کاربرد روش های کنترل کلاسیک در بهینه‌سازی سبد سهام

مهدی خاکدامن

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق کنترل – دانشگاه شاهد تهران

دکتر محمد منثوری

mahdi.khak2017@gmail.com

چکیده

تعیین پرتفولیو[1] یا پرتفوی بهینه یک مساله مهم برای سرمایه گذاران در بازارهای مالی داخلی و بین المللی به شمار می رود. از این رو میتوان مدیریت سرمایه در یک پرتفوی را به عنوان یک مساله کنترل بهینه پویا در نظر گرفت و با استفاده از روش های پیش بینی و بهینه سازی قیمت سهام در زمان های آینده، عمکرد معاملاتی قابل قبول حاصل شود. در این پژوهش، مروری بر تحقیقات و منابع ارائه شده در سالهای اخیر، در زمینه روش های آماری و تخمینی از جمله فیلتر کالمن - حرکت براونی هندسی[2] به جهت پیش بینی آینده قیمت سهام و همچنین کنترل پیش بین مدل[3] برای حل مساله بهینه سازی پرتفوی سهام، خواهیم داشت.

در ابتدا ، مقدمه ای بر موضوع مورد بررسی بیان شده است. سپس مفاهیم پایه و تعاریف مورد نیاز برای درک بهتر منابع بررسی شده، ارائه گردیده است. در ادامه، مقالات و سایر منابع بکار برده شده در این پژوهش آورده شده است. در پایان نیز یک جمع بندی از بررسی های صورت گرفته ارائه شده است.

کلید واژه: پرتفولیو، فیلتر کالمن، حرکت براونی هندسی، کنترل پیش بین مدل

۱- مقدمه و اهمیت موضوع

امروزه افزایش میزان سود و کاهش ریسک سرمایه گذاری در بازارهای مالی همیشه مهمترین دغدغه سرمایه گذاران بوده است و آنها همواره به دنبال راهی هستند که بهترین پیشنهاد را برای خرید سهام داشته باشند به گونه ای که دارای بیشترین بازده و کمترین ریسک سرمایه گذاری باشد. تحقیقات زیادی در این رابطه انجام شده است و مدل ریاضی میانگین واریانس

[1] Portfolio
[2] GBM - KF
[3] Model Predictive Control

مارکویتز[۴] به عنوان یکی از اصلی ترین کارهای این حوزه شناخته می شود. علیرغم اهمیت این مدل، چندین پژوهش عنوان کرده اند که با توجه به ماهیت بازارهای مالی کنونی، واریانس ممکن است بهترین گزینه ریسک سرمایه گذاران نباشد و بهتر است معیارهای دیگری چون چولگی، فیلتر کالمن - حرکت براونی هندسی و... نیز درنظر گرفته شود. از سوی دیگر ما معتقدیم که یک برنامه سرمایه گذاری مانند انتخاب سبد سهام نه تنها باید ماحصل گذشته سهام را در نظر داشته باشد بلکه بایستی پتانسیل آتی سهام را نیز مد نظر قرار دهد، که این امر اهمیت پیش بینی قیمت سهام برای سرمایه گذاران را آشکار میسازد.

۲- هدف از انجام پژوهش

در این پژوهش با استفاده از روش فیلتر کالمن - حرکت براونی هندسی که در ادامه به تعریف مفاهیم و اصطلاحات آن به طور کامل میپردازیم، پیش بینی بر اساس داده های گذشته (توسط روش براونی هندسی یا GBM) و تخمین متغیرهای حالت سیستم (توسط فیلتر کالمن یا KF) انجام شده است. با ادغام روش فیلتر کالمن در مدل GBM، دقت پیش‌بینی موردنظر می‌تواند بهبود یابد. بطور کلی ما به دنبال حداکثرسازی بازده و حداقل سازی ریسک و تعداد دارایی ها در پورتفوی سرمایه گذاری هستیم.

ممکن است این سوال پرسیده شود که کاربرد کنترل پیش بین مدل یا MPC به چه صورت است؟ 2
پاسخ اینگونه است که برای حل مشکل بهینه سازی پورتفوی، MPC با به حداقل رساندن تابع هدف و ادغام همه متغیرها در یک تابع هدف واحد، سعی دارد بهترین نتیجه موردنظر بدست آید.

۳-۱-۳ روش مطالعاتی

در این پژوهش، مروری بر تحقیقات و منابع ارائه شده در سال های اخیر، در زمینه روش های پیش بینی و بهینه سازی پورتفوی سهام انجام گرفته است. این منابع شامل تعدادی مقاله، نشریه، پایان نامه، کتاب و سایتهای معتبر اینترنتی می باشد.

۴-۱-۴ ساختار کلی مطالب

در این فصل، موضوعات و دیدگاه کلی و اهداف مربوط به موضوع مورد بررسی، مطرح شد.
در فصل دوم مفاهیم پایه و تعاریف مورد نیاز برای درک بهتر منابع بررسی شده، ارائه گردیده است.
در ادامه، مقالات و سایر منابع بکار برده شده در فصل سوم این پژوهش آورده شده است. در فصل چهارم نیز یک جمع بندی از بررسی های صورت گرفته ارائه شده است.

---
[۴] Markowitz Mean-Variance

-5 مفاهیم پایه و تعاریف

۵- ۲-۱ فیلتر کالمن چیست؟

هر جایی که اطلاعات نامعینی درباره یک سیستم دینامیکی داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از فیلتر کالمن تخمین مناسبی از تغییرات سیستم در آینده ارائه کنیم. فیلترهای کالمن برای سیستم‌هایی که مدام در حال تغییرند، ایده‌آل هستند. مزیت فیلترهای کالمن این است که به حافظه کمی نیاز دارند، زیرا به حافظه‌ای جز برای نگهداری اطلاعات وضعیت‌های قبلی نیاز ندارند. همچنین این فیلترها بسیار سریع هستند و به همین دلیل برای مسائل زمان حقیقی و سیستم‌های تعبیه‌ای مناسب هستند.

فیلتر کالمن[۵]که به عنوان تخمین خطی مرتبه دوم نیز از آن یاد می‌شود، الگوریتمی است که حالت یک سیستم پویا را با استفاده از مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های شامل خطا در طول زمان برآورد می‌کند. این فیلتر معمولاً تخمین دقیق‌تری را نسبت به تخمین بر مبنای یک اندازه‌گیری واحد را بر مبنای استنباط بیزی و تخمین توزیع احتمال مشترکی از یک متغیر تصادفی در یک مقطع زمانی ارائه می‌کند. نام این فیلتر از نام رودولف ئی کالمن، یکی از پایه‌گذاران این تئوری گرفته شده‌است. فیلتر کالمن کاربردهای بسیاری در علم و فناوری مانند مسیریابی و پایش وسایل نقلیه، به خصوص هواپیما و فضاپیماها، دارد. فیلتر کالمن مفاهیم گسترده‌ای را در زمینه سری‌های زمانی، پردازش سیگنال و اقتصادسنجی مطرح می‌کند. این فیلتر از مفاهیم پایه در زمینه برنامه‌ریزی و پایش ربات‌ها و همچنین مدلسازی سیستم عصبی محسوب می‌شود. بر اساس تأخیر زمانی میان ارسال فرامین و دریافت پاسخ آن‌ها، استفاده از فیلتر کالمن در تخمین حالات مختلف سیستم را ممکن می‌سازد.

این الگوریتم در دو گام اجرا می‌شود. در گام پیش‌بینی، فیلتر کالمن تخمینی از وضعیت فعلی متغیرها را در شرایط عدم قطعیت ارائه می‌کند. زمانی که نتیجه اندازه‌گیری بعدی بدست آید، تخمین قبلی با میانگین وزن‌دار آپدیت می‌شود. به این ترتیب که وزن اطلاعاتی که دارای قطعیت بیشتری هستند، بیشتر خواهد بود. فیلتر کالمن بازگشتی می‌باشد و با استفاده از ورودی‌های جدید و حالات محاسبه شده ی قبلی به‌صورت بی‌درنگ اجرا می‌شود. یعنی تنها تخمین حالت قبل و مشاهده فعلی برای محاسبه تخمین حالت فعلی لازم است. برعکس بسیاری از تخمین‌گرها نیازی به نگهداری اطلاعات تخمین‌ها و مشاهدات تمام حالات قبل نیست. درمورد ورودی‌های فیلتر کالمن نمی‌توان بیان کرد که تمام خطاها گوسی هستند. اما در عمل فیلتر، برآوردهای احتمالاتی را با فرض توزیع طبیعی داشتن انجام می‌دهد. فیلتر کالمن توسط یک معادله بیان می‌شود اما معمولاً آن را به دو بخش پیش‌بینی و آپدیت تفکیک می‌کنند. در گام پیش‌بینی با استفاده از تخمین‌های حالات در بازه‌های زمانی پیشین، تخمینی برای حالت فعلی بدست می‌آید. این تخمین پیش‌بینی شده همان دانش پیش بینی است زیرا تنها به تخمین‌های قبلی وابسته است و هیچ مشاهده‌ای در حالت فعلی سیستم را در برنمی‌گیرد.

در گام آپدیت، تخمین پیشین با مشاهدات فعلی ترکیب می‌شود تا تخمینی از حالت فعلی سیستم ارائه کند. معمولاً این دو گام متناوباً تکرار می‌شوند، به این معنی که پیش‌بینی تا مشاهده بعدی انجام می‌شود و سپس با استفاده از مشاهدات فعلی آپدیت انجام می‌شود. اگر در بازه زمانی مشاهده‌ای انجام نشود، پیش‌بینی‌ها تا مشاهده بعدی انجام می‌شوند و آپدیت بر مبنای چند مرحله پیش‌بینی انجام می‌شود.

فیلتر کالمن یک فیلتر خطی بهینه است زیرا:

الف) مدلسازی آن با دقت بالایی بر سیستم اصلی منطبق است.

ب) نویز ورودی، نویز سفید ناهمبسته است.

[۵] Kalman filter

ج) مقدار کوواریانس نویز قابل محاسبه است.
روش‌های بسیاری از جمله روش حداقل مربعات اتوکوواریانس که در بالا به آن اشاره شد برای تخمین کوواریانس نویز ارائه شده‌اند. پس از تخمین کوواریانس لازم است کارایی سیستم ارتقا یابد. این بدین معنی است که تخمین حالات سیستم دقیق‌تر شوند. اگر فیلتر کالمن بهینه باشد، نویز ورودی نویز سفید است که محاسبه کارایی سیستم را ممکن می‌سازد.

۶- ۲-۱-۱ کاربرد فیلتر کالمن

فرض کنید ربات کوچکی ساخته‌ایم که می‌تواند آزادانه در یک جنگل حرکت کند. این ربات برای آنکه مسیریابی کند، باید بداند دقیقاً در کجا قرار گرفته است.

وضعیت یا حالت (State) ربات را با بردار $\overrightarrow{Xk}$ نشان می‌دهیم که شامل بردارهای موقعیت (Position) و سرعت (Velocity) است:

$$\overrightarrow{Xk} = (\mathrm{p}\,,\mathrm{v}) \qquad (1-2)$$

حالت یا بردار حالت، شامل اعدادی است که پیکربندی سیستم را نشان می‌دهند. در مورد این ربات، حالت شامل موقعیت و سرعت است. برای مثال، حالت یک سیستم می‌تواند اطلاعاتی درباره مقدار سیال یک مخزن، دمای موتور خودرو، موقعیت انگشت کاربر روی صفحه لمسی یا هر مورد دیگری باشد که ما بسته به نیاز، آن را در نظر می‌گیریم.
رباتی که درباره آن بحث کردیم، یک سنسور GPS با دقت تقریباً ۱۰ متر دارد که مقدار تقریباً مناسبی است. اما لازم است موقعیت ربات به صورت دقیق‌تر و کمتر از ۱۰ متر نیز در اختیار باشد، زیرا در جنگل صخره‌ها و گودال‌هایی وجود دارد و اگر ربات چند قدم اشتباه گام بردارد، ممکن است مثلاً درون گودالی بیفتد و دچار مشکل شود. بنابراین، وجود GPS به تنهایی برای مسیریابی ربات کافی نیست.
ممکن است چیزهای دیگری نیز درباره ربات بدانیم. مثلاً می‌دانیم فرمان‌هایی به موتور چرخ‌ها ارسال می‌شود و همچنین، اگر ربات در جهت خاصی حرکت کند و مشکلی برایش پیش نیاید، همان جهت حرکت قبلی را ادامه خواهد داد. اما اطلاعاتی درباره حرکت ربات در دست نیست؛ بنابراین، تعداد دور چرخ‌های ربات، نمی‌تواند دقیقاً تعیین کند که چه اندازه حرکت کرده است و در نتیجه، پیش‌بینی کامل نخواهد بود.
سنسور GPS اطلاعاتی را درباره حالت ربات به ما می‌دهد که البته غیرمستقیم بوده و اصطلاحاً نامعینی‌هایی دارد. پیش‌بینی ما نیز، اطلاعاتی را درباره چگونگی حرکت ربات به دست می‌دهد که غیرمستقیم بوده و با نایقینی یا نامعینی همراه است.
حال سوال این است که آیا اگر از همه اطلاعات در دسترس استفاده کنیم، می‌توانیم پاسخ بهتری نسبت به تخمینی که خود اطلاعات ارائه می‌کنند داشته باشیم؟ پاسخ مثبت است و این دقیقاً همان کاری است که فیلتر کالمن انجام می‌دهد.

۷- ۲-۱-۲مسئله از دیدگاه فیلتر کالمن

حالت ساده‌ای را در نظر بگیرید که فقط از موقعیت و سرعت تشکیل شده است:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} \qquad (2-2)$$

موقعیت و سرعت واقعی را نمی‌دانیم و طیف وسیعی از ترکیب‌های موقعیت و سرعت وجود دارند که می‌توانند درست باشند، اما تعدادی از آن‌ها نسبت به سایرین به واقعیت نزدیک‌ترند.

در فیلتر کالمن، فرض می‌شود که دو متغیر (در مثال ما، موقعیت و سرعت) تصادفی هستند و به صورت **گوسی** توزیع شده‌اند. هر متغیر یک مقدار **میانگین**[۶] با نماد μ دارد که مرکز توزیع تصادفی (محتمل‌ترین حالت) است. متغیرها یک مقدار **واریانس**[۷] با نماد σ^2 نیز دارند که معرف نامعینی است.

در واقع هدف فیلتر کالمن این است که می‌خواهد در حد امکان، اندازه‌گیری‌های نامعین را به عنوان اطلاعاتِ بیشتر، فشرده کند.

۸- ۲-۲ حرکت براونی هندسی (GBM)

استفاده از مدلهای مبتنی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی در سالیان اخیر مورد توجه پژوهشگران علوم مالی بوده است که یکی از معروفترین آنها مدل حرکت براونی هندسی (GBM) میباشد. نتایج پژوهشگران نشان داد که مدل حرکت براونی هندسی قادر است تا شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را در افق زمانی ۱ روزه با صحت بالا پیش بینی کند. از دیگر نتایج پژوهشگران این است که با افزایش افق زمانی پیش بینی، صحت مقادیر پیش بینی شده توسط مدل کاسته شده و توانایی مدل در شبیه سازی شاخص کاهش می یابد، با این حال تا افق پیشبینی ۹۰ روزه کماکان مقادیر پیش بینی شده از صحت بالایی برخوردار است.

۹- ۲-۲-۱ مطالعات پیشین و مقایسه روش GBM با روش های دیگر

تاکنون تحقیقات بسیاری در زمینه پیش بینی شاخص بازارهای مالی با استفاده از انواع مدل ها و از جمله، حرکت براونی هندسی انجام گرفته است. در مورد استفاده از مدل های غیر خطی در شبیه سازی شاخص و یا بازده آن پژوهشهای مختلفی صورت گرفته که به طور عمده نتایج این پژوهش ها بیانگر این موضوع بوده است که مدل های غیر خطی با کارایی بهتر و مناسب تر و با دقت بالاتری توان پیش بینی شاخص بورس را دارند.

به عنوان مثال در [1] با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی به پیش بینی قیمت سهام پرداخته شده است. هدف در این مقاله شناسایی بهترین دوره زمانی داده های تاریخی جهت تخمین پارامترهای مدل GBM و بهترین افق پیش بینی بود که با تمرکز بر ۴۰ شرکت بزرگ پذیرفته شده در بورس مالزی که از ۸ صنعت و از هر صنعت ۵ شرکت انتخاب شده بود، دریافتند استفاده از ۶۵ مشاهده روزانه تاریخی می تواند قیمت سهام را برای ۲۱ روز با صحت بالا پیش بینی نماید که در این حالت نتایج پیش بینی با استفاده از مدل GBM از صحت بالاتری نسبت به حالتهای دیگر برخوردار است.

همچنین "راعی و فلاح طلب" (۱۳۹۲) به تخمین ارزش در معرض ریسک شاخص کل بورس اوراق بهادار و پنج شرکت که به تصادف انتخاب شده بودند، پرداختند . آنها برای مدل سازی ارزش در معرض ریسک از سه شیوه استفاده کردند. اول، شبیه سازی مونت کارلو که بر مبنای گام های تصادفی و حرکت براونی هندسی انجام میگرفت؛ دوم، شبیه سازی تاریخی و سوم،

[۶] Mean
[۷] Variance

روش واریانس- کوواریانس. آنها برای مقایسه کارایی روش های سه گانه از نسبت خطا استفاده کردند. نتایج نشان داد بر اساس نسبت خطا بر اساس روش رویکردهای واریانس -کوواریانس و شبیه سازی تاریخی از عملکرد بهتری برخوردار بوده اند اما طبق روش بهترین جواب بر اساس نسبت خطا و همچنین معیار کمترین اختلاف از نسبت خطا، شبیه سازی مونت کارلو دارای کارایی بالاتری نسبت به روش های رقیب بوده است.

۱۰- ۲-۲-۲ مدل ریاضی حرکت براونی هندسی

معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی را می توان به صورت معادله زیرنشان داد:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \qquad (3-2)$$

که S بیانگر متغیر مورد مطالعه است که میتواند شاخص بازار، قیمت و یا هر متغیری باشد. و μ و σپارامترهای مدل است که باید برآورد شوند. W نیز فرآیند وینر یا حرکت براونی استاندارد است. معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی می بایست حل شود (با روش هایی نظیر "لم ایتو") تا جواب آن به دست آید.

۱۱- ۲-۲-۳ تخمین پارامترهای مدل

در مدل حرکت براونی هندسی نیاز به تخمین دو پارامتر است:

۱-نرخ رانش

۲-نوسانات مدل

۱۲- ۲-۲-۳-۱نرخ رانش

برای محاسبه نرخ رانش، از میانگین بازده پیوسته روزانه شاخص استفاده می شود:

$$R = \ln(St) - \ln(St-1) = \ln\left(\frac{St}{St-1}\right) \qquad (4-2)$$

که R بازده روزانه شاخص کل، S_t مقدار شاخص کل در روز t و S_{t-1} مقدار شاخص کل در روز t-1 است.

۱۳- ۲-۲-۳-۲ نوسانات

به منظور محاسبه عنصر نوسانات در مدل حرکت براونی هندسی از انحراف معیار بازده روزانه شاخص کل طبق رابطه زیر استفاده شده است:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{N}(Ri-\bar{R})^2}{N-1}} \qquad (5-2)$$

که σ انحراف معیار بازده روزانه شاخص کل و N تعداد روزهایی است که برای تخمین پارامتر استفاده می شود.

۱۴- ۲-۲-۴ مراحل به کارگیری مدل GBM

گام اول: با در نظر گرفتن افق زمانی تخمین پارامترها ، پارامترهای مدل GBM محاسبه می گردند و فرآیند محاسبه پارامترها با در نظر گرفتن طول افق های زمانی که قصد پیش بینی آن را داریم، تا انتهای سری زمانی ادامه می یابد. در انتها، بردارهای مختلف پارامترهای مدل GBM حاصل میگردد.
گام دوم: از ابتدای سری زمانی به ترتیب هر کدام از بردار پارامترهایی که در مرحله قبل محاسبه شدند، جهت پیش بینی افق های زمانی مورد نظر در مدل GBM به کارگرفته می شود.
گام سوم: به ازای هر بردار پارامتر برای هر افق پیش بینی، تعداد۱۰۰۰ مسیر تصادفی توسط مدل GBM ایجاد می شود.
گام چهارم: پیش بینی مقادیر شاخص در افق پیش بینی مورد نظر با استفاده از مسیرهای محتمل تصادفی انجام می پذیرد.
گام پنجم: این فرآیند با به کارگیری هر بردار پارامتر برای افق زمانی که قصد شبیه سازی آن را داریم، تا انتهای سری زمانی و تا جایی اجرا می شود که به آخرین بردار پارامتر برسیم.

-۱۵

۱۶- ۲-۳ کنترل پیش بین مدل (MPC)

۱۷- ۲-۳-۱ مقدمه

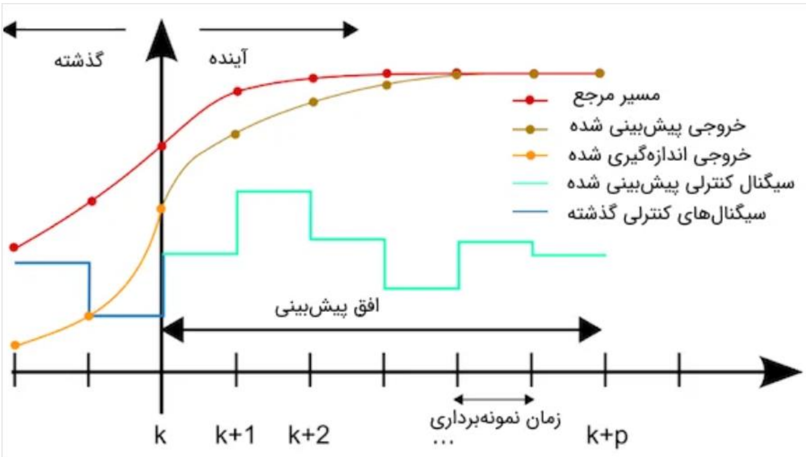
بررسی و مطالعه هر موضوع علمی، نیازمند داشتن شناخت کافی از مفاهیم پایه و تعاریف هر یک از اصطلاحات بکار برده شده در آن موضوع می باشد. در این قسمت، کلیه تعاریف مورد نیاز جهت آشنایی با **کنترل پیش بین مدل** (**MPC**) بیان شده است.

۱۸- ۲-۳-۲ تعریف کنترل پیش بین

کنترل پیش بین مدل(Model Predictive Control) ، یک کنترل‌کننده پیشرفته برای کنترل فرآیندهای صنعتی است که در آن می‌توان قیدهای فیزیکی حاکم بر سیستم را در هنگام طراحی در نظر گرفت. مزیت دیگر کنترل پیش‌بین مدل این است که این کنترل‌کننده در واقع همان کنترل بهینه است، اما به صورت بلادرنگ (Real-time) و آنلاین بهینه سازی آن انجام می‌شود.

۱۹- ۲-۳-۳ اصول کنترل پیش بین مدل(MPC)

کنترل پیش‌بین مدل بر اساس بهینه سازی تکراری (آنلاین) یک تابع هزینه با افق محدود از عملکرد پلانت کار می‌کند. شکل زیر اصول کار این کنترل‌کننده محبوب را نشان می‌دهد. فرض کنید که وضعیت تمام سیگنال‌های موجود در سیستم تا نمونهk ام در دسترس باشد، یعنی حالت‌ها و خروجی‌های سیستم از نمونه 0 تا نمونه k ام و همچنین سیگنال کنترلی نیز از نمونه 0 تا k-1 ام در دسترس باشند. دقت کنید که اگر زمان نمونه‌برداری مشخص باشد، شماره نمونه به راحتی تبدیل به زمان واقعی خواهد شد (t = kTs). به همین دلیل از این به بعد به جای نمونه از زمان استفاده می‌کنیم تا درک مطلب واضح‌تر شود. حال هدف این است که سیگنال‌های کنترلی از زمان k تا زمان k+p را طوری تعیین کنیم، که خروجی سیستم از زمان k تا زمان k+p تا حد ممکن به خروجی مرجع نزدیک باشد.



شکل ۲-۱ کنترل پیش بین مدل [21]

پیش‌بینی شود، که با توجه به مشخص بودن مدل دینامیکی k+pتا زمان k برای این کار باید خروجی سیستم از زمان افق پیش‌بینی گفته می‌شود و در واقع طول بازه پیش‌بینی pسیستم، به راحتی می‌توان پیش‌بینی را انجام داد. به پارامتر را نشان می‌دهد. اگر فرض کنیم که مدل دینامیکی گسسته سیستم به صورت زیر باشد:

$$y(k+1) = y(k) + 0.5u(k) \qquad (6-2)$$

آنگاه با توجه به اینکه اطلاعات خروجی سیستم تا زمان k و اطلاعات سیگنال کنترلی تا زمان k−1 مشخص است، پس خروجی یک نمونه به جلو یا یک گام به جلو بصورت زیر خواهد بود:

$$\hat{y}(k+1 \mid k) = y(k) + 0.5u(k) \qquad (7-2)$$

از علامت$\hat{y}$ برای نشان دادن مقادیر پیش‌بینی استفاده می‌شود و $\hat{y}(k+1 \mid k)$ به معنی پیش‌بینی یک گام به جلو با در رابطه بالا پیش‌بینی دو گام به جلو به دست kبه جای k+1 است. حال با جایگذاری k داشتن اطلاعات تا زمان می‌آید:

$$\hat{y}(k+2 \mid k) = y(k) + 0.5u(k) + 0.5u(k+1) \qquad (8-2)$$

به همین ترتیب، با جایگذاری‌های متوالی، پیش‌بینی تا p گام به جلو انجام می‌شود و داریم:

$$\hat{y}(k+p \mid k) = y(k) + 0.5u(k) + 0.5u(k+1) + \cdots + 0.5u(k+p-1) \qquad (9-2)$$

واضح است که تمام پیش‌بینی‌ها، وابسته به سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بین هستند. حال برای اینکه پیش‌بینی‌ها تا حد امکان به خروجی‌های مرجع نزدیک باشند، اغلب از تابع هزینه مجموع مربعات خطای ردیابی استفاده می‌شود. خطای ردیابی nگام به جلو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e(k+n) = Yref(k+n) - \hat{Y}(k+n) \qquad (10-2)$$

9

مقدار سیگنال مرجع می‌باشد. حال مجموع مربعات خطا Yref(k+n) تغییر کند و p می‌توان از یک تا nکه در آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cost = \sum_{i=1}^{p} (Yref(k+n) - \hat{Y}(k+n))^2 \qquad (11-2)$$

با بهینه‌سازی تابع هزینه بالا، سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بین به دست می‌آید. اما همان‌طور که قبلا اشاره شد، علاوه بر حداقل‌سازی تابع هزینه باید قیدهای فیزیکی نیز برآورده شوند. بهینه‌سازی تابع هزینه بالا ممکن است منجر به سیگنال کنترلی با دامنه بالا شود. برای رفع این مشکل، انرژی سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بین نیز به تابع هزینه اضافه می‌شود:

$$Cost = \sum_{i=1}^{p} (Yref(k+n) - \hat{Y}(k+n))^2 + \rho \sum_{i=1}^{p-1} u(k+i)^2 \qquad (12-2)$$

جمله دوم در تابع هزینه، باعث می‌شود که مصالحه‌ای بین دامنه سیگنال کنترلی و خطای ردیابی برقرار شود. از پارامتر ρ به منظور تنظیم اهمیت نسبی خطای ردیابی نسبت به دامنه سیگنال کنترلی استفاده می‌شود. هرچه خطای ردیابی نسبت به دامنه سیگنال کنترلی اهمیت بیشتری داشته باشد، اندازه ρ کوچکتر انتخاب می‌شود.
مسئله بهینه‌سازی بالا نامقید است و اگر بخواهیم قید سیگنال کنترلی صد در صد رعایت شود، باید مسئله بهینه‌سازی مقید زیر را محاسبه کنیم:

$$u(k) = min_{Subject\ To\ u(t+k)\in[Umin\ Umax]}\ Cost = \sum_{i=1}^{p}(\ Yref(k+n) - \hat{Y}(k+n))^2 + \rho\sum_{i=1}^{p-1} u(k+i)^2 \qquad (13-2)$$

حال اگر خروجی‌های پیش‌بینی شده نیز مقید باشند (مثلا سرعت موتور هیچ وقت بزرگتر از ۱۰۰۰ دور بر دقیقه نشود)، مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر تغییر پیدا می‌کند:

$$u(k) = min_{Subject\ To \begin{cases} u(t+k)\in[uminumax] \\ y(t+k)\in[yminymax]\end{cases}}\ Cost = \sum_{i=1}^{p}(\ Yref(k+n) - \hat{Y}(k+n))^2 + \rho\sum_{i=1}^{p-1} u(k+i)^2 \qquad (14-2)$$

۲۰- ۲-۳-۴ اصل افق کاهنده[8]

دقت کنید که تابع هزینه تعریف شده دارای متغیرهای u(k) تا u(k+p−1) است و با حل مسئله بهینه‌سازی مقادیر بهینه آن‌ها محاسبه می‌شوند. اما طبق اصل افق کاهنده فقط اولین مقدار محاسبه شده مربوط به سیگنال کنترلی بهینه به پلانت اعمال می‌شود و در زمان بعدی یعنی k+1، تمام محاسبات قبل دوباره تکرار خواهند شد. پس فقط u(k) به plant اعمال می‌شود و اثر آن یعنی y(k+1) اندازه‌گیری می‌شود. حال ما اطلاعات خروجی سیستم تا زمان k+1 را داریم و دوباره با طی کردن مسیر قبل، سیگنال کنترلی بهینه جدید u(k+1) را به دست می‌آوریم و آن را به plant اعمال می‌کنیم تا y(k+2)به دست آید و همین فرآیند را همواره تکرار می‌کنیم.

10

دلیل استفاده از اصل افق کاهنده، کاهش اثر عدم قطعیت‌ها، اغتشاشات و نویزهای موجود در سیستم است. زیرا این سیگنال‌ها اغلب دارای ماهیت تصادفی هستند و تا زمانی که رخ ندهند، نمی‌توانیم آن‌ها را اندازه‌گیری کنیم. حال اگر کل سیگنال کنترلی یعنی u(k) تا u(k+p−1) به plant اعمال شود، بدین معنی است که اثرات اغتشاشات در طول افق پیش‌بین لحاظ نخواهد شد. اما با p بار تکرار مسئله بهینه‌سازی و اندازه‌گیری اثرات اغتشاشات در هر نمونه‌برداری می‌توان اثرات آن‌ها را نیز جبران کرد.

۲۱- ۲-۳-۵ افق کنترل

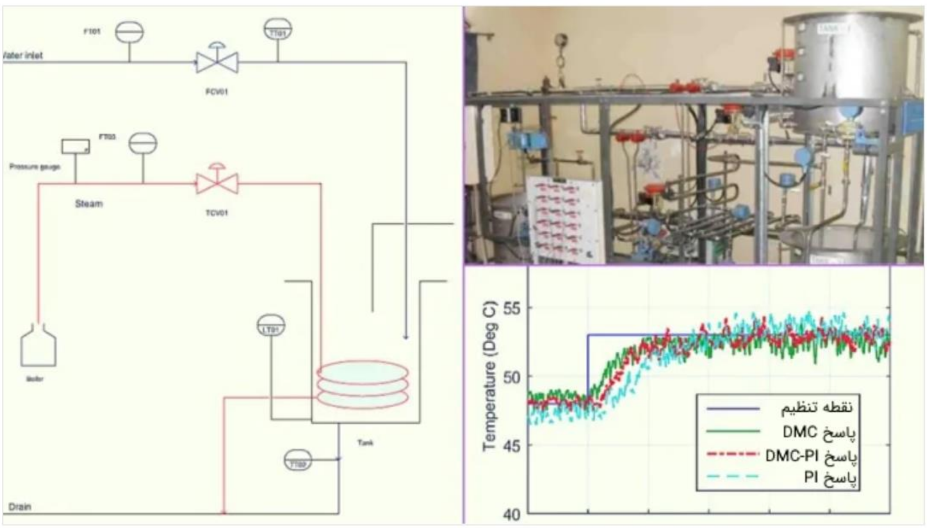
در توضیحات قبل اشاره شد که هدف تعیین سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بین برای حداقل‌سازی تابع هزینه و با در نظر گرفتن قیدهای حاکم بر سیستم است. در واقع در این حالت، افق کنترل برابر افق پیش‌بین در نظر گرفته شده است. افق کنترل طول بازه‌ای از سیگنال کنترلی را مشخص می‌کند که با استفاده از آن می‌خواهیم تابع هزینه را حداقل‌سازی کنیم. اما اغلب افق کنترل را کمتر از افق پیش‌بین در نظر می‌گیرند. به عبارت دیگر، هدف این است که با سیگنال‌های کنترلی u(k) تا u(k+q−1)، خروجی‌های پیش‌بینی شده سیستم یعنی y(k+1) تا y(k+p) تا حد امکان به مقادیر مرجع آن‌ها نزدیک باشند. در این شرایط، به پارامتر q افق کنترلی گفته می‌شود و کوچکتر از افق پیش‌بین است.(q<p)

[8] Receding Horizon Principle

۲۲- ۲-۳-۶ مزایای کنترل پیش‌بین مدل

همان‌طور که قبلا اشاره کردیم، مزیت برجسته کنترل پیش‌بین مدل، بهینه‌سازی آنلاین همراه با در نظر گرفتن قیدهای فیزیکی حاکم بر سیستم است. اما این تنها خاصیت کنترل پیش‌بین مدل نیست. سایر نقاط قوت کنترل پیش‌بین مدل عبارتند از:

- **ذخیره‌سازی انرژی و هزینه :**با درنظر گرفتن انرژی سیگنال کنترلی در تابع هزینه می‌توان مصرف انرژی سیستم را کاهش داد که به نوبه خود باعث کاهش هزینه‌های سیستم خواهد شد.
- **جبران موثر اغتشاشات وارد بر سیستم :**با استفاده از اصل افق کاهنده اثرات اغتشاشات (عدم قطعیت‌ها و نویزها) در کنترل پیش‌بین مدل نسبت به سایر کنترل‌کننده‌ها به صورت موثرتری حذف خواهد شد.
- **کنترل سیستم‌های چند متغیره :**تعمیم کنترل پیش‌بین مدل به سیستم‌های چند متغیره بسیار سرراست و مستقیم است و باعث پیچیدگی زیادی نمی‌شود. در حالی که طراحی کنترل‌کننده‌های کلاسیک مانند PID برای سیستم‌های چند متغیره بسیار سخت‌تر و چالش‌برانگیزتر از سیستم‌های تک‌متغیره است.
- **پیاده‌سازی آسان در سیستم‌های دیجیتال :**بر خلاف تئوری‌های پیچیده کنترل بهینه که نیازمند حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی و پیچیده هستند، کنترل پیش‌بین مدل به راحتی در کامپیوترهای دیجیتال قابل پیاده‌سازی است.
- **کاربرد در صنعت :**کنترل‌کننده پیش‌بین مدل از صنعت نشات گرفته است و بسیاری از استراتژی‌های کنترل پیش‌بین مدل به خوبی بر روی پلانت‌های صنعتی مانند ربات‌ها، توربین‌های بادی و بخار، اتوپایلوت، نورد فلزات، تولید سیمان و صنایع نفت و پتروشیمی کارایی خودشان را نشان داده‌اند.



شکل ۲-۲ کاربرد کنترل پیش بین مدل در یک پلنت صنعتی و مقایسه جواب کنترل کننده های مختلف

۲۳- ۲-۳-۷ معایب کنترل پیش‌بین مدل

بزرگترین عیب کنترل پیش بین مدل، نیاز آن به مدل دقیق فرآیند است، زیرا در این کنترل‌کننده در قدم اول باید رفتار آینده سیستم پیش‌بینی شود. بنابراین اگر مدل ریاضی سیستم دقیق نباشد، پیش‌بینی‌های خروجی سیستم نیز معتبر نخواهد بود و در نتیجه منجر به خطا خواهد شد.

پیچیده شدن حل مسئله بهینه‌سازی برای سیستم‌های غیرخطی عیب دیگر کنترل‌پیش بین است. اگر دینامیک سیستم غیرخطی باشد آنگاه تابع هزینه کنترل پیش‌بین مدل یک تابع پیچیده از متغیرهای تصمیم (سیگنال کنترلی در طول افق کنترل) خواهد شد و بهینه‌سازی آن مشکلات زیادی را به همراه خواهد شد. البته برای رفع این مشکل می‌توان با تعریف یک تبدیل (نگاشت) غیرخطی، سیستم غیرخطی را به یک سیستم خطی تبدیل کرد. دقیقا همانند کاری که در تئوری کنترل غیرخطی در روش فیدبک خطی‌ساز انجام می‌شود.

۲۴- ۲-۳-۸ الگوریتم‌های حل مسئله بهینه‌سازی

اگر کنترل پیش‌بین مدل نامقید باشد، می‌توان به صورت تحلیلی مسئله بهینه‌سازی را حل کرد. کافی است که از تابع هزینه نسبت به متغیرهای تصمیم مشتق گرفته و ریشه مشتق را محاسبه کرد. اما اگر تابع هزینه کنترل پیش‌بین مدل مقید باشد، اغلب از روش‌های تکراری برای بهینه‌سازی آن استفاده می‌کنند. معروف‌ترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکراری SQP،Interior-point و Active-Set هستند که در نرم‌افزار مهندسی متلب (MATLAB) در دستور fmincon گنجانده شده است. [۲]

تولباکس هایی نیز برای بهینه‌سازی تابع هزینه، هنگام پیاده‌سازی صنعتی کنترل پیش‌بین مدل وجود دارند که یکی از مهم‌ترین آنها تولباکس yalmip است که با استفاده از این نرم‌افزار بسیاری از مسائل بهینه‌سازی نامقید، مقید، خطی و غیرخطی قابل حل است.

۲۵- ۲-۳-۹ انواع استراتژی‌های کنترل پیش‌بین مدل

استراتژی‌های مختلفی برای کنترل پیش‌بین مدل ذکر شده‌اند که در همه آنها از سه اصل زیر استفاده می‌شود:

- استفاده صریح از مدل دینامیکی فرآیند به منظور پیش‌بینی رفتار آینده سیستم
- محاسبه سیگنال کنترلی بهینه با بهینه‌سازی تابع هزینه و در نظر گرفتن قیود آن
- اصل افق کاهنده

اما تفاوت آنها در موارد زیر است:

نوع مدل فرآیند برای پیش‌بینی: برخی از الگوریتم‌ها از پاسخ پله سیستم، برخی دیگر از مدل تابع تبدیل و برخی دیگر از مدل فضای حالت سیستم برای پیش‌بینی استفاده می‌کنند.

شیوه در نظر گرفتن اغتشاشات وارد بر سیستم.

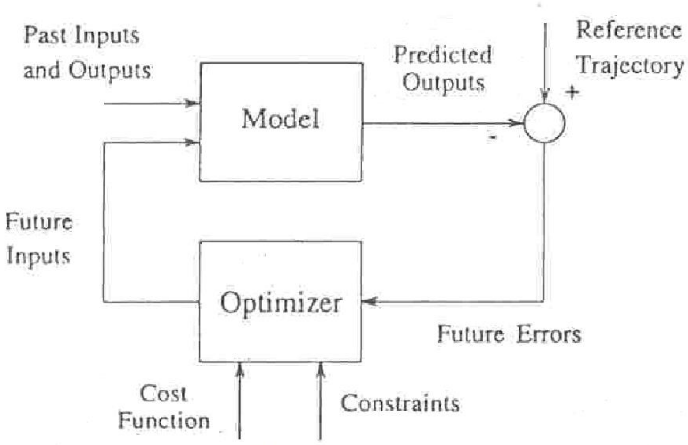
نوع تابع هزینه: اغلب از مجموع مربعات خطای ردیابی و سیگنال کنترلی به عنوان تابع هزینه استفاده می‌شود. اما می‌توان مجموع قدرمطلق‌های خطای ردیابی و سیگنال کنترلی و یا هر تابع هزینه‌ای دیگری را بسته به نوع پلانت در نظر گرفت.

با توجه به این تفاوت‌ها، مهمترین استراتژی‌های کنترل پیش‌بین مدل عبارتند از:

- الگوریتم MAC: استفاده از پاسخ ضربه تجربی سیستم برای پیش‌بینی سیستم.
- الگوریتم DMC: استفاده از پاسخ پله تجربی سیستم برای پیش‌بینی سیستم.
- الگوریتم PFC: استفاده از مدل‌سازی فضای حالت سیستم برای پیش‌بینی سیستم.
- الگوریتم GPC: استفاده از مدل‌سازی تابع تبدیل گسسته سیستم برای پیش‌بینی سیستم.
- الگوریتم کنترل پیش‌بین مدل غیرخطی NMPC: کنترل پیش‌بین مدل برای سیستم‌های غیرخطی.

۲۶- ۲-۳-۱۰ ساختار MPC

ساختار بلوک دیاگرام یک کنترل پیش بین مدل به شکل زیر است:



شکل ۲-۳ بلوک دیاگرام ساختار کنترل پیش بین مدل

۲۷- ۲-۳-۱۱ اجزای MPC

- مدل پیش بینی
- تابع هزینه
- بدست آوردن قانون کنترلی

۲۸- ۲-۳-۱۱-۱ مدل پیش بینی[۹]

- پاسخ ضربه

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i u(t-i) = H(z^{-1}).u(t) \qquad (15-2)$$

- پاسخ پله

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \,\Delta u(t-i) = y_0 + G(z^{-1})(1-z^{-1})u(t) \qquad (16-2)$$

- تابع تبدیل

$$A(z^{-1}).y(t) = B(z^{-1}).u(t) \qquad (17-2)$$

- فضای حالت

$$\begin{cases} x(t) = M.x(t-1) + N.u(t-1) \\ y(t) = Q.x(t) \end{cases} \qquad (18-2)$$

۲۹- ۲-۳-۱۱-۲ تابع هزینه[۱۰]

$$J(N_1,N_2,N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)\,[y(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j).[\,\Delta u(t+j-1)]^2 \qquad (19-2)$$

- N_1 و N_2 حد پایین و بالای افق پیش بین هستند
- N_u افق کنترلی

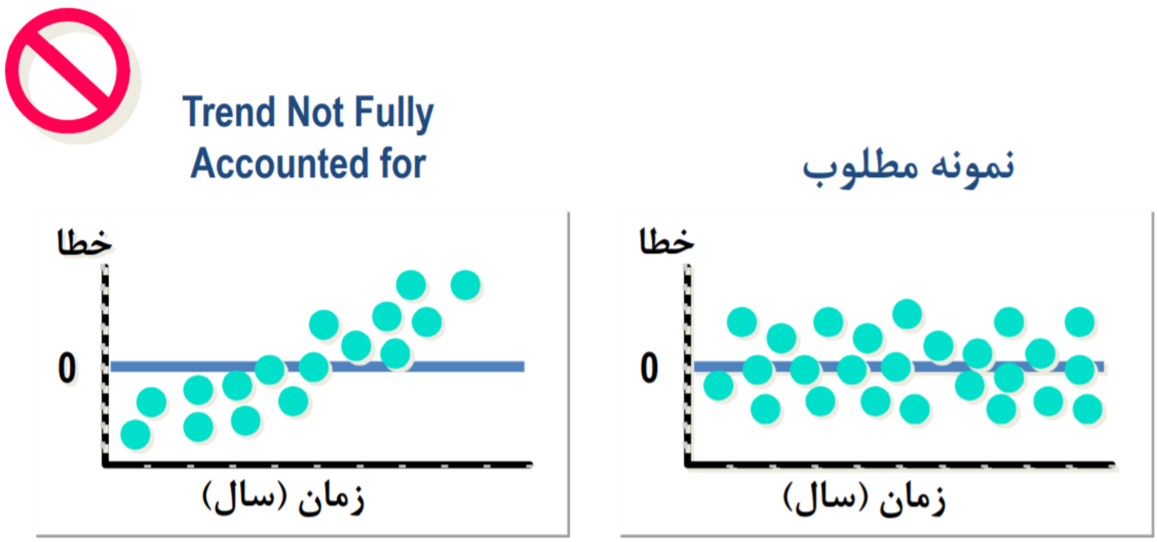
[۹] Prediction model
[۱۰] Cost function

ضرایب $\delta(j)$ و $\lambda(j)$ رفتار تابع هدف را در فواصل زمانی آینده مشخص میکنند و به ترتیب وزنی هستند که بر روی quality و effort می گذاریم.

بنابراین **سیگنال کنترلی** با کمینه کردن تابع هزینه به دست می آید.
اگر محدودیت نداشته باشیم، با مشتق گیری از J و مساوی صفر قرار دادن آن سیگنال کنترلی بدست می آید.

۳۰-۲-۴ انواع خطای پیش بینی[۱۱]

گاهی ممکن است بروز تحوالتی مانند تحوالت دنیای رقابت یا تحوالت اجتماعی فاصله زیادی بین میزان پیش بینی ها با واقعیت ایجاد کند. بنابراین باید خطای پیش بینی را کنترل نموده و در صورت تجاوز از حدود، روش پیش بینی را تغییر داد. این تفاوتها و اختلافات را **خطای پیش بینی** می نامند و مقدار آن از تفاضل مقدار پیش بینی شده از مقدار حقیقی به دست می آید. شکل زیر نمونه هایی از خطای پیش بینی را نشان می دهد.



شکل ۲-۴ نمونه ای از خطای پیش بینی

حال سوال این است که یک پیش بینی مطلوب چه ویژگی یا برتری مشخصی دارد؟
برای پاسخ به این پرسش لازم است تا مفهوم خطاهای پیش بینی را بطور کامل بدانیم.
در این قسمت به بررسی اجمالی خطاهای پیش بینی پرداخته شده است.

[۱۱] Forecast errors

انواع خطاهای پیش بینی عبارت اند از :

1- MFE[۱۲]
2- MAD[۱۳]
3- MAPE[۱۴]
4- MSE[۱۵]

- MFE میانگین خطای پیش بینی از واقعی را محاسبه می کند.
- MAD میانگین خطای مطلق پیش بینی شده از واقعی را اندازه گیری می کند.
- MAPE میانگین درصد خطای مطلق پیش بینی از واقعی را اندازه گیری می کند.
- MSE میانگین مربعات خطای پیش بینی از واقعی را اندازه گیری می کند.

حال پاسخ سوال صفحه قبل را میتوانیم بدهیم و واضح است که هر چه خطای پیش بینی کمتر و نزدیک به صفر باشد، بیانگر دقت بالای پیش بینی و نتیجه مطلوب و مورد نظر ما است و هرچه میزان خطای پیش بینی بالا باشد بدین معنی است که روش پیش بینی را درست انتخاب نکرده ایم و می بایست روش خود را تغییر دهیم.

۳۱- فصل سوم : پیشینه پژوهش

[۱۲] Mean Forecast Error
[۱۳] Mean Absolute Deviation
[۱۴] Mean Absolute Percentage Error
[۱۵] Mean Squared Error

۳۲- ۳-۱ مقدمه

در این فصل، با مطالعه و بررسی تعدادی از منابع شامل مقالات و کتب مرجع مرتبط با موضوع "کاربرد کنترل کننده های کلاسیک در بهینه‌سازی سبد سهام" مورد بررسی واقع شده اند. در سالهای اخیر، پژوهشگران زیادی با توسعه و گسترش روشهای آماری و بهینه سازی پورتفوی سهام به تخمین و پیش بینی آینده بازارهای مالی پرداخته اند. [3] همچنین تلاش هایی جهت رفع کاستی های روش های گذشته انجام شده است.

سعی شده است با استفاده از نتایج بدست آمده در هر مقاله و نیز با استفاده از نظرات سایر نویسندگانی که کارهای پژوهشگران پیش از خود را مورد نقد قرار داده اند، نقاط ضعف و قوت مقالات را استخراج نمود.

این نقاط ضعف و قوت ممکن است شامل بخش پیش بینی، تخمین و یا بهینه سازی پورتفوی باشد که در نظر داریم در نهایت به یک جمع بندی جامع و کارآمد در این زمینه دست یابیم.

۳۳- ۳-۲ شبیه‌سازی نوسانات قیمت سهام با استفاده از حرکت براونی هندسی (GBM)[۱][۴]

حرکت براونی هندسی (GBM) برای شبیه‌سازی مسیرهای قیمت تمرکز دارد و مدل را با استفاده از نمونه‌ای از سهام شرکت های بزرگ استرالیایی[۵] با استفاده از طیف وسیعی از تکنیک‌ها برای ارزیابی این که چگونه قیمت‌های شبیه‌سازی شده سهام با بازده‌های واقعی سهام هم تراز می‌شوند، مورد آزمون قرار داده است.
یک فرض رایج برای بازارهای سهام این است که آن‌ها از حرکت براونی پیروی می‌کنند، که در آن قیمت‌های دارایی اغلب به طور مداوم با مقادیر تصادفی در حال تغییر هستند. این مفهوم منجر به توسعه تعدادی از مدل‌ها براساس نظریه‌های کاملا متفاوت شده‌است.[۶]

نظریه پردازان فنی فرض می‌کنند که تاریخ خود را تکرار می‌کند. یعنی، الگوهای گذشته رفتار قیمت تمایل به تکرار در آینده دارند. ایده نظریه گام تصادفی این که سهام یک مسیر تصادفی و غیرقابل‌پیش‌بینی را در پیش می‌گیرند، و تقریبا غیر ممکن است که عملکرد بهتری نسبت به بازار بدون در نظر گرفتن ریسک اضافی داشته باشند.

۳۴- ۳-۲-۱ موثر بودن مدل GBM

- سهام‌ها از فرآیند مارکوف پیروی می‌کنند، به این معنی که تنها قیمت فعلی سهام برای پیش‌بینی قیمت‌های آینده مناسب است.
- بازده متناسب یک سهام به صورت لگاریتمی توزیع می‌شود.
- بازده پیوسته ترکیبی برای یک سهام به طور معمول توزیع می‌شود.

برای شبیه سازی‌های حرکت براونی هم پارامتر جابجایی و هم پارامتر نوسان مورد نیاز است و مقدار جابجایی بالاتر منجر به قیمت‌های شبیه‌سازی شده بالاتر در طول دوره مورد تجزیه و تحلیل می‌شود.

اگرچه فرآیند GBM به خوبی پشتیبانی می‌شود، اما تعداد زیادی از مقالات وجود دارد که بر روی آزمایش اعتبار مدل و دقت پیش‌بینی‌ها با استفاده از حرکت براونی تمرکز دارند و این مقالات پیوسته در حال افزایش هستند. [۷, ۸]
در سال ۲۰۱۰ هاداوندی، شهوندی و قنبری به یک رویکرد یکپارچه براساس سیستم‌های فازی ژنتیک (GFS)و شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN)برای ساخت یک سیستم خبره پیش‌بینی قیمت سهام دست یافتند.
آن‌ها برای ارزیابی قابلیت روش پیشنهادی خود، این مدل را به داده‌های قیمت سهام جمع‌آوری‌شده از بخش‌های IT و خطوط هوایی اعمال می‌کنند و نتایج را با روش‌های پیش‌بینی قیمت سهام قبلی با استفاده از میانگین درصد مطلق خطا (MAPE)مقایسه می‌کنند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی از تمام روش‌های قبلی بهتر است و بنابراین می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب برای پیش‌بینی قیمت سهام در نظر گرفته شود.

[۱] Simulating Stock Prices Using Geometric Brownian Motion

۳۵- ۳-۲-۲ نتایج، مزایا و معایب GBM

مدل GBM را در مورد اعتبار آن در بلند مدت و همچنین کوتاه‌مدت آزمایش می‌کنند درحالیکه اکثر مقالات تنها دقت پیش‌بینی‌ها را در کوتاه‌مدت آزمایش می‌کنند.

سه روش برای آزمایش اعتبار مدل ارائه می‌گردد:

روش اول ضریب همبستگی بین قیمت‌های شبیه سازی شده سهام و قیمت‌های واقعی سهام را محاسبه می‌کند. اکثر مطالعات گذشته نشان داده‌اند که رابطه ضعیفی بین این دو متغیر وجود دارد. یک همبستگی منفی را در طول دوره‌های کوتاه شبیه سازی گزارش شده است که با افق‌های پیش‌بینی طولانی‌تر مثبت می‌شود.

نوسان در بازار، قیمت سهام شبیه‌سازی شده و قیمت سهام واقعی را به یک همبستگی منفی در کوتاه‌مدت تبدیل می‌کند، در حالی که قیمت سهام به مقدار میانگین خود در بلند مدت تثبیت می‌شود و باعث همبستگی مثبت بین قیمت‌های سهام واقعی و شبیه‌سازی شده می‌شود. با این حال، ضریب همبستگی هنوز هم تنها یک رابطه ضعیف را در بهترین حالت نشان می‌دهد.

روش دوم استفاده از تکنیک میانگین درصد مطلق خطا (MAPE)است. با استفاده از این تکنیک نتایج مختلفی برای روش اول حاصل می‌شود زیرا مقادیر MAPE در تمام دوره‌های زمانی نسبتا پایین هستند. مشخص شد که MAPE در دوره‌های شبیه‌سازی یک هفته، دو هفته و یک ماه کم‌ترین مقدار را داشت، اما زمانی که افق‌های طولانی‌تر در نظر گرفته شدند، خطا تمایل به افزایش داشت.

روش سوم و نهایی از یک فرآیند ساده برای بررسی اینکه آیا قیمت‌های سهام روزانه شبیه‌سازی شده همان حرکت مستقیم قیمت‌های سهام واقعی را نشان می‌دهند یا خیر، استفاده کرده است.

همان طور که نتایج نشان می‌دهد در تمام افق‌های زمانی، احتمال شبیه‌سازی قیمت سهام با استفاده از GBM که در راستای قیمت‌های واقعی سهام حرکت می‌کند، کمی بیشتر از ۵۰ درصد بوده‌است.

با این حال، بعدا مشخص شد که وقتی پورتفوی یا سبد سهام شکل گرفت، این احتمالات کمی بالا رفتند.

همچنین می توان از سایر اصلاحات برای افزایش قابلیت اطمینان مدل استفاده کرد، مانند مدلی که پرش‌ها را در خود جای داده‌است و یا استفاده از یک تخمینگر دیگر درکنار GBM برای بهبود عمکرد پیش بینی و همچنین افزایش بازدهی کوتاه مدت و بلند می تواند تا حد زیادی به تشکیل یک پرتوفوی بهینه برای سرمایه گذاری کمک کند. در قسمت بعد به بررسی و مطالعه یک تخمینگر با عنوان فیلتر کالمن می پردازیم.

۳۶- ۳-۳ پیش‌بینی سرعت باد با استفاده از فیلتر کالمن خروجی مدل پیش‌بینی عددی هواشناسی[۱۷] [۹]

علی‌رغم پیشرفت‌های عمده‌ای که توسط پیش‌بینی عددی آب و هوا[۱۸]در دهه‌های گذشته صورت‌گرفته است، مدل‌های هواشناسی، به دلیل کاستی ها ازجمله شرایط اولیه و مرزی معمولا قادر به ارائه پیش‌بینی سرعت باد، به ویژه در مناطقی که توپوگرافی پیچیده دارند، نیستند.

به منظور کاهش این اشکالات و کاستی ها، یکی از موفق‌ترین روش‌ها، تکنیک فیلترینگ کالمن است که مشاهدات بازگشتی و پیش‌بینی‌های مدل را برای به حداقل رساندن خطا ترکیب می‌کند.

این روش، با مجموعه داده‌های ۲ ساله سرعت باد ارائه‌شده توسط یک مدل NWP و دو ایستگاه واقع در لیگوریا شرقی (ایتالیا)، مورد آزمایش قرار گرفته‌است.

به طور کلی، پیش‌بینی‌های کوتاه‌مدت سرعت و یا توان باد را می توان به دو روش مختلف به دست آورد: تکنیک‌های آماری خالص، مانند فیلتر کالمن، مدل‌های اتورگرسیو و منطق فازی و شبکه عصبی مصنوعی.

مدل‌های پیش‌بینی عددی با استفاده از پیش‌بینی‌های NWP پس از زمان بررسی ۳ تا ۶ ساعت، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های آماری دارند، در حالی که روش‌های آماری برای پیش‌بینی‌های بسیار کوتاه‌مدت، یعنی کم‌تر از ۶ ساعت بسیار قابل‌اعتماد هستند. [۱۰]

در این مقاله با ارائه مثال های متعدد برتری مدل ها و روش های آماری همچون فیلتر کالمن را نسبت به روش های عددی برای پیش بینی های کوتاه مدت به خوبی نشان داده است.

همچنین با مقایسه روش فیلتر کالمن با سایر روش های آماری نیز به این موضوع دست می یابیم که این روش در بهبود کاهش خطای پیش بینی نقش موثری ایفا می کند.

همانگونه که قبلا به موضوع GBM به عنوان یکی از روش های پیش بینی بر اساس داده های گذشته پرداختیم، نظر به این که یک راهکار برای برون رفت از مشکل افزایش خطای پیش بینی ترکیبی از فیلتر کالمن به همراه GBM (GBM-KF) است، تقریبا به همان چیزی که انتظارش را داریم در حال نزدیک شدن هستیم.

فیلتر کالمن الگوریتمی است که یک میانگین محاسباتی کارآمد (بازگشتی)را برای تخمین حالت یک فرآیند فراهم می‌کند، به طوری که میانگین مربعات خطا را به حداقل می‌رساند. این فیلتر از چندین جنبه بسیار قدرتمند است. از تخمین‌های حالت‌های گذشته، حال و حتی آینده پشتیبانی می‌کند، و حتی زمانی که ماهیت دقیق سیستم مدلسازی شده ناشناخته باشد، می‌تواند این کار را انجام دهد.

20

۳۷- ۳-۳-۱ نتایج، مزایا و معایب فیلتر کالمن

این فیلتر از چندین جنبه بسیار قدرتمند است: از تخمین‌های حالت‌های گذشته، حال و حتی آینده پشتیبانی می‌کند، و حتی زمانی که ماهیت دقیق سیستم مدلسازی شده ناشناخته باشد، می‌تواند این کار را انجام دهد.

---

[۱۷] Wind speed and wind energy forecast through Kalman filtering of Numerical Weather Prediction model output

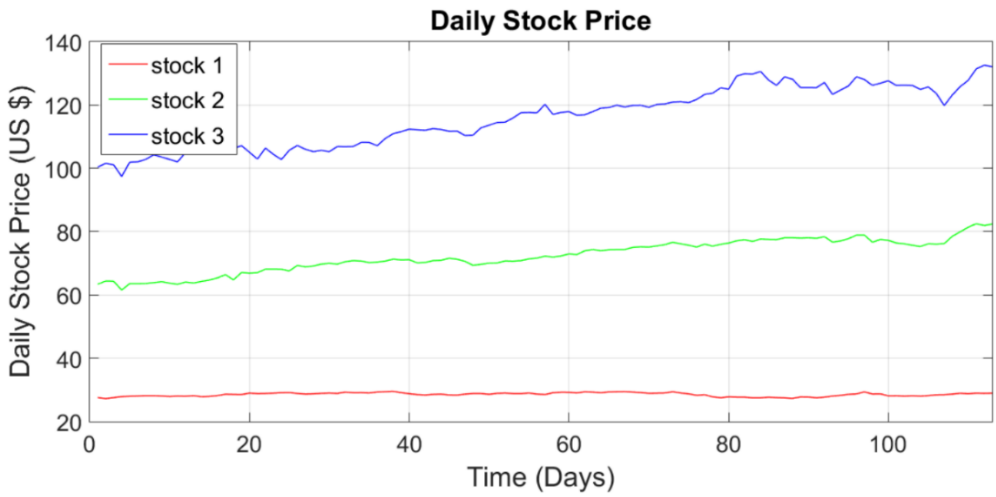
[۱۸] NWP

نتایج نشان دادند که این روش قادر به ارائه بهبود قابل‌توجه پیش‌بینی با توجه به خروجی‌های مستقیم مدل است، که منجر به حذف خطاهای سیستماتیک می‌شود.[11, 12] بطور کلی روش فیلتر کالمن تا حد زیادی برای پیش بینی حتی کوتاه مدت، خطا را به حداقل می رساند اما چون هدف ما رسیدن به یک مدل با کارایی بالاتر و خطای کمتر است می توان نتیجه گرفت استفاده به تنهایی از آن مطلوب ما نیست دلیل آن همانگونه که قبلا هم به آن اشاره شد ترکیب این روش و روش GBM است که نتجیه مورد نظر مارا دنبال می کند و ما در قسمت سوم پیشینه پژوهش، بطور کامل به این موضوع و همچنین استفاده از یک روش بهینه سازی کلاسیک[۱۳] برای حداقل سازی خطای پیش بینی و رسیدن به یک پرتفوی بهینه سرمایه گذاری پرداخته ایم.

۳۸- ۳-۴ کاربرد کنترل پیش‌بین مدل در بهینه‌سازی سبد سهام با پیش‌بینی براساس فیلتر کالمن - حرکت براونی هندسی (GBM-KF)[1] [۱۴]

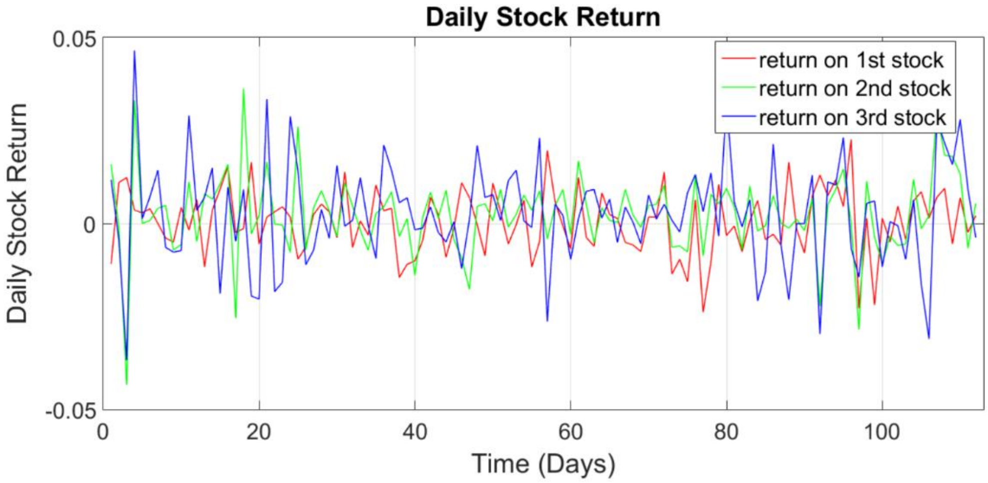
21

در این قسمت یک کاربرد عملی از کنترل پیش بین مدل در بهینه سازی در بهینه سازی سبد سهام ارائه گردیده است. این کار را با مطالعه و بررسی سهام سه شرکت Canon، Starbucks و Microsoft انجام شده است.
نمودارهای زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۳-۱ قیمت روزانه سهام هر شرکت

[1] the application of model predictive control on stock portfolio optimization with prediction based on geometric brownian motion - kalman filter



شکل ۳-۲ بازده روزانه سهام هر شرکت

مدل مورد استفاده برای پیش‌بینی قیمتی آینده سهام، حرکت براونی هندسی (GBM)است. که به صورت زیر بیان می شود:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \qquad (1-3)$$

که در آن :

$S(t)$ قیمت سهام در زمان t

$dW(t)$ حرکت براونی

μ پارامتر دریفت

σ پارامتر نوسانات

می باشد و حل این معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$S(t+1) = S(t)e^{(\mu-0.5\sigma^2)dt+\sigma\epsilon\sqrt{dt}} \qquad (2-3)$$

که در آن $\sqrt{dt}$ = dW(t)σ€

پس از جمع آوری نتایج داده های موردنظر از پیش بینی GBM مشاهده گردید که دقت پیش بینی های انجام شده نسبتا ضعیف بوده و می بایست با ادغام در فیلتر کالمن (KF)، دقت پیش بینی ها را افزایش دهیم.

زیرا KF می تواند به حداقل رساندن کوواریانس خطای تخمین کمک کند. این روش برای اولین بار توسط رودلف ئی کالمن[۲۰] در دهه ۱۹۶۰ از طریق مطالعه کلاسیک خود در مورد راه حل بازگشتی برای مسائل فیلتر گسسته خطی داده ها معرفی شد. روش الگوریتم فیلترکالمن دارای دوگام تخمین و آپدیت است.

---

[۲۰] Rudolf E. Kálmán

مدل سیستم، مدل اندازه گیری شده و فرض برای الگوریتم فیلتر کالمن در جدول ۳-۱ مشاهده می شود:

System Model and Measurement Model	System model : $x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) + Gw_k$ Measurement model : $z_k = h(x_k, k) + v_k$ Assumption : $x(0) \sim X(\tilde{x}_0, P_0);\ w(k) \sim N(0, Q_k);$ $v_k \sim N(0, R)$
Initialization	$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0;\ P(0) = P_0$

جدول ۳-۱

گام تخمین :

Time Predict

$$\text{Estimation} : \hat{x}^-_{k+1} = f(\hat{x}^-_k, u_k)$$
$$\text{Covariance} : P^-_{k+1} = AP_kA^T + G_kQ_kG^T_k$$

گام آپدیت :

Measurement Update

Kalman gain :
$$K_{k+1} = P^-_{k+1}H^T(H_{k+1}P^-_{k+1}H^T + R_{k+1})^{-1}$$
$$\text{Estimation} : \hat{x}_{k+1} = \hat{x}^-_{k+1} + K_{k+1}(z_{k+1} - H\hat{x}^-_{k+1})$$
$$\text{Error covariance} : P_{k+1} = (I - K_{k+1}H)P^-_{k+1}$$

هدف از یکپارچه‌سازی مدل‌های GBM و KF به روزرسانی پارامترهای جابجایی(μ) و نوسان(σ) در طول زمان بود، که نشان داد این پارامترها با ورود داده های جدید تغییر خواهند کرد.

جدول ۳-۱ مقایسه MAPE بین GBM و روش GBM - KF را به خوبی نشان می‌دهد.

Stock	GBM	GBM-KF
Stock 1 (Canon)	1.01	0.16
Stock 2 (Starbucks)	0.59	0.097
Stock 3 (Microsoft)	1.23	0.1

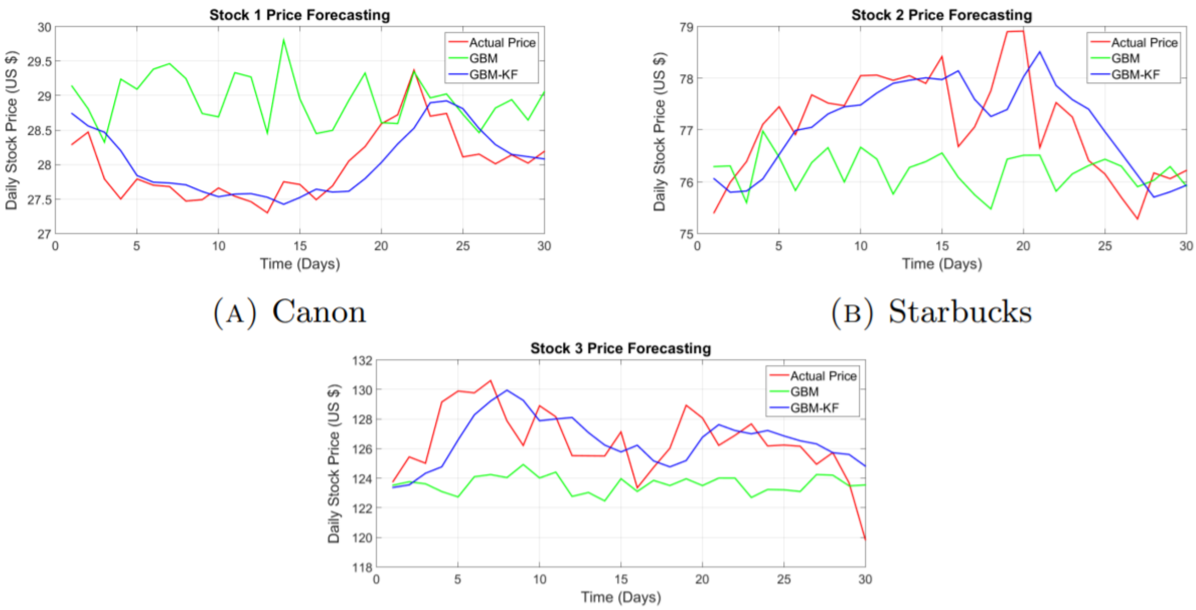
جدول ۳-۲

۳۹- ۳-۴-۱ نتایج عملکرد روش GBM-KF در مقایسه با روش GBM :

از جدول ۳-۱ به وضوح می توان دید که روش GBM - KF در پیش‌بینی قیمت سهام برای سه شرکت بهتر از روش GBM عمل می‌کند. با برآورد پارامترهای انحراف و نوسانات در مدل GBM، رویکرد GBM - KF با موفقیت خطای پیش بینی بین قیمت واقعی و قیمت پیش‌بینی شده را کاهش داد.

پس در نهایت به این نتیجه می رسیم به دلیل نتایج و عمکرد قابل قبول رویکرد GBM – KF، پیش‌بینی‌های قیمت سهام براساس این رویکرد در توسعه پرتفوی سهام استفاده خواهد شد.

شکل ۳-۳ مقایسه یاد شده را روی سهام سه شرکت به خوبی نشان می دهد.



(A) Canon (B) Starbucks

(C) Microsoft

شکل ۳-۳ نتایج پیش بینی و مقایسه روش GBM و GBM-KF

همانگونه که قبلا هم گفته شد در این مقاله دو مرحله وجود دارد که مورد بحث قرار گرفته :

- پیش‌بینی قیمت سهام
- حل مساله کنترل بهینه در بهینه‌سازی پرتفوی

پیرامون پیش بینی قیمت سهام به بهترین رویکرد رسیدیم. از میان روش های کنترلی برای بهینه سازی، کنترل پیش‌بینی مدل (MPC) را می‌توان یکی از مؤثرترین روش‌ها برای حل مسئله بهینه‌سازی دانست. جالب است بدانید که MPC یک روش کنترل بهینه است که هدف آن طراحی حالت ها و خروجی های سیستم به سمت مقادیر مورد نظر است. که این کار را با به حداقل رساندن یک تابع هدف انجام می دهد. علاوه بر این، MPC چندین مزیت از جمله توانایی غلبه بر تمام محدودیت های کنترلی و وضعیت های سیستم و همچنین قابلیت ادغام همه متغیرها در یک تابع هدف واحد را دارد[۱۵]
هنگامی که پیش بینی قیمت سهام بر اساس GBM-KF انجام شد، به دنبال بهینه سازی سبد سهام پیش بینی شده هستیم.
علاوه بر این محدودیت های کنترل ها و حالات سیستم و همچنین هزینه معاملات نیز در مدل سازی ریاضی ادغام شده است.

۴۰- ۳-۴-۲ مدل ریاضی مدیریت پرتفوی سهام

$(n+1)^{th}$سرمایه ی سرمایه گذاری شده در حساب بانکی که در واقع همان دارایی بدون ریسک است را بصورت نشان می دهیم.

گام های زمانی بصورت $i=1,2,\ldots,T$ (Tپایان افق برنامه ریزی) است.
مدل مدیریت پرتفوی سهام برای n دارایی پر ریسک را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$x_i(k+1) = [1+\eta_i(k)][x_i(k)+p_i(k)-q_i(k)] \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (3-3)$$

$\eta_i(k)$: بازده در i امین دارایی پرریسک

$p_i(k)$: مجموع پول انتقال یافته از حساب بانکی به i امین دارایی پرریسک

$q_i(k)$: مجموع پول انتقال یافته از i امین دارایی پرریسک به حساب بانکی

$x_i(k)$: مجموع سرمایه ی سرمایه گذاری شده در i امین دارایی پرریسک

دارایی بدون ریسک که حساب بانکی است بصورت زیر بیان می شود:

$$x_{n+1}(k+1) = [1+r_i(k)][x_{n+1}(k) - (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} p_i(k) + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n} q_i(k)] \qquad (4-3)$$

که $r_i(k)$ بازدهی حساب بانک در انتها است.

در نهایت مجموع کل سرمایه ی سرمایه گذاری شده در هر یک از دارایی های بدون ریسک و پرریسک بصورت زیر است :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k) \qquad (5-3)$$

متغیرهای حالت (X) را بصورت $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ که مجموع سرمایه ی سرمایه گذاری شده در دارایی های ریسکی اول و دوم و ... و n-th را به ترتیب نشان می دهد.
X_{n+1} نیز مجموع سرمایه در دارایی بدون ریسک را نشان می دهد.
متغیرهای کنترلی با u نشان داده می شوند که شامل p_i و q_i هستند که $i=1,2,\ldots,n$ است.
متغیر خروجی با y نشان داده می شود که کل سرمایه در همه دارایی ها را نشان می دهد.
حال کلیه روابط بیان شده را بصورت ماتریسی داریم :

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ \vdots \\ x_n(k+1)\\ x_{n+1}(k+1)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix} p_1(k)\\ \vdots \\ p_n(k)\\ q_1(k)\\ \vdots \\ q_n(k)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1+\eta_1(k) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1+\eta_n(k) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1+r_1(k)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1+\eta_1(k) & \cdots & 0 & -(1+\eta_1(k)) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1+\eta_n(k) & 0 & \cdots & -(1+\eta_n(k)) & 0\\ (1+r_1(k))(-1-\alpha) & \cdots & (1+r_1(k))(-1-\alpha) & (1+r_1(k))(1+\beta) & \cdots & (1+r_1(k))(1+\beta) & 1+r_1(k)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=[1\ \cdots 1-1].$$

ماتریس A تکامل حالات را توصیف می‌کند، B ماتریسی را نشان می‌دهد که ارتباط بین ورودی‌ها و حالت‌های سیستم را مشخص می کند و در نهایت، C ماتریسی را نشان می‌دهد که حالات و خروجی سیستم را مرتبط می‌سازد.

محدودیت های متغیرهای کنترلی رابصورت زیر تعریف می کنیم:

$$pi(k) \geq 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$qi(k) \geq 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

چون x_{n+1} نمس تواند یک مقدار منفی باشد پس معنی آن وام است که همانگونه که قبلا به آن اشاره شد بیانگر دارایی پرریسک است. بنابراین یک **قید برای** $\mathbf{x_{n+1}}$ تعریف می شود :

$$x_{n+1}(k) - (1+\alpha)\sum_{i=1}^{n} p_i(k) + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n} q_i(k) \geq 0 \qquad (6-3)$$

درنهایت فرض برا آن است که هنگام متعادل کرد مجدد پرتفوی، فروش جایز نیست به همین دلیل محدودیتی بصورت زیر اعمال می شود :

$$xi(k) + pi(k) - qi(k) \geq 0 \qquad (7-3)$$

۴۱- ۳-۴-۳ اجرای کنترل پیش بین مدل در بهینه سازی سبد سهام

به عنوان پایه اصلی پیش‌بینی برای MPC، می‌توانیم مدل را در معادلات **فضای حالت** گسسته بنویسیم که به طور کلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad (8-3)$$

که در آن $x(k)$, $u(k)$ و $y(k)$ به ترتیب حالت، کنترل و خروجی سیستم را نشان می‌دهند.

تابع هدف بصورت زیر تعریف می شود:

$$J\big(u(k),e(k)\big) = \sum_{j=1}^{N_p} e(k+j)^T Q e(k+j) + u(k+j)^T R u(k+j) \qquad (9-3)$$

که $u(k+j)$ نشان‌دهنده مقدار کنترل سیستم در گام زمانی $k+j$ است، در حالی که $e(k+j)$ خطای گام زمانی $k+j$ است. هدف کنترل‌کننده MPC، یافتن کنترل‌کننده بهینه u است که بتواند تابع هدف را به حداقل برساند.
حال مجددا تابع هدف را در نظر گرفته و چون کنترل بهینه مورد استفاده درMPC به فرم درجه دوم است، پس می توانیم تابع هدف را بار دیگر بصورت زیر بیان کنیم:

27

$$\min J\big(\hat{u}(k)\big) = \hat{u}^T(k) H \hat{u}(k) + 2f^T \hat{u}(k) \qquad (10-3)$$

$$H = \hat{B}^T \hat{Q} \hat{B} + \hat{R} \qquad (11-3)$$

$$f = \hat{B}^T \hat{Q} \hat{A}\big(x(k) - r(k)\big) \qquad (12-3)$$

$$\hat{u}(k) = [u(k), u(k+1), \dots, u(k+N_p-1)]^T \qquad (13-3)$$

باتوجه به تابع هدف، ماتریس های مربوطه بصورت زیر نوشته می شوند :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 & \cdots & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & CA^{N_p-4}B & \cdots & CB \end{bmatrix}_{N_p \times N_p}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_p-1} \end{bmatrix}_{N_p \times 1}, \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{N_p \times N_p}, \hat{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{N_p \times N_p}$$

حال کنترل بهینه سیستم در مرحله زمانی K را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$\hat{u}^*(k) = [u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(k+N_p-1)]^T \qquad (14-3)$$

پس از به دست آوردن مقدار کنترل بهینه در گام زمانی k، می‌توانیم از روش MPC برای پیش‌بینی حالت‌های سیستم و خروجی در گام زمانی k+1 استفاده کنیم. همچنین مقدار خروجی در فرآیند بهینه‌سازی به منظور دستیابی به مقدار کنترل بهینه در مرحله بعد لحاظ شده‌است. این فرآیند تا زمانی تکرار می‌شود که خروجی سیستم از مرجع اصلی که در ابتدای دوره تعریف شده‌است، پیروی کند.

۴۲- ۳-۴-۴ شبیه سازی عددی در مساله بهینه سازی

برای شبیه سازی عددی در مساله بهینه سازی پرتفوی، همه **مقادیر کنترل را در شرایط اولیه، صفر** در نظر می‌گیریم. یعنی :

$$pi = qi = 0 \qquad i = 1,2,3$$

مقادیر اولیه متغیرهای حالت :

$$x(0) = [x1(0), x2(0), x3(0), x4(0)]^T = [0,0,0,1\times10^5]^T$$

درابتدای دوره فرض میکنیم سرمایه در دارایی بدون ریسک سرمایه گذاری شده است. بنابراین تمامی دارایی های پرریسک در زمان صفر برابر با صفر خواهند بود.

پارامترهای r1 ، r2 ، α و β به داده های یکی از بانک های بین المللی در جنوب شرق آسیا اشاره دارند و سایر پارامترها توسط نویسندگان مقالات مربوطه انتخاب گردیده است.

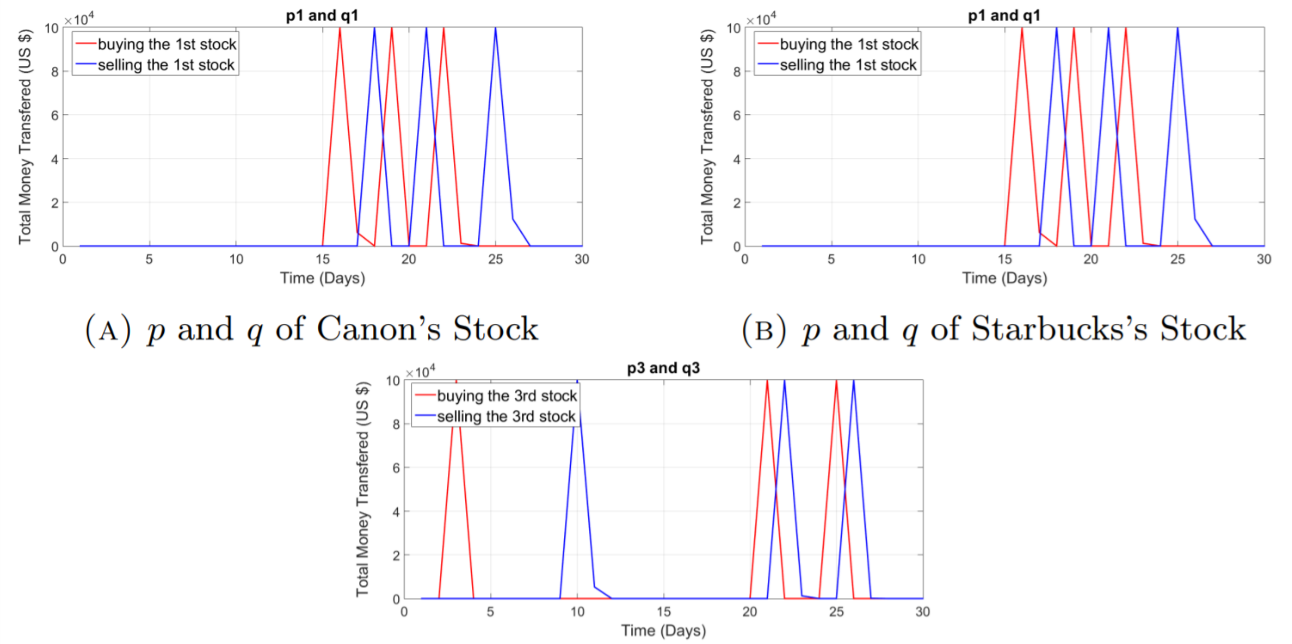
Variable	α	β	r_1	r_2	$x(0)$	N_p
Value	0.0002	0.0002	0.00003	0.00031	$[0,0,0,1\times10^5]^T$	10

Variable	Q	R	$r(k)$	p_i max	q_i max
Value	1	0, 1	10^6	10^5	10^5

جدول ۳-۳

۴۳- ۳-۴-۵ نتایج شبیه سازی

نتایج اقدامات کنترلی مبتنی بر بهینه سازی MPC در شکل ۴-۳ ارائه گردیده است. به وضوح دیده می‌شود که کنترل‌های سیستم در طول دوره، در بازه محدودیت‌ها هستند و کنترل کننده تلاش می کند به بهترین عملکرد سیستم دست یابد.



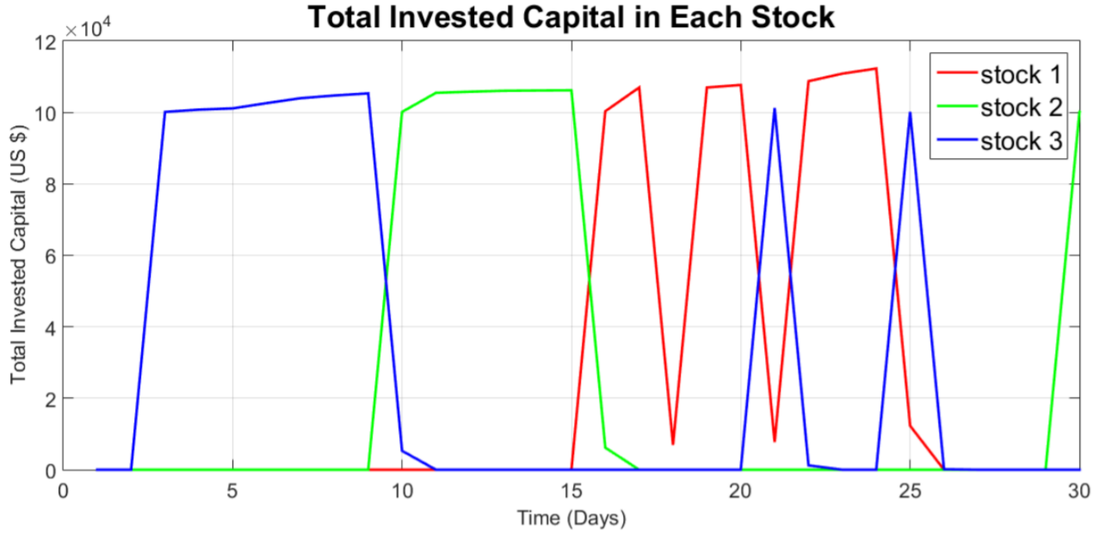
(A) p and q of Canon's Stock

(B) p and q of Starbucks's Stock

(C) p and q of Microsoft's Stock

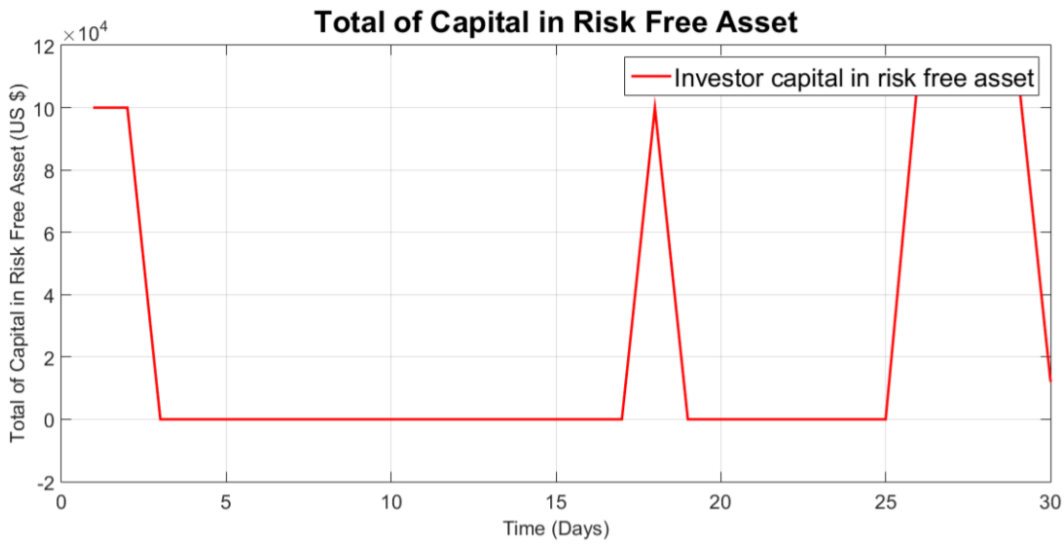
شکل ۳-۴ متغیرهای کنترل در بهینه سازی پورتفولیو

با توجه به شکل ۳-۵ می توان کل سرمایه در هر دارایی پرریسک را مشاهده کرد. مشاهده می شود که در روش MPC تلاش بر این است تا اتلاف به حداقل برسد. این بدین معنی است که سیستم در روش MPC تلاش می‌کند تا زیان را در زمانی که قیمت روزانه سهام کاهش می‌یابد، به حداقل برساند. از سوی دیگر، کنترلر برای به حداکثر رساندن بازده سهام در زمانی که قیمت سهام، روزانه افزایش می‌یابد، تلاش می‌کند. در نتیجه، کل سرمایه سرمایه‌گذاری شده به طور قابل‌توجهی در طول دوره زمانی رشد می‌کند.



شکل ۳-۵ کل سرمایه سرمایه گذاری شده در هر سهام

شکل ۶-۳ مقدار سرمایه سرمایه‌گذاری شده در دارایی بدون ریسک را در طول دوره سرمایه‌گذاری نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۶ می توان دید که در طول ۱۷ روز اول، تغییر قابل‌توجهی در سرمایه سرمایه‌گذاری شده در دارایی بدون ریسک وجود داشت. این شرایط ممکن است ناشی از محدودیت سرمایه اولیه و محدودیت‌های موجود در متغیرهای کنترلی باشد. با این حال، در طول ۵ روز گذشته، کل سرمایه در دارایی بدون ریسک نشان‌دهنده یک تغییر قابل‌توجه از زمانی است که سرمایه‌گذار بازگشت سرمایه را از معامله سهام در طول ۱۰ روز گذشته دریافت کرده‌است.

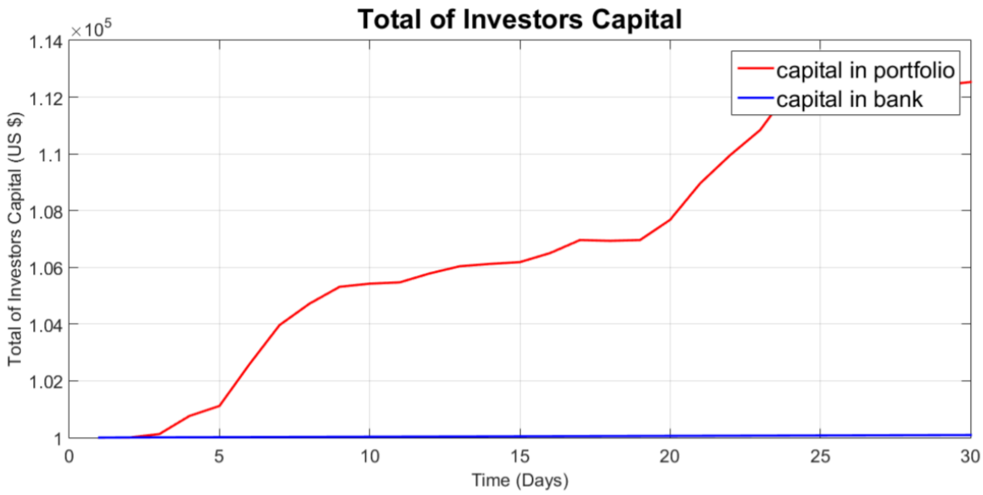


شکل ۳-۶ کل سرمایه سرمایه گذاری شده در دارایی بدون ریسک

در شکل ۳-۷ مشاهده می شود که کنترل‌کننده MPC زمانی که مقدار مرجع نسبتا بزرگ است به بهترین عملکرد دست یابد. این مقدار باید به صورت نظری در نظر گرفته شود، که به کنترلر MPC نیاز دارد تا رفتار کنترل را در بازه محدودیت‌ها انجام دهد.

در نتیجه، میزان سرمایه سرمایه‌گذاری به طور قابل‌توجهی با توجه به بالاترین بازده هر سرمایه‌گذاری افزایش می‌یابد. در شرایط اولیه، مقدار کل سرمایه سرمایه‌گذاری شده $1*10^5$ دلار (100هزار دلار) است. سپس این مقدار رشد می‌کند تا در پایان دوره سرمایه‌گذاری به حدود $1.1272*10^5$ دلار برسد.

نتیجه این که به عنوان یک مقایسه، زمانی که یک سرمایه‌گذار تصمیم گرفت سرمایه خود را در بانک سرمایه‌گذاری کند، در پایان دوره تنها ۱ میلیون دلار دریافت خواهد کرد. تفاوت نسبتا زیاد بین سرمایه‌گذاری در پرتفوی و در بانک در طول دوره نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاری در پرتفوی سهام بیشتر از سرمایه‌گذاری در بانک سود آور است.



شکل ۳-۷ سرمایه کل در پورتفوی و بانک پس از پایان دوره

۴۴- ۳-۴-۶ نتایج، مزایا و معایب GBM-KF و کنترل پیش بین مدل

مزیت استفاده از مدل GBM_KF نسبت به مدل GBM به وضوح مشخص شد و ما می‌توانیم ازMAPE نتایج پیش‌بینی دریابیم که، GBM - KF در پیش‌بینی روند قیمتی روزانه بهتر از مدل GBM عمل می‌کند.

همچنین کنترل‌کننده MPC اقدامی را برای فروش سهام در زمانی که قیمت‌ها پایین می‌روند انجام خواهد داد، و آن‌ها را در زمانی خریداری می‌کند سهام یک روند افزایشی را نشان می‌دهد و این مزیت فوق العاده ای است که کنترل MPC از خود به نمایش می گذارد. بعلاوه، استراتژی MPC یک راه‌حل بهینه براساس تابع هزینه و محدودیت‌های مساله فراهم می‌کند و این نکته را باید در نظر گرفت که شرایط اولیه حالت‌ها باید برای جلوگیری از یک راه‌حل غیرعملی ارائه‌شده توسط محدودیت‌های MPC انتخاب شوند.

به علاوه مهم تر از همه این که عملکرد MPC یک رویکرد موثر را نشان می‌دهد بگونه ای که MPC را قادر می‌سازد تا از یک استراتژی پیروی کند که به استراتژی معامله گران بازار سهام نزدیک شود. همچنین راه‌حل‌های محدود داده‌شده توسط MPC موثر هستند چون هزینه معامله و میزان دارایی‌های محدود قابل معامله را در نظر می‌گیرند. این محدودیت‌ها فرصت‌های بیشتری را برای MPC فراهم می‌کند تا رویکرد بهینه‌سازی آن را با نیازهای سرمایه گذاران تطبیق دهد.

همانگونه که قبلا نیز به آن اشاره شد بزرگترین عیب کنترل پیش بین مدل، نیاز آن به مدل دقیق سیستم مورد نظر است؛ چون در قدم اول باید رفتار آینده سیستم پیش بینی شود. بنابراین اگر مدل ریاضی سیستم دقیق نباشد، پیش بینی های خروجی سیستم نیز معتبر نخواهد بود و در واقع خطای پیش بینی افزایش می یابد که این موضوع مطلوب ما نمی باشد. همچنین لازم به ذکر است که استراتژی‌های بهینه‌سازی مختلف ممکن است منجر به راه‌حل‌های متفاوتی برای همان مساله شوند و وابستگی نسبتا بالایی به تابع هزینه، مقادیر محدودیت ها و مسیر مرجع دارد.

۴۵- ۳-٤-۷ پیشنهادات

می توان در نظر گرفت با استفاده از مباحث روز، از جمله یادگیری تقویتی[۲۱] و ترکیب آن با MPC به یک رویکرد مناسب به عنوان جایگزین روش پیشنهادی دست یافت. چراکه MPC ممکن است بدلیل عدم دقت مدل در ارائه عملکرد حلقه بسته با شکست روبرو شود، از این رو استفاده از RL برای تنظیم فرمول MPC به عنوان تقریب زننده تابع در RL و حل مشکل عدم دقت در مدل MPC با در نظر گرفتن محدودیت ها و قیود هنگام بروزرسانی پارامترهایی که وظیفه تقریب زدن تابع در RL را بر عهده دارند، امکان ترکیب این دو رویکرد را فراهم میکند.

یادگیری تقویتی یک ابزار قدرتمند برای اجرای کنترل بهینه داده محور بدون اتکا به مدل سیستم می‌باشد. هدف یادگیری تقویتی اغلب تکمیل یک کار مانند برنده شدن در یک بازی است که در آن مهم نیست الگوریتم چگونه از فضای حالت عبور می‌کند یا چقدر طول می‌کشد تا برنده شود. تنها چیزی که اهمیت دارد پیروزی در بازی است و این هدف در طول بازی تغییر نمی‌کند. در مقابل، یک کنترل کننده پیش بین توجه زیادی به چگونگی عبور از فضای حالت دارد، دنبال کردن یک مسیر کوتاه و هموار از وضعیت فعلی به وضعیت پایدار ترجیح داده شده، محدودیت‌های وضعیت در طول مسیر نقض نمی شوند و هدف برای الگوریتم MPC در بدترین حالت در هر نمونه، می‌تواند مکررا تغییر کند. با این حال، این تمایزها به عنوان محدودیت‌های اساسی تفسیر نمی شوند، زیرا هر روش می‌تواند اصلاح شود تا سبکی جدید از حل مساله را نشان دهد.

بنابراین به عنوان یک رویکرد پیشنهادی برای پژوهش های آینده میتوان با استفاده از یک مدل ریاضی مدیریت پرتفولیو در فضای حالت گسسته که بر گیرنده تمامی متغیرها و محدودیت ها است، به اجرای کنترل پیش بین مدل در بهینه سازی سبد سهام پرداخته شود و از رویکرد یادگیری تقویتی به نحوی برای رفع نقاط ضعف کنترل پیش بین استفاده گردد تا بهینه سازی کامل شکل بگیرد. یادگیری تقویتی از چارچوب رسمی فرآیند تصمیم گیری مارکوف برای تعریف تعامل بین یک عامل یادگیری و محیط آن (از نظر وضعیت ها)، اعمال و پاداش استفاده می کند. این چارچوب یک روش ساده برای نشان دادن ویژگی های اساسی مسائل هوش مصنوعی است. این ویژگی ها عبارت اند از علت و معلول، عدم قطعیت، نامشخص بودن و وجود اهداف صریح.

[۲۱] Reinforcement Learning (RL)

عناوین مقالات مورد بررسی در زمینه MPC + Reinforcement Learning (RL) نیز در قسمت مراجع [۱۶, ۱۷] ذکر شده است.

منابع

[1] N. Badriah, Z. Siti Nazifah, and M. Maheran, "Forecasting Share Prices Accurately For One Month Using Geometric Brownian Motion," *Pertanika Journal of Science & Technology*, vol. 26, no. 4, 2018.

[2] L. Wang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®*. Springer London, 2009.

[3] V. V. Dombrovsky and E. A. Lashenko, "Dynamic model of active portfolio management with stochastic volatility in incomplete market," in *SICE 2003 Annual Conference (IEEE Cat. No.03TH8734)*, 4-6 Aug. 2003 2003, vol. 1, pp. 516-521 Vol.1.

[4] K. Reddy and V. Clinton, "Simulating stock prices using geometric Brownian motion: Evidence from Australian companies," *Australasian Accounting, Business and Finance Journal*, vol. 10, no. 3, pp. 23-47, 2016.

[5] L. Benjamin and L. Bin, "Monthly seasonality in the top 50 Australian stocks," *Journal of Modern Accounting and Auditing*, vol. 7, no. 4, p. 380, 2011.

[6] S. N. Z. Abidin and M. M. Jaffar, "Forecasting share prices of small size companies in Bursa Malaysia using geometric Brownian motion," *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 8, no. 1, p. 107, 2014.

[7] K. D. Brewer, Y. Feng, and C. C. Kwan, "Geometric Brownian motion, option pricing, and simulation: Some spreadsheet-based exercises in financial modeling," *Spreadsheets in Education*, vol. 5, no. 3, p. 4598, 2012.

[8] A. Ermogenous, "Brownian Motion and its applications in the Stock Market," 2006.

[9] F. Cassola and M. Burlando, "Wind speed and wind energy forecast through Kalman filtering of Numerical Weather Prediction model output," *Applied Energy*, vol. 99, pp. 154-166, 2012/11/01/ 2012, doi: https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2012.03.054.

[10] J. A. Primbs and C. H. Sung, "Stochastic Receding Horizon Control of Constrained Linear Systems With State and Control Multiplicative Noise," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 2, pp. 221-230, 2009, doi: 10.1109/TAC.2008.2010886.

[11] G. Galanis, P. Louka, P. Katsafados, I. Pytharoulis, and G. Kallos, "Applications of Kalman filters based on non-linear functions to numerical weather predictions," *Ann. Geophys.*, vol. 24, no. 10, pp. 2451-2460, 2006, doi: 10.5194/angeo-24-2451-2006.

[12] J. Guo, W. Huang, and B. M. Williams, "Adaptive Kalman filter approach for stochastic short-term traffic flow rate prediction and uncertainty quantification," *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 43, pp. 50-64, 2014/06/01/ 2014, doi: https://doi.org/10.1016/j.trc.2014.02.006.

[13] J. A. Primbs, "Portfolio Optimization Applications of Stochastic Receding Horizon Control," in *2007 American Control Conference*, 9-13 July 2007 2007, pp. 1811-1816, doi: 10.1109/ACC.2007.4282251.

[14] W. H. Syaifudin and E. R. Putri, "The application of model predictive control on stock portfolio optimization with prediction based on Geometric Brownian Motion-Kalman Filter," *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2021.

[15] A. J. Felt, "Stochastic linear model predictive control using nested decomposition," in *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, 4-6 June 2003 2003, vol. 4, pp. 3602-3607 vol.4, doi: 10.1109/ACC.2003.1244113.

[16] G. Williams *et al.*, "Information theoretic MPC for model-based reinforcement learning," in *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 29 May-3 June 2017 2017, pp. 1714-1721, doi: 10.1109/ICRA.2017.7989202.

[17] M. Zanon, S. Gros, and A. Bemporad, "Practical Reinforcement Learning of Stabilizing Economic MPC," in *2019 18th European Control Conference (ECC)*, 25-28 June 2019 2019, pp. 2258-2263, doi: 10.23919/ECC.2019.8795816.

Application of classical control methods in stock portfolio optimization

Mahdi Khakdaman
Master student of Electrical Control Engineering - Shahed University of Tehran

Supervisor
Dr. Mohammad Manthouri
mahdi.khak2017@gmail.com : Email address

Abstract

Determining the optimal portfolio or portfolio is an important issue for investors in domestic and international financial markets. Therefore, capital management in a portfolio can be considered as a dynamic optimal control problem and acceptable trading performance can be achieved by using methods of forecasting and optimizing stock prices in the future. In this study, we will review the research and resources presented in recent years in the field of statistical and estimation methods such as Kalman filter - geometric Brownian motion to predict the future of stock prices and also predictive control to solve the problem of portfolio optimization. take stock.
First, an introduction to the subject is given. Then, the basic concepts and definitions needed to better understand the reviewed sources are presented. In the following, articles and other sources used in this research are given. At the end, a summary of the studies is presented.

Keywords: Portfolio, Kalman Filter, Geometric Brown Motion, Model Predictive Control