphi(S, S_j) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^t . G_1 . \varphi(S, S_j) \qquad (۲۲)$$

با شروع از شرط نهایی (۲) ، ضرایب λ با استفاده از روش پسرو در زمان در هر گام زمانی $T\text{-}\Delta t$ حاصل می شود.

۵. نتایج عددی

در اینجا نتایج آزمایشات عددی را باتوجه به روش عددی که توضیح داده شد ارائه می دهیم.
یک اختیار خرید اروپایی و یک اختیار خرید Down_And_Out را با مانع E که هر دو دارای قیمت اعمال K و زمان سررسید Tهستند درنظر می گیریم.
پارامترهای مورد استفاده در مثال عددی در جدول ارائه شده است . دو مقدار متفاوت برای شعاع C و چهار نوع RBF برای تقریب قیمت اختیار به کار می بریم.

جدول ۱. پارامترهای تجزیه و تحلیل عددی

بیشترین مقدار قیمت دارایی پایه	$S_{\max}$ =30
تعداد نقاط دارایی	M = 121
تعداد گام های زمانی	N = 100
زمان سررسید	T = 0.5
قیمت اعمال	K = 10
نرخ بهره ی بدون ریسک	r = 0.05
نوسانات	$\delta = 0.2$
شعاع	C = 0.01,1
مانع	E=9

نتایج عددی برای تقریبات RBFهای متفاوت در جدول های ۲ تا ۵ نشان داده شده است. دو نوع خطای محاسباتی $e_{\max}$ و e_{RMSE} برای تقریبات مختلف بررسی شده است که به ترتیب عبارتنداز ماکزیمم خطا ومیانگین مربعات خطا به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$e_{RMSE} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\left|V(S_j,t)_{RBF} - V(S_j,t)_{Analytical}\right|^2)} \qquad (۲۳)$$

$$e_{RMSE} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\left|V(S_j,t)_{RBF} - V(S_j,t)_{Analytical}\right|^2)} \qquad (۲۴)$$

جدول ۲. ماکزیمم خطا برای اختیار خرید اروپایی

C	MQ_max	IQ_max	IMQ_max	Qmat_max
۰٫۰۱	۰٫۶۴۱۵	۰٫۶۴۰۴	۰٫۶۴۰۵	۰٫۶۴۱۵
۱	۰٫۸۳۷۵	۰٫۶۷۸۶	۰٫۷۰۵۱	۰٫۸۳۵۷

جدول ۳. خطای کمترین مربعات برای اختیار خرید اروپایی

C	MQ_RMSE	IQ_ RMSE	IMQ_ RMSE	Qmat_ RMSE
۰٫۰۱	۰٫۲۶۷۷	۰٫۲۶۵۸	۰٫۷۰۵۱	۰٫۲۶۷۷
۱	۰٫۵۹۶۶	۰٫۲۸۸۷	۰٫۳۱۱۲	۰٫۵۹۶۶

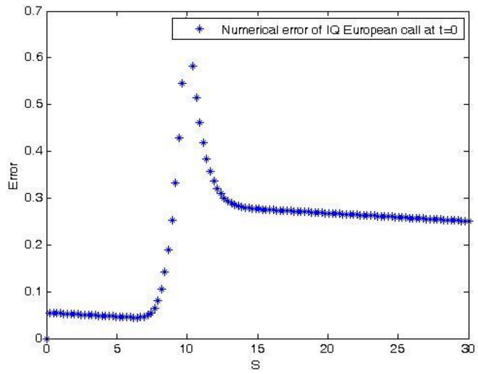
جدول ۴. ماکزیمم خطا برای اختیار خرید بامانع

C	MQ_max	IQ_max	IMQ_max	QMat_max
۰٫۰۱	۰٫۹۰۱۸	۰٫۹۰۰۸	۰٫۹۰۰۹	۰٫۸۹۵۴
۱	۱٫۰۹۶۰	۰٫۹۰۰۸	۰٫۹۶۵۵	۰٫۹۱۳۳

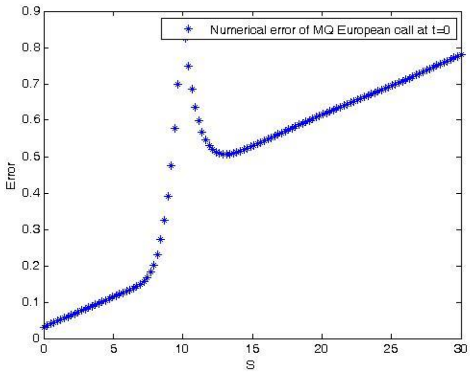
جدول ۵. خطای کمترین مربعات برای اختیار خرید بامانع

C	Qmat_RMSE	IMQ_RMSE	IQ_RMSE	MQ_RMSE
۰٫۰۱	۰٫۳۱۵۴	۰٫۳۲۴۲	۰٫۳۱۳۸	۰٫۳۱۴۱
۱	۰٫۶۲۴۹	۰٫۳۱۴۶	۰٫۳۵۶۱	۰٫۳۲۸۱

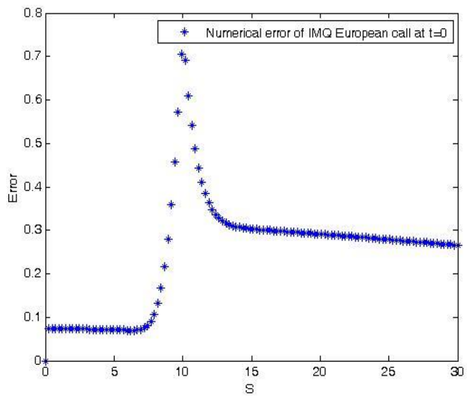
حال به بررسی منحنی های خطا برای اختیار خریدو اختیار بامانع Down_and_out با پارامتر C=1 می پردازیم.

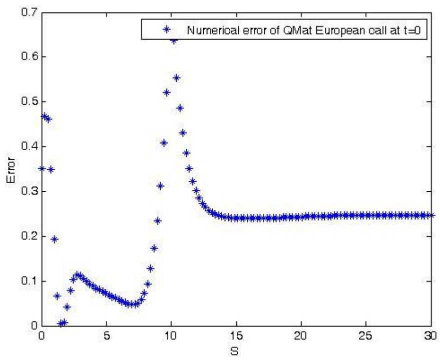


شکل۱.خطای IQ در اختیار خرید



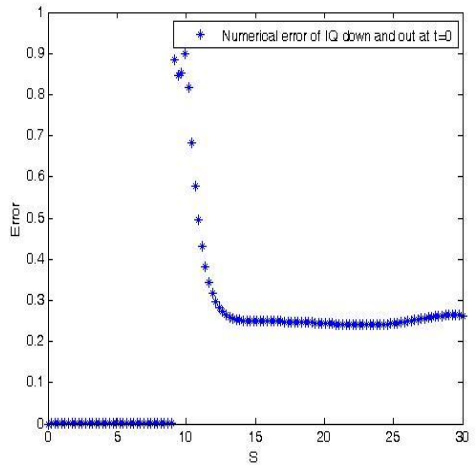
شکل۲.خطای MQ در اختیار خرید



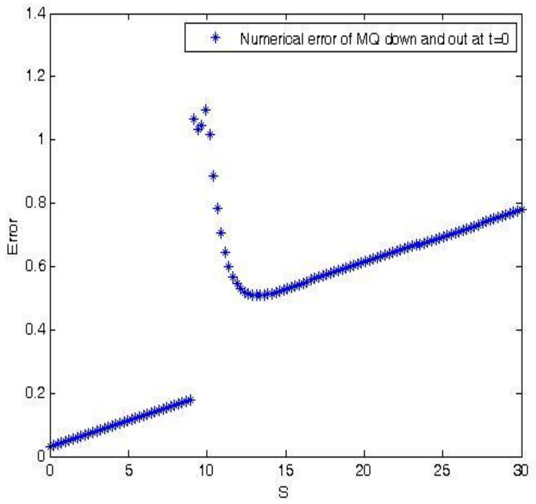


شکل۳.خطای IMQ در اختیار خرید

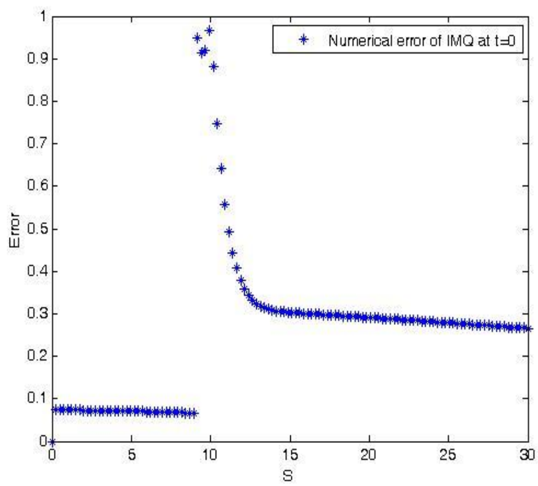
شکل۴.خطای Qmat در اختیار خرید



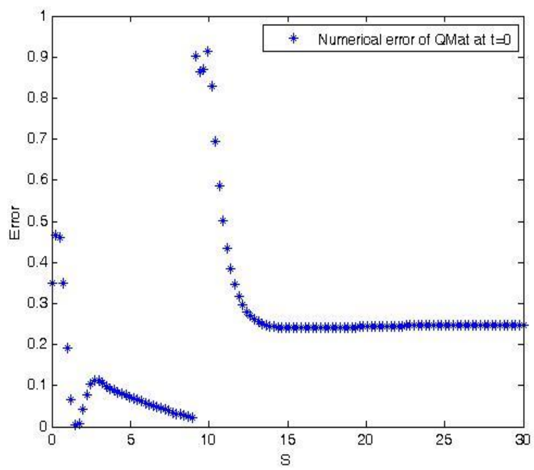
شکل۵.خطای IQ در اختیار بامانع



شکل۶. خطای MQ در اختیار بامانع



شکل۷. خطایIMQ در اختیار بامانع



شکل۸.خطای Qmat دراختیار بامانع

۶.نتیجه گیری

در این مقاله اختیار های اروپایی و بامانع را از طریق روش RBF تجزیه و تحلیل کردیم تا ارزش تقریبی قیمت اختیار را بدست آوریم. از آنجا بازارهای مالی روز به روز پیچیده تر می شوند استفاده از روشهای دقیق و سریع با نیاز به حافظه بسیار پایین ضروری است .

در این مطالعه علاوه بر تابع شعاعی چند ربعی، انواع دیگری از RBF ها مانند ربعی معکوس، چند ربعی معکوس و چند ربعی متقارن را مورد بررسی قرار دادیم. تقریب RBF با RBF های بی نهایت هموار می تواند از نظر طیفی دقیق باشد، این بدین معناست که تعداد نقاط گره مورد نیاز برای یک دقت دلخواه نسبتاً کم است. علاوه بر این، این روش دارای ماهیت بدون شبکه است که استفاده از آن در ابعاد بالاتر را آسان می کند. این روش ها برخلاف الگوریتم های شبیه سازی مرسوم از هندسه هدف شبیه سازی شده به طور مستقیم برای محاسبات استفاده می کند. همانطور که در بخش قبل مشاهده کردیم نتایج به دست آمده برای تقریب ارزش اختیار با روش بدون شبکه به انتخاب RBF بستگی دارد. در تحقیقات آتی، می توانیم تأثیر پارامترهای مختلف را در دقت روش بررسی کنیم به ویژه برای پیدا کردن مقدار بهینه پارامتر c. همچنین بسیار جالب خواهد بود کهRBF هایی را بیابیم که نتایج بهتری نسبت به RBF های قبلی نتیجه دهد .

منابع:

[1] Black, F & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Political Economy, 81, 637 – 655.

[2] Fasshauer, G.E & Khaliq, A.Q.M. &Voss, D.A. (2004). Using Meshfree Approximation for Multi-Asset American Options. J. Chinese Inst. Eng., 27, 563 – 571

[3] Fasshauer, G.E & Khaliq, A.Q.M. & Voss, D.A. (2004). A parallel time stepping approach using meshfree approximations for pricing options with non-smooth payofs. Proceedings of Third World Congress of the Bachelier Finance Society, Chicago.

[4] Hon , Y.C & Mao, X.C . (1999). A radial basis function method for solving options pricing model. J. Financial Engineering, 8, 1 – 24.

[5] Hon , Y.C. (2002). A quasi-radial basis functions method for American options pricing. Comput. Math. Appl., 43, 513 – 524.

[6] Pettersson, U & Larsson, E.G. & Marcusson, & Persson, J. (2005). Option Pricing using Radial Basis Functions. ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods,

[7] Koc, M.B & Boztosum, I & Boztosum, D. (2003). On the numerical solution of Black-Scholes equation. Proceedings of international workshop on Meshfree method, Lisbon, Portugal, 6 – 11.

[8] Goto, Y & Fei, Z & Kan, S & Kita, Z. (2007). Options valuation by using radial basis function approximation. Engrg. Anal. Bound. Elem., 31, 836 – 843.

[9] Marcozzi, M.D & Choi, S & Chen , C.S. (1994). RBF and optimal stopping problems; an application to the pricing of vanilla options on one risky asset. Boundary Element Technology XIV, C.S. Chen et al. (eds.), Computational Mechanics Publications, 345 –354.