يک روش اويلري-لاگرانژي براي حل جريان دو فاز در محيط متخلخل

روح اله فاتحي ***مهرداد تقي زاده منظري*** ***سيامک کاظم زاده حناني***

کارشناسي ارشد استاديار دانشيار

قطب علمي تبديل انرژي، دانشکده مهندسي مکانيک، دانشگاه صنعتي شريف

Email: fatehi@mehr.sharif.edu

چکيده *شبيه سازي جريان دو فاز در محيط متخلخل مستلزم حل معادله اي از نوع جابجايي-پخش با ضرايب غير خطي از نوع جابجايي-غالب است. با توجه به آنکه در مسايل کاربردي معمولاً ابعاد دامنه حل بسيار بزرگ است, کارايي روش عددي اهميت دو چندان مي يابد. در اين تحقيق کارايي روش FVELLAM که شاخه اي از روش هاي اويلري-لاگرانژي در چارچوب روش هاي حجم محدود است, در مسايل جريان دو فاز در محيط متخلخل بررسي شده است. اين نوع روش ها, علاوه بر مزاياي عمومي روش هاي اويلري-لاگرانژي, بقاي جرم را نيز به صورت کلي و موضعي ارضا مي کنند. در اين روش براي هر گام زماني, پس از تعيين ميدان سرعت, معادله درجه اشباع در دو مرحله حل مي شود. در مرحله اول, ابتدا سلول هاي شبکه به تعدادي زير سلول تقسيم شده و مقدار درجه اشباع لحظه قبل بر روي آنها ميانيابي مي شود. سپس مرکز هر يک از زير سلول ها در راستاي خطوط مشخصه معادله همساز, که از صورت ضعيف شده معادله درجه اشباع بدست آمده, با يک رويکرد لاگرانژي حرکت داده مي شود. در مرحله بعد نقاط جابجا شده, روي شبکه ثابت اويلري تصوير شده و معادله حاصل حل مي گردد. در مقاله حاضر, معادلات جريان استخراج شده و نحوه اعمال روش عددي, توضيح داده شده است. اين روش در دو مسأله نمونه يک و دو بعدي بکار گرفته شده و نتايج براي گام هاي زماني و مکاني مختلف مقايسه شده است. نتايج بدست آمده بهبود بازده محاسباتي را با استفاده از گام زماني بزرگ تر و شبکه هاي درشت تر نشان مي دهد. همچنين با کاهش اثر پخش عددي, جبهه بين دو فاز با دقت بالايي پيش بيني شده است.*

واژه هاي کليدي: محيط متخلخل – جريان دو فاز – روش هاي اويلري-لاگرانژي – شبيه سازي مخازن

۱- مقدمه

شناخت جريان سيال در محيط متخلخل براي ما اهميت زيادي دارد. اين موضوع آنگاه واضح تر مي شود که توجه شود اين پديده غالباً در شرايطي خارج از دسترس انسان رخ مي دهد. از اين رو, اندازه گيري و مشاهده رفتار جريان, کار پيچيده و پر هزينه اي است. يکي از پيچيده ترين نوع اين پديده ها, جريان دو فاز در محيط متخلخل است. در اين حالت, دو سيال مخلوط نشدني (که معمولاً تراکم نا پذير فرض مي شوند), با واسطه محيط متخلخل با يکديگر تماس پيدا مي کنند. مقاومت محيط متخلخل در برابر حرکت هر يک از دو ماده, که از اين به بعد آن را "فاز" مي ناميم, تابعي از درصد اشباع آن فاز در نقطه مورد نظر است. همين مسأله باعث غير خطي شدن و در نتيجه پيچيدگي جريان مي شود. معادلات حاکم بر جريان هر فاز با انجام فرضياتي به يک معادله از نوع جابجايي-پخش منتهي مي شود. غير خطي بودن ضرايب اين معادله و نيز غالب بودن جمله جابجايي باعث ايجاد محدوديت در انتخاب گام زماني وگام مکاني (CFL و Pe_Δ) مي شود. از اين رو حل مسايل واقعي مهندسي که اغلب داراي ابعاد بزرگ مي باشند, کاري پر هزينه و زمان بر خواهد بود. ساده ترين راه حل, بکارگيري روش هاي از نوع Upwind است. اين

کار, با وجود آن که مشکل محدوديت زماني را حل نمي کند, اما مانع نوساني شدن جواب مي شود. در عوض, تـأثير نا مطلوب پخش عددي (Numerical Diffusion) را وارد مسأله مي کند. در واقع, اکثر روش هاي سـنتي تفاضـل محدود يا اجزاء محدود به يکي از دو جواب غير فيزيکي *نوساني* يا *پخشي* منتهي مي شوند.[۱]

يک دسته از روش هاي عددي مناسب براي مسايل جابجايي-غالب, که در دهه گذشته مورد توجه قرار گرفت, روش هاي اويلري-لاگرانژي است که شاخه اي از روش هاي جدا سازي عملگر ها (Operator Splitting) بر پايه روش مشخصه ها (Method of Characteristics) اسـت.[۲و۳و۴] در ايـن نـوع روش هـا, جملـه جابجـايي و جملـه تغييرات زماني, ترکيب شده و مشتق مادي در راستاي مشخصه را تشکيل مي دهند. سـپس ايـن معادلـه در دو مرحلـه حل مي شود. در قدم اول, با رويکردي لاگرانژي, مقادير هر نقطه از شـبکه محاسـباتي در راسـتاي خطـوط مشخصـه حرکت داده مي شود. در قدم بعد, نقاط جابجا شده بر روي شـبکه ثابـت تصـوير شـده و معادلـه پخـش خـالص, بـا رويکردي اويلري حل مي شود. کاربرد اين روش در مورد مسايل خطي نشان داده است که محدوديت شـرط CFL را ندارد, قابليت استفاده در محدوده اعداد Pe_Δ بزرگ را داشته و به علاوه, پخش عددي بسيار کمتري از روش هاي رايج اويلري دارد.[۴و۵] البته نقص اساسي روش مذکور, در عدم ارضاي بقاي جرم و پيچيدگي اعمال شـرايط مـرزي است.

براي رفع اين دو مشکل, Celia و همکاران در۱۹۹۰ يک روش اويلري-لاگرانژي معرفي کردند که با همساز موضعي (Localized Adjoint) مناسبي کوپل مي شـود.[۶] ايـن روش کـه بـه اختصـار ELLAM ناميـده مـي شـود, در چارچوب روش هاي باقيمانده وزني, روش پيش گفته را از طريـق يـک تـابع وزن مکـاني-زمـاني (Space-Time Weight Function) اعمال مي کنـد. ايـن دسـته از روش هـا در دهـه ۱۹۹۰ در مسـايل خطـي جابجـايي-پخـش [۷و۸و۹], جابجايي-واکنش [۱۰و۱۱] و جابجايي-پخش-واکنش [۱۲] به طور گسترده اي به کار گرفته شـدند. نتـايج نشان داد که در مسايل خطي, مانند آنچه که در انتقال آلاينده ها در محيط متخلخل پيش مـي آيـد, عـلاوه بـر مزايـاي عمومي روش هاي اويلري-لاگرانژي, بقاي جرم هم بـه صـورت کلـي (Global) ارضـا مـي شـود. همچنـين روش سيستماتيکي براي اعمال شرايط مرزي ارايه شده است.[۱۳] مقايسه جامعي از کارهاي مربوطه را مـي توانيـد در [۱۴] ببينيد.

تلاش هايي نيز براي حل مسايل غير خطي, بـا اسـتفاده از روش هـاي ELLAM صـورت گرفتـه اسـت. Dahle و همکاران در ۱۹۹۵ [۱۵] نوعي از خطي سازي را در مورد اين معادله بکار گرفتند. اين عمل در چارچوب روش اجزاء محدود, براي معادله يک بعدي, انجام شد. نتايج, در حالتي که اثر بالا دست در تابع وزن اعمال مي شود, دقت بـالايي در محدوده $Pe_\Delta < 2.4$ نشان مي دهد. همچنين امکان استفاده از اعداد CFL بزرگتري وجود دارد. خـارج از ايـن محدوده Pe_Δ , جواب نوساني گزارش شده است. خلاصه اي از اين روش را در [۳] مي توان يافت.

در مقاله حاضر, در چارچوب روش حجـم محـدود, نسـخه جديـدي از روش هـاي ELLAM بـراي حـل معادلـه جابجايي-پخش غير خطي که در مسايل جريان دو فاز پيش مي آيد, ارايه شـده اسـت. اسـتفاده از حجـم محـدود در ELLAM ابتدا توسط Healy و Russell در ۱۹۹۲ [۱۶] پيشنهاد شد که بعداً بـا اعمـال آن در مسـأله خطـي يـک بعدي, FV-ELLAM نام گرفت.[۱۷] اين روش در ۱۹۹۸ توسط همان دو, به دو بعد توسـعه يافـت.[۱۸] در سـال ۲۰۰۰, Heberton و همکاران اين روش را در حل مسايل خطي سه بعدي بکار گرفتند. حاصل ايـن کـار بسـته نـرم افزاري MOC3D از مجموعه MODFLOW بود که براي سازمان زمين شناسي آمريکـا (USGS), جهـت شـبيه سازي جريان آب و توزيع آلاينده ها در مخازن زير زميني, تهيه شده است.[۱۹و۲۰]

۲- معادلات جريان

جريان دو فاز (نفت و آب) تراكم ناپذير و غير قابل امتزاج را در یک محیط متخلخل در نظر بگيريد. قانون بقاي جـرم براي هر فاز α به صورت زير است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha \phi S_\alpha\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha\right)=\rho_\alpha q_\alpha \qquad (۱)$$

در اين معادله ρ_α چگالي و q_α دبي حجمي تزريق فاز α است. تنها تفاوت (۱) بـا معادلـه معمـولي بقـاي جـرم, وجود ضرايب ϕ و S_α است كه اولي مربوط به درصد تخلخل محيط بوده و دومي از متوسط گيري حضور هر فـاز در محيط در مقياس ميكروسكوپي (چند ميكرون) به مقياس محاسباتي (چند متر) بدست مـي آيـد و نشـانگر حضـور همزمان دو فاز در یک نقطه است و تعريف مي شود:

$$S_\alpha=\frac{\text{Volume of phase }\alpha}{\text{Volume of inter - connected pore space}} \qquad \alpha=1,2,... \qquad (۲)$$

مقدار S_α بين صفر و یک است. همچنين در هر نقطه

$$\sum_\alpha S_\alpha=1 \qquad (۳)$$

سرعت هر فاز در معادله (۱) از قانون دارسي بدست مي آيد:

$$\vec{\mathrm{V}}_\alpha=-\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha}\left(\vec{\nabla}P_\alpha-\rho_\alpha\vec{g}\right) \qquad (۴)$$

كه در آن K_α نفوذ پذيري كل ماده متخلخل نسبت به فاز α است و طبق رابطه زير به نفـوذ پـذيري نسـبي $\mathrm{k}_{r\alpha}$ و نفوذ پذيري مطلق K مربوط مي شود.

$$\mathrm{k}_{r\alpha}=\frac{K_\alpha}{K} \qquad (۵)$$

اختلاف فشار دو فاز را كه ناشي از اختلاف در خاصيت تر كنندگي آنهاست, با فشار موبينگي P_c نشان مي دهند. اگر فاز تر كننده (آب) را با زير نويس w و فاز ديگر (نفت) را با n نشان دهيم, آنگاه:

$$P_c=P_n-P_w \qquad (۶)$$

كه خود P_c تابع درصد اشباع S_w است. معادلات (۱), (۳), (۴) و (۶) شامل سه مجهول سرعت, فشار و درصد اشباع براي هر فاز, (جمعاً شش مجهول) است. با تعريف سرعت كل به صورت

$$\vec{V}_t=\vec{V}_n+\vec{V}_w \qquad (۷)$$

مي توان مجهولات را كاهش داد. با صرف نظر از تأثير شتاب ثقل و با استفاده از روابـط (۴) و (۶) و (۷) و بـا فـرض تراكم ناپذيري, چگالي از رابطه (۱) حذف شده و با جمع كردن روابط بقاي جرم براي دو فاز, معادله بقـاي جـرم بـه صورت زير خلاصه مي شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi S_w\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(f_w(S_w)\vec{V}_t\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\overline{\lambda}(S_w)\frac{dP_c}{dS_w}\vec{\nabla}S_w\right)+q_w \qquad (۸)$$

كه در آن f_w ، "تحرک نسبي" (Fractional mobility) فاز تر كننده است و برابر نسبت تحرک آن فاز بـه تحـرک كل تعريف مي شود:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n} \quad , \quad \lambda_\alpha = \frac{K_\alpha}{\mu_\alpha} \quad , \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n} \qquad (۹)$$

رابطه (۸) يک معادله جابجايي- پخش (Convection-Diffusion) گذراي غير خطي بر حسب S_w است. جمله دوم رابطه, اثر جابجايي و جمله سوم , اثر پخش را نشان مي دهد. دو نکته در معادله (۸) حايز اهميت است. اول غير خطي بودن جمله جابجايي است که منشأ ايجاد يک جبهه (Front) با شيب تند بين دو فاز مي شود. معادله زير که شکل غير بقايي رابطه (۸) در غياب اثر پراکندگي است, به معادله Buckley-Leverett مشهور است:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS_w} \vec{V}_t \cdot \vec{\nabla} S_w = 0 \qquad (۱۰)$$

جواب تحليلي معادله فوق [۲۱], داراي ناپيوستگي در محل جبهه بين دو فاز است. درجه اشباع اين نقطه (S_{wf}) از رابطه ضمني زير بدست مي آيد:

$$f_w(S_{wf}) = \left. \frac{df_w}{dS_w} \right|_{S_w = S_{wf}} (S_{wf} - S_{wc}) \qquad (۱۱)$$

S_{wc} درصد اشباع آب همزاد است که در محاسبات مهندسي مخازن نفت کاربرد دارد.[۲۱] علت وجود ناپيوستگي در جواب, رفتار تابع $f_w(S_w)$ است. (شکل ۱ را ببينيد) اين مسأله در حل عددي, براي انتخاب گام زماني (عدد کورانت يا CFL) محدوديت ايجاد مي کند. نکته دوم, کوچک بودن مقدار ضريب جمله پخش است که معادله را در ناحيه پيش از جبهه (که مقدار سرعت فاز تر کننده قابل توجه است) به شکل جابجايي-غالب (Convection-Dominant) در مي آورد. در نتيجه عدم انتخاب سلول هاي محاسباتي به اندازه کافي کوچک, (يعني Pe_Δ بزرگ) باعث ايجاد جواب نوساني در حوالي جبهه خواهد شد.

۳- روش عددي

بمنظور ايجاد يک الگوريتم محاسباتي مناسب، ابتدا معادله (۸) را به صورت زير بازنويسي مي کنيم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w) + \vec{\nabla} \cdot \left(f_w(S_w) \vec{V}_t - D(S_w) \vec{\nabla} S_w \right) = q_w \qquad (۱۲)$$

در معادله فوق

$$D(S_w) = \bar{\lambda}(S_w) \frac{dP_c}{dS_w} \qquad (۱۳)$$

ضريب پخش ظاهري است. در معادله (۱۲) ميدان سرعت $\vec{V}_t(\vec{r}, t)$ معلوم فرض شده است. اين کار با قرار دادن مقدار S_w از زمان قبلي و حل روابط (۴) و (۷) ميسر مي شود. اين کار مبناي روش هاي معروف به IMPES (IMplicit Pressure & Explicit Saturation) است. روش هاي اويلري-لاگرانژي نياز به ميدان سرعت دقيقي دارند. در بسياري از کارهاي قبلي از روش Mixed Finite Element استفاده شده است.[۱و۲] در اينجا از روش حجم محدود تفاضل مرکزي براي اين کار استفاده شده است. در نتيجه, سرعت ها با دقت از مرتبه دوم بر روي مرز هر سلول تعيين مي شوند. معادله (۱۲) را در تابع وزن زماني-مکاني $u(\vec{r}, t)$ ضرب کرده, روي دامنه حل Ω و بازه زماني $[0, T]$ انتگرال مي گيريم:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[u \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w) + u \vec{\nabla} \cdot \left(f_w \vec{V}_t - D \vec{\nabla} S_w \right) - u q_w \right] d\Omega dt = 0 \qquad (۱۴)$$

با انجام انتگرال گيري جزء به جزء ، خواهيم داشت:

$$\int_0^T\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial t}(u\phi S_w)+\vec{\nabla}\cdot\left(uf_w\vec{V}_t-uD\vec{\nabla}S_w\right)-uq_w\right]d\Omega dt-\int_0^T\int_\Omega\phi S_w\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{f_w\vec{V}_t}{\phi S_w}\cdot\vec{\nabla}u\right]d\Omega dt-\int_0^T\int_\Omega\left(\vec{\nabla}u-D\vec{\nabla}S_w\right)d\Omega dt=0 \quad (۱۵)$$

اگر چه در حالت كلي, شرايطي از قبيل تعيين ميزان جريان ورودي و خروجي نيز قابل اعمال است, در معادله (۱۵) براي سادگي, از شرط مرزي نفوذ ناپذير استفاده شده است. در نتيجه

$$f_w(S_w)\vec{V}_t\cdot\vec{n}=0 \quad , \quad D(S_w)\vec{\nabla}S_w\cdot\vec{n}=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad (۱۶)$$

كه در آن $\partial\Omega$ نشانگر مرز دامنه حل است.اگر در رابطه (۱۵) عبارت داخل انتگرال دوم را برابر صفر قرار دهيم, به يک معادله كمكي براي تابع وزن مي رسيم كه آن را معادله همساز (Adjoint) مي گويند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{F}_u(S_w)\cdot\vec{\nabla}u=0 \quad (۱۷)$$

كه در آن عبارت

$$\vec{F}_u(S_w)=\frac{f_w(S_w)\vec{V}_t}{\phi S_w} \quad (۱۸)$$

سرعت مشخصه معادله (۱۷) است. براي ارضاي معادله (۱۷) تابع وزن بايد بر روي خطوط مشخصه محاسبه شود. با توجه به اين مطلب و اينكه گسسته سازي به روش حجم محدود مد نظر است, براي سلول دلخواه p قرار مي دهيم:

$$u_p\left(\vec{r},t^{n+1}\right)=\begin{cases}1 & \vec{r}\in\Omega\\ 0 & Otherwise\end{cases} \quad (۱۹)$$

در بازه زماني $\left(t^n,t^{n+1}\right]$ تابع فوق در راستاي خطوط مشخصه جابجا مي شود. در نتيجه, معادله (۱۵) با در نظر گرفتن شرط مرزي (۱۶), براي سلول دلخواه p, در بازه زماني $\left(t^n,t^{n+1}\right]$ مي دهد:

$$\int_{\Omega_p}(\phi S_w)^{n+1}d\Omega-\int_{\Omega_p^*}(\phi S_w)^n d\Omega+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\partial Supp\, u_p}D\vec{\nabla}S_w\cdot\vec{n}\,d\Gamma dt-\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{Supp\, u_p}q_w d\Omega dt=0 \quad (۲۰)$$

كه در آن Supp u_p ناحيه اي از فضاي حل است كه در لحظه مورد نظر در آن ناحيه, مقدار u_P غير صفر است. همچنين Ω_p^* ناحيه اي از فضاي حل در t^n است كه نقاط آن در لحظه t^{n+1} به داخل سلول p (ناحيه Ω_p) مي رسند. براي محاسبه **اولين انتگرال** از رابطه (۲۰), بر خلاف روش رايج در حجم محدود, به جاي انتگرال يک نقطه اي, از روش ذوزنقه اي استفاده مي شود.[۲۰] در اين روش, ابتدا مقادير درجه اشباع در گوشه هاي هر سلول با استفاده از مقادير مراكز سلول هاي همسايه, ميانيابي شده, سپس با داشتن اين مقادير, انتگرال روي سلول محاسبه مي شود. براي محاسبه **انتگرال دوم** نياز به تعدادي نقاط انتگرال گيري درون سلول ها است. براي اين كار, هر سلول به تعدادي "زيرسلول" تقسيم مي شود. راه طبيعي براي محاسبه اين جمله, حركت دادن نقاط سلول مورد نظر از زمان t^{n+1} به عقب به زمان t^n است. اما اين كار مشكلات محاسباتي عملي دارد [۱و۱۸و۲۰] كه باعث مي شود عمليات ردگيري به طريق معكوس, ترجيح داده شود. به اين ترتيب كه نقاط انتگرال گيري پيش گفته در كل دامنه حل, در راستاي خطوط مشخصه, از زمان t^n به جلو تا زمان t^{n+1} حركت داده مي شوند. اين كار مستلزم حل معادله زير است:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}_u \quad (۲۱)$$

که به دو روش اویلر رو به عقب (Backward Euler) یا رانگ کوتا, قابل انجام است. نهایتاً با استفاده از یک تـابع وزن مکاني, نقاط واقع شده در سلول هدف تعیین شده و انتگرال گیري عددي با داشتن مقادیر درجه اشباع, کـه قـبلاً میانیابي شده اند, انجام مي شود.

$$\int_{\Omega_p^*} (\phi\, S_w)^n\, d\Omega = \sum_{\mathrm{m=All\,Subcells}} \frac{(\Delta x_i)(\Delta y_j)(\Delta z_k)}{(N_{SX})(N_{SY})(N_{SZ})} w_p\left(\vec{r}_m^{\,f}\right) S_w\left(\vec{r}_m^{\,i}\right) \tag{۲۲}$$

تابع وزن w_p در رابطه (۲۲) با داشتن مکان جدید زیرسلول m, تعیین مـي کنـد چـه کسـري از حجـم (در دو بعـد, مساحت) زیرسلول m در سلول p واقع مي شود. این کمیت مقداري بین صفر و یک را در سه راستا اتخاذ مي کند:

$$w_p\left(\vec{r}_m^{\,f}\right) = w_{p_x}\left(x_m^f\right) w_{p_y}\left(y_m^f\right) w_{p_z}\left(z_m^f\right) \tag{۲۳}$$

هر یک از توابع سمت راست رابطه (۲۳) به تعداد تقسیم بندي سـلول در همـان راسـتا (N_{SX}, N_{SY}, N_{SZ}) بسـتگي دارد. براي ردگیري هر یک از زیر سلول ها (تعیین $\vec{r}_m^{\,f}$), لازم است گام زماني Δt به تعدادي (N_t) زیربـازه زمـاني تقسیم شود. تعداد این تقسیمات براي سلول هایي که درون آنها چشمه یا چاه وجود دارد و یا شرایط مرزي ورودي یا خروجي داریم, افزایش مي یابد.

انتگرال سوم از رابطه (۲۰) با تقریب یک نقطه اي در زمان, به شکل زیر تبدیل مي شود:

$$\Delta \mathrm{t} \int_{\partial\Omega_p} \left(D\vec{\nabla}S_w\right)^{n+1} \cdot \vec{n}\, d\Gamma \tag{۲۴}$$

که به طریق استاندارد حجم محدود, مثلاً تفاضل مرکزي قابل انجام است. از آنجا که جمله غیر خطي پخش بایستي در زمان جدید محاسبه شود, نیاز به سعي و خطا دارد. در اینجا و نیز براي اثر جمله جابجایي در معادلـه همسـاز (۱۷) از روش تکرار نیوتن استفاده شده است.

در صورتي که شرط مرزي از نوع ورودي باشد, انتگرال زیر به معادله (۲۰) اضافه مي شود:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{Supp\, u_p \cap \partial\Omega} S_{win} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\Gamma dt \tag{۲۵}$$

که در آن S_{win} درجه اشباع جریان ورودي است. براي محاسبه این انتگرال لازم است مرز مورد نظر روي هـر سـلول مرزي به تعدادي بازه کوچکتر تقسیم گردد. سپس به روشي مشابه قبل در زمان ردگیري شود. نهایتاً داریم:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{Supp\, u_p \cap \partial\Omega} S_{win} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\Gamma dt = \sum_{\substack{\mathrm{All\,inflow} \\ \mathrm{Faces}}} \sum_{\substack{\mathrm{m=All} \\ \mathrm{Face} \\ \mathrm{Subarea}}} \sum_{\tau=0}^{N_t} \frac{(\Delta t)(\Delta y_j)}{(N_{SY})} w_p\left(\vec{r}_m^{\,f}\right) V_m S_{win} \tag{۲۶}$$

انتگرال مربوط به شرط مرزي خروجي نیز با کمي پیچیدگي بیشتر, به طریقي مشابه بدست مي آید.

۴- نتایج

روش FV-ELLAM توضیح داده شده در بخش قبل, براي حل دو مسأله نمونه بکار برده شده که نتایج هر کدام در ادامه آمده است. نمونه اول جریان دو فازي یک بعدي و دومي مشهور به مسأله Five spot است کـه تفصـیل آن در بخش مربوط آمده است. خواص سیال ها و سنگ محیط متخلخل در هر دو مورد یکسان گرفته شده است.

$$\begin{aligned} &\rho_n = \rho_w = 1000 \quad kg/m^3 && \phi = 0.2 \\ &\mu_n = \mu_w = 10^{-3} \quad Pa.s && K = 10^{-7} \quad m^2 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$k_{rw} = S_w^{\ 2}$$
$$k_{rn} = S_n^{\ 2} = (1 - S_w)^2 \qquad (۲۸)$$

در رابطه (۲۸) مدل تواني (درجه دو) براي نفوذ پذيري نسبي سنگ انتخاب شده است. البته مدل هاي پيچيده تري نيز وجود دارد, اما در هر حال در شكل كلي جريان و تابع تحرك نسبي (شكل ۱) تفاوت چنداني نمي كند. براي فشار مويينگي از مدل Brooks-Corey استفاده شده است:[۲۲]

$$P_c = -P_e \left(S_w + S_{wr}\right)^{\frac{-1}{\theta}} \qquad (۲۹)$$

كه در آن θ خاصيتي از محيط متخلخل است و S_{wr} درصد اشباع باقي مانده و P_e نيز ضريب تناسب است. در اينجا قرار مي دهيم $S_{wr} = 0.2$ و $\theta = 2$.

نمونه ۱- جريان يک بعدي

در اين مسأله نمونه, چاه در ابتداي دامنه حل قرار گرفته و در انتهاي آن چاه برداشت واقع است. در لحظه اول در كل دامنه $S_w = 0$ است. فاز تر كننده (آب) با نرخ q_w وارد شده و فاز تر شونده (نفت) را پس مي زند. مشخصات مسأله از قرار زير است:

$$\Omega = (0,300) \quad m$$
$$q_w = 12 \times 10^{-6} \quad m^3/s \qquad (۳۰)$$

شبكه مورد استفاده از نوع حجم محدود با گره در مركز سلول, شامل ۱۰۰ سلول است. اندازه شبكه چنان انتخاب شده كه $\Delta x = 3\,m$ باشد. اين معادل است با $N_{SX} = 10$. همچنين تعداد گامهاي زماني برابر است با $N_t = 20$. چاه تزريق با شرط مرزي ورودي مدل شده است. در نقطه $x = 0$ سيال با درجه اشباع يک و نرخ حجمي q_w وارد مي شود. در سلول اول براي افزايش دقت, تعداد زير بازه زماني بيشتر از ساير سلول ها گرفته شده است. سلول انتهايي شامل چاه برداشت است كه درون آن يكنواخت توزيع شده, فرض مي شود.

مسأله براي دو مقدار فشار $P_e = 1,2\,(Pa)$ و گام زماني مختلف حل شده و با حل حجم محدود upwind مرتبه اول با ۵۰۰۰ سلول و گام زماني بسيار كوچک, مقايسه شده است (شكل هاي ۳ و ۴). براي سهولت مقايسه, از اعداد بدون بعد Pe_Δ و CFL استفاده شده است. از آنجا كه سرعت هر فاز در زمان متغير است نياز به تعريف مناسبي از اعداد فوق وجود دارد.[۱۵] در اينجا قرار مي دهيم:

$$Pe_\Delta = \left|\vec{F}_u(S_{wf})\right| \Delta x / D(S_{wf}) \quad , \quad CFL = \left|\vec{F}_u(S_{wf})\right| \Delta t / \Delta x \qquad (۳۱)$$

S_{wf} قبلاً تعريف شده است. مزيت تعريف فوق در اين است كه تقريباً با محل بيشينه ضرايب جابجايي و پخش منطبق است. همانطور كه در شكل ها ديده مي شود, پاسخ ها همخواني خوبي با پاسخ دقيق دارند. كاهش ضريب جمله پخش (افزايش Pe_Δ) باعث تيز تر شدن جبهه بين دو فاز مي شود. همچنين نوساناتي در جواب براي CFL هاي بزرگ در نواحي پيش از جبهه ايجاد مي شود (شكل ۴). اثر تغيير گام زماني بر دقت پيش بيني جبهه در شكل هاي ۵ و ۶ از نزديک نشان داده شده است. مشاهده مي شود كمترين خطا مربوط به $CFL = 0.57$ است و با افزايش گام زماني, فاصله مقادير بدست آمده از روش FV-ELLAM با پاسخ دقيق افزايش مي يابد. در اين جا دو نكته حايز اهميت است. اول آنكه كاهش دقت در گام زماني زياد ناشي از افزايش پخش عددي است. اما در هر حال, محل جبهه بدون خطا تعيين مي شود. دوم اينكه گام زماني كوچک تر هميشه به جواب دقيق تر منتهي نمي شود. وقتي Pe_Δ به اندازه كافي بزرگ باشد, كاهش گام زماني از حدي به بعد منجر به پخش عددي منفي گشته, نوساناتي در محل جبهه در جواب ايجاد مي كند. هر چه ضريب جمله پخش كمتر باشد, نوسان حاصل شديد تر خواهد بود.

نمونه ۲- جريان دو بعدي

در اين قسمت كارايي روش FV-ELLAM ارايه شده, در حل مسـأله مشـهور بـه Five spot بررسـي مـي شـود. همانطور كه در شكل ۷ نشان داده شده است, ميدان حل شامل يک محيط متخلخل به شكل مربع است كه در دو رأس مقابل هم چاه تزريق و برداشت واقع شده است. مشابه مسأله پيش, چاه تزريق توسط جريان ورودي مدل شده و چـاه برداشت به صورت توزيع شده در سلول انتهايي در نظر گرفته مي شود. مرز هاي دامنه, بجز در ناحيه ورودي, به علت تقارن, نفوذ ناپذير فرض مي شوند. ساير مشخصات مسأله از قرار زير است:

$$\Omega = (0,300)\times(0,300) \quad (m^2) \quad , \quad q_w = 12\times 10^{-5}\,(m^3/s) \quad , \quad P_e = 0.5\,(Pa) \qquad (۳۲)$$

اين مسأله نمونه براي دو شبكه مختلف (۲۰*۲۰ سلول و ۵۰*۵۰ سلول) حل شده است كه كانتور هاي درجـه اشـباع پس از ۲۰۰, ۸۰۰ و ۱۱۰۰ روز در شكل ۸ نشان داده شده وبا جواب روش حجم محدود upwind مرتبه اول كه بـه روش صريح با گام زماني بسيار كوچک روي يک شبكه ۱۶۰*۱۶۰ بدست آمده, مقايسه شده است. در شبكه ۲۰*۲۰, گام زماني, پنج روز و در شبكه با ۵۰*۵۰ سلول, يک روز انتخاب شده است. مشاهده مي شود كـه در هـر دو مـورد, محل و شكل جبهه بين دو فاز, در زمان هاي مختلف با دقت خوبي پيش بيني شده است. نوساناتي نيـز در جـواب در نزديكي محل ورودي ديده مي شود. اين قضيه كه در كار هاي قبلي و در مسايل خطي نيز گزارش شده است,[۱۸و۱۹] مشكل روش مورد استفاده در ابعاد بالاتر از يک است كه نقطه تمركز نويسندگان در ادامه تحقيقات قرار گرفته است.

۵- جمع بندي و نتيجه گيري

در اين مقاله استفاده از روش FV-ELLAM در حـل جريـان دو فـاز در محـيط متخلخـل, بـه عنـوان يـک مسـأله جابجايي-پخش غير خطي, بررسي شد. معادلات جريان در بخش دوم به تفصيل ذكر شده و به معادله اي بـر حسـب درجه اشباع فاز تر كننده و سرعت كل منتهي گرديد. سپس اصول روش اويلري-لاگرانژي مورد استفاده و نحوه اعمال آن بر معادله (۱۰) تشريح شد. در پايان نتايج كاربرد اين روش در دو مسأله رايج يک و دو بعدي نشان داده شد.

نتايج بدست آمده نشان مي دهد كه روش FV-ELLAM مزيت زيادي در افزايش كـارايي محاسـباتي در مسـايل از نوع جابجايي-غالب دارد. از جمله, گام زماني انتخابي را ميتوان بطور قابل توجهي بزرگتر اختيار نمود و بـه عـلاوه از شبكه هاي درشت تري استفاده كرد. همچنين كاهش اثر پخش عددي, بدون ايجاد نوسان در جواب در حوالي جبهـه, باعث افزايش دقت اين روش در تعيين محل و شكل جبهه شده و مي تواند عامل گسترش كاربرد روش پيشنهادي در شبيه سازي مسايل مورد نظر در اين مقاله باشد. البته با وجود پيشـرفت هـايي كـه در سـالهاي اخيـر صـورت گرفتـه, مشكلاتي در خصوص اعمال شرط مرزي ورودي و چشمه, در دو و سه بعد وجود داردكـه نيازمنـد توجـه بيشـتر در كارهاي آتي است.

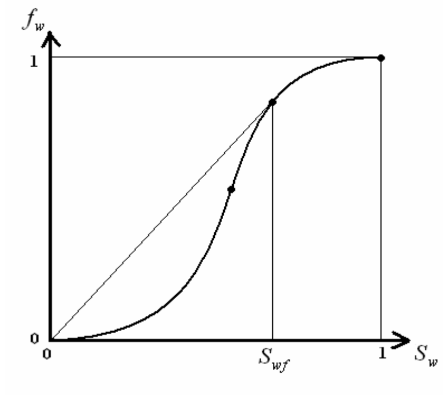
مراجع

[1] Binning, P., and Celia, M.A., *A forward particle tracking Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for solution of the containment transport equation in three dimensions*, Advances in Water Resources, Vol. 25, pp 147-157, 2002.

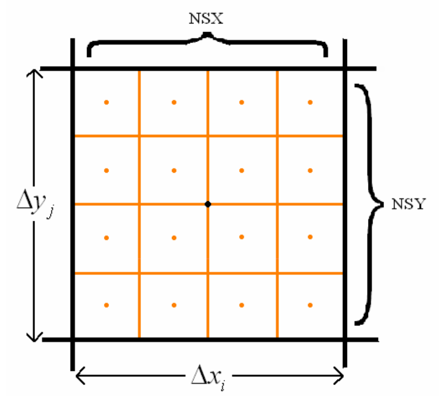
[2] Ewing, R.E., Espedal, M.S., and Sharpley, R.C., *Contaminant transfer simulation of unsaturated and multiphase flows in porous media*, Advances in Hydro-Science and Engineering, Vol. 1, Part B (S. Wang, ed.), University of Mississippi Press, pp. 1867-1873, 1993.

[3] Ewing, R.E., and Weekes, S., *Numerical methods for contaminant transport in porous media*, Computational Mathematics 202, Marcel Decker, Inc., New York, pp. 75-95, 1998.
[4] Ewing, R.E., *Mathematical modeling and simulation for fluid flow in porous media*, in Mathematical Modeling, Russian Academy of Science (A.A. Samarskii, ed.), pp. 117-127, 2001.
[5] Russell, T.F., *Numerical dispersion in Eulerian-Lagrangian methods*, UCD/CCM Report No. 182, Center for Computational Mathematics, University of Colorado at Denver, 2002, Computational Methods in Water Resources, Vol. 2, (S. M. Hassanizadeh et al., ed.), Elsevier, Amsterdam, pp. 963-970, 2002.
[6] Celia, M.A., Russell, T.F., Herrera, I., and Ewing, R.E., *An Eulerian–Lagrangian localized adjoint method for the advection–diffusion equation*, Advances in Water Resources, No. 13, pp. 187–206, 1990.
[7] Wang, H., Dahle, H.K., Ewing, R.E., Espedal, M.S., Sharpley, R.C., and Man, S., *An ELLAM scheme for advection–diffusion in two dimensions*, SIAM J. Scientific Computation, No. 20, pp. 2160–94, 1999;.
[8] Wang, H., Sharpley, R.C., and Man, S., *An ELLAM scheme for advection–diffusion equations in multi-dimensions*, in Computational Methods in Water Resources (Aldama A., et al., eds.) XI, vol. 2. Southampton, UK: Computational Mechanics Publications; pp. 99–106, 1996.
[9] Wang H., *An optimal-order error estimate for an ELLAM scheme for two-dimensional linear advection–diffusion equations*, SIAM J. Numerical Analysis; No. 37, pp.1338–68, 2000.
[10] Wang, H., Ewing, R.E., Qin, G., Lyons, S.L., Al-Lawatia, M., and Man, S., *A family of Eulerian–Lagrangian localized adjoint methods for multi-dimensional advection–reaction equations*. J. Computational Physics; No. 152, pp. 120–63, 1999.
[11] Ewing, R.E., and Wang, H., *An optimal-order estimate for Eulerian–Lagrangian localized adjoint methods for variable-coefficient advection–reaction problems*, SIAM J. Numerical Analysis; No. 33, pp. 318–48, 1996.
[12] Wang, H., *A family of ELLAM schemes for advection–diffusion–reaction equations and their convergence analyses*, Numer. Meth. PDE, No. 14, pp. 739–80, 1998.
[13] Russell, T.F., and Celia, M.A., *An overview of research on Eulerian–Lagrangian localized adjoint methods (ELLAM)*, Advances in Water Resources, Vol. 25, pp. 1215–1231, 2002.
[14] Wang, H., Dahle, H.K., Ewing, R.E., Espedal, M.S., Sharpley, R.C., and Man, S., *An ELLAM scheme for advection-diffusion equations in two dimensions*, SIAM J. Scientific Computation. Vol. 20, No. 6, pp. 2160-2194, 1999.
[15] Dahle, H.K., Ewing, R.E., and Russell, T.F., *Eulerian–Lagrangian localizedadjoint methods for a nonlinear advection–diffusion equation*, Comp Meth Appl Mech Engrg; No.122, pp.223–50, 1995.
[16] Russell, T.F., and Healy, R.W., *Solution of the advection-dispersion equation by a finite-volume Eulerian-Lagrangian local adjoint method*, Computational Methods in Water Resources IX, Vol. 1: Numerical Methods in Water Resources, (Russell, T.F., et al., eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., pp. 33-39, 1992.
[17] Healy, R.W., and Russell, T.F., *A finite-volume Eulerian–Lagrangian localized adjoint method for solution of the advection–dispersion equation*, Water Resources Res.; No. 29, pp. 2399–413, 1993.
[18] Healy, R.W., and Russell, *Solution of the advection–dispersion equation in two dimensions by a finite-volume Eulerian–Lagrangian localized adjoint method*. Advances in Water Resources, No. 21, pp. 11–26, 1998.

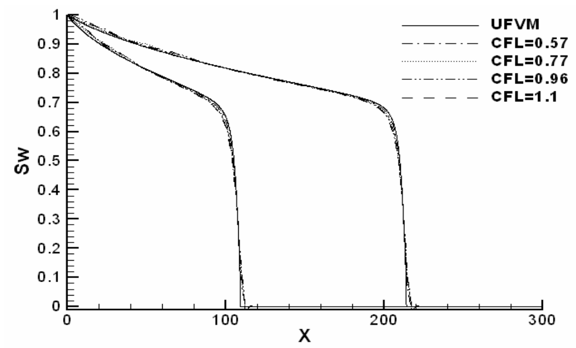
[19] Heberton, C.I., Russell, T.F., Konikow, L.F., and Hornberger, G.Z., *Three dimensional finite-volume ELLAM implementation*, in Computational Methods in Water Resources, (Bentley, L., et al., eds.) Vol. 2, Rotterdam, A.A. Balkema, pp. 603–10, 2000.
[20] Heberton, C.I., Russell, T.F., Konikow, L.F., and Hornberger, G.Z., *A three dimensional finite-volume Eulerian–Lagrangian localized adjoint method (ELLAM) for solute-transport modeling*, Water Resources Investigations Report 00-4087, US Geological Survey, Reston,VA, 2000, Ground Water, special issue on MODFLOW 2001.
[21] Aziz, K., and Settari, A., *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers, Essex, England, 1979.
[22] Bastian, P., and Rivière, B., Discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media, Technical Report 2004-28, IWR (SFB 359), Universität Heidelberg, 2004.



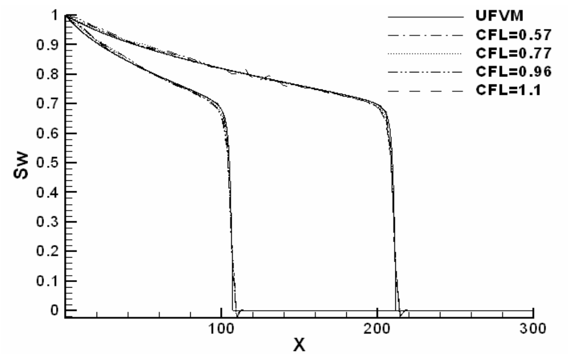
شکل ۱- نمودار تحرک نسبي بر حسب درجه اشباع براي يک مخزن نوعي بدون لحاظ اثر آب همزاد.



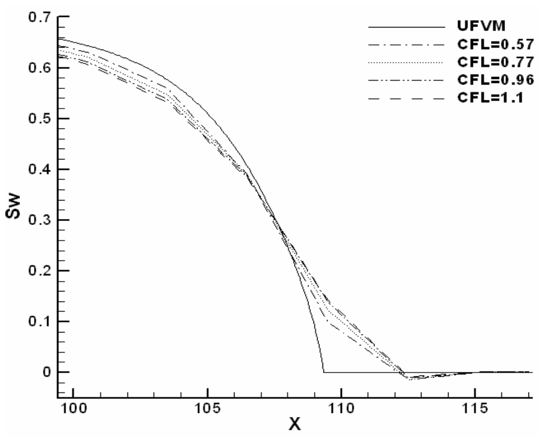
شکل ۲- نحوه تقسيم يک سلول دو بعدي به $N_{SX} \times N_{SY}$ زير سلول.



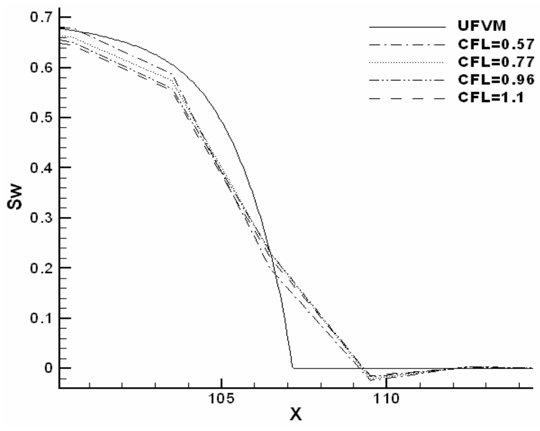
شکل ۳- نمودار درجه اشباع بر حسب مکان براي ضريب Pe=2 ($Pe_{\Delta} = 26$) پس از ۴۰۰ و ۸۰۰ ساعت براي گام هاي زماني مختلف و مقايسه آن با پاسخ روش حجم محدود upwind روي شبکه بسيار ريز.



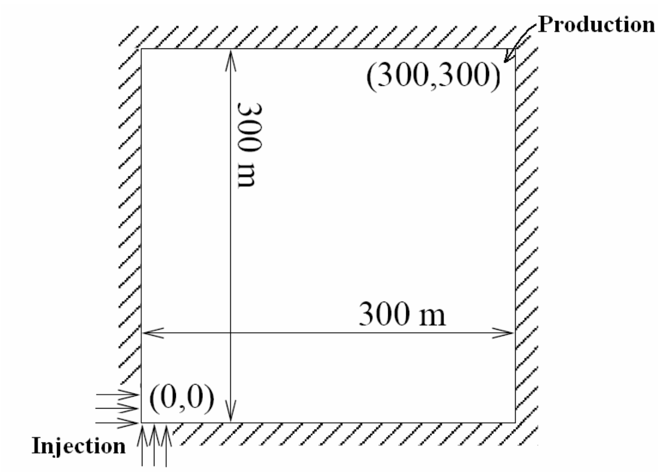
شکل ۴- نمودار درجه اشباع بر حسب مکان براي ضريب Pe=1 ($Pe_{\Delta} = 51$) پس از ۴۰۰ و ۸۰۰ ساعت براي گام هاي زماني مختلف و مقايسه آن با پاسخ روش حجم محدود upwind روي شبکه بسيار ريز.



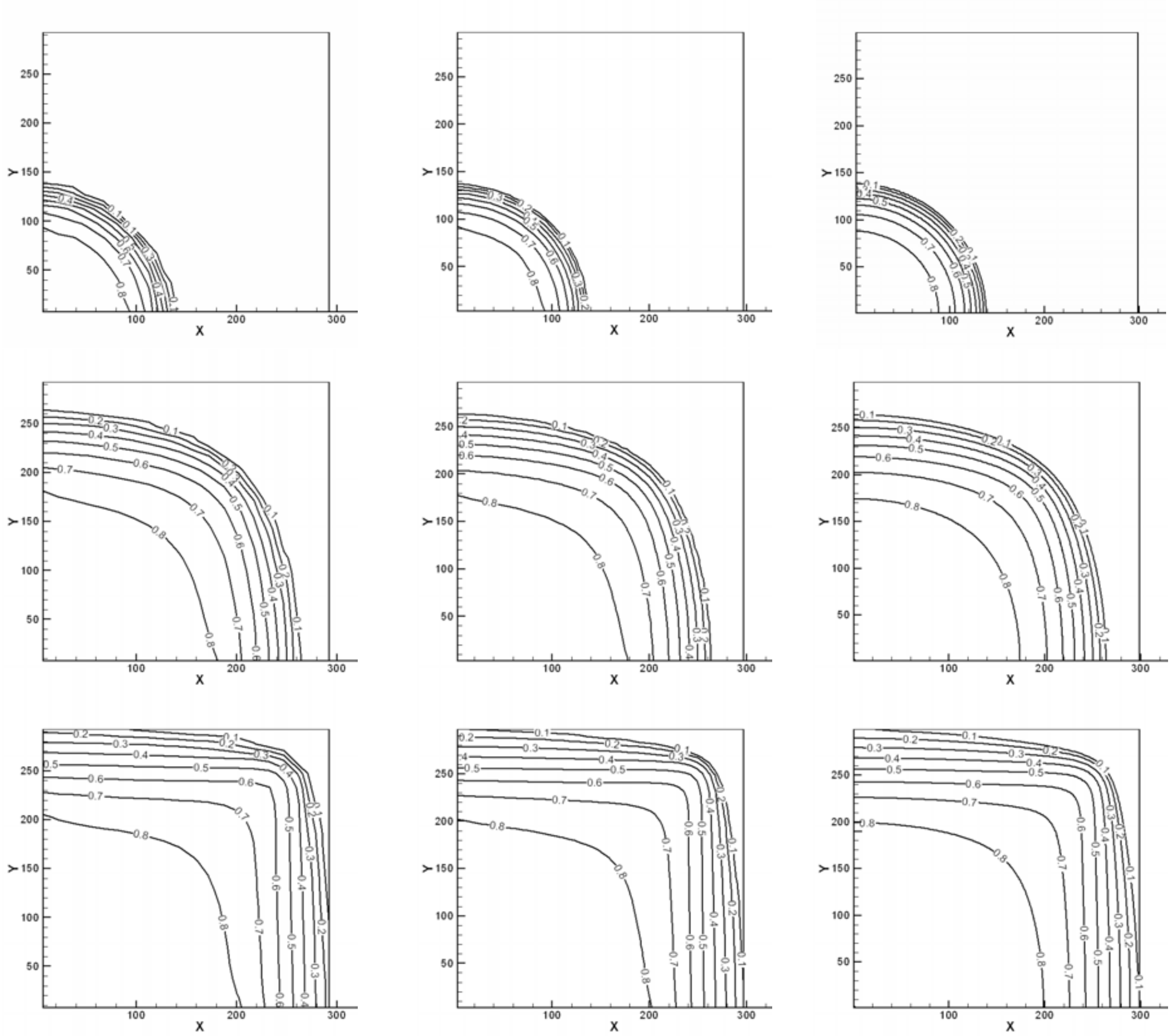
شکل ۵- مقايسه نمودار درجه اشباع بر حسب مکان براي گام هاي زمــاني مختلــف در نزديکــي جبهــه، بـــراي ضــريب $P_e=2$ ($Pe_\Delta = 26$).



شکل ۶- مقايسه نمودار درجه اشباع بر حسـب مکـان بـراي گـام هـاي زمـاني مختلـف در نزديکـي جبهـه، بـراي ضـريب $P_e=1$ ($Pe_\Delta = 51$).



شکل ۷- ابعاد و شکل ميدان حل مسأله نمونه ۲. محل تزريق آب و چاه برداشت در شکل نشان داده شده است.



شکل ۸- کانتور هاي درجه اشباع به روش FVELLAM براي شبکه هاي ۲۰*۲۰ (چپ) و ۵۰*۵۰ (وسط) و به روش حجم محدود upwind مرتبه اول براي شبکه ۱۶۰*۱۶۰ (راست) پس از ۲۰۰, ۸۰۰ و ۱۱۰۰ روز (از بالا به پايين).