ریاضیات مهندسی بر پایه معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)

مریم پورحسین

سازمان سما

چکیده

در ریاضیات، معادله دیفرانسیل جزئی[1] یکی از انواع معادلات دیفرانسیل است که در آن معادله شامل چند متغیر مجهول با مشتقات جزئی آن ها می باشد. این یک مورد خاص از یک معادله دیفرانسیل معمولی است. در این مقاله قصد داریم به بررسی معادله دیفرانسیل جزئی، نحوه نمایش آن، طبقه بندی و انواع آن و بررسی کاربردها در حوزه های مختلف بر اساس مقالات چاپ شده، پرداخته شود.

واژگان کلیدی: دیفرانسیل جژئی، معادله حرارتی، مشتق جزئی، برهم نهی

[1] Partial Differential Equations

طبقه بندی

هر نوع معادله دیفرانسیل جزئی دارای عملکردهای خاصی است که به تعیین این که آیا یک رویکرد المان محدود خاص برای مسئله ای که توسط معادله دیفرانسیل جزئی توصیف می شود مناسب است یا خیر کمک می کند. جواب به معادله بستگی دارد و چندین متغیر مشتقات جزئی با توجه به متغیرها دارند. سه نوع معادله دیفرانسیل جزئی درجه دوم در مکانیک وجود دارد [۱]:

- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی[۱]
- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی پارابولیک[۲]
- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی هایپربولیک[۳]

انواع مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی عبارتند از [۱]:

- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول[۴]: در ریاضیات، وقتی در مورد معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول صحبت می کنیم، معادله فقط مشتق اول تابع مجهول را دارد که دارای متغیرهای m است.
- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی خطی[۵]: اگر متغیر وابسته و تمام مشتقات جزئی آن به صورت خطی در هر معادله دیفرانسیل جزئی رخ دهد، چنین معادله ای معادله دیفرانسیل جزئی خطی نامیده می شود و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی نامیده می شود.
- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی شبه خطی[۶]: یک معادله دیفرانسیل جزئی به صورت شبه خطی گفته می شود که تمام عبارت های دارای مشتقات بالاترین مرتبه متغیرهای وابسته به صورت خطی رخ دهند، یعنی ضریب آن عبارت ها تابعی از مشتقات مرتبه پایین تر متغیرهای وابسته هستند. با این حال، اصطلاحات با مشتقات مرتبه پایین تر می توانند به هر شکلی رخ دهند.
- ✓ معادله دیفرانسیل جزئی همگن[۷]: اگر تمام عبارات یک معادله دیفرانسیل جزئی حاوی متغیر وابسته یا مشتقات جزئی آن باشد، چنین معادله دیفرانسیل جزئی، معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن یا در غیر این صورت همگن نامیده می شود.

[1] Elliptic PDE
[2] Parabolic PDE
[3] Hyperbolic PDE
[4] First-Order Partial Differential Equation
[5] Linear Partial Differential Equation
[6] Quasi-Linear Partial Differential Equation
[7] Homogeneous Partial Differential Equation

بررسی ساختاری معادله دیفرانسیل جزئی

بررسی ساختاری معادله دیفرانسیل جزئی بر اساس [۱] و [۲] است. ما مطالعه خود را در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی با معرفی برخی از اصطلاحات مرتبط با موضوع آغاز می کنیم. یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی در دو متغیر مستقل xو y، به شکل رابطه (۱) است.

$$A(x,y)\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2}+B(x,y)\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y\vartheta x}+C(x,y)\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y^2}+D(x,y)\frac{\vartheta u}{\vartheta x}+E(x,y)\frac{\vartheta u}{\vartheta y}+F(x,y)u = G(x,y)$$

(۱)

که در آن راه حل $u(x,y)$ است. اگر $G(x,y)=0$ برای همه x و y، می گوییم که معادله همگن است. در غیر این صورت، معادله ناهمگن است. حل یک معادله دیفرانسیل جزئی در برخی از ناحیه R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است که دارای تمام مشتقات جزئی موجود در معادله دیفرانسیل جزئی در منطقه ای حاوی R است و معادله دیفرانسیل جزئی را در همه جای R برآورده می کند. می توان متوجه شد که جواب های معادله لاپلاس از نظر شکلی متفاوت است. این عمل بر خلاف حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی همگن است. همه راه حل ها می توانند از یک راه حل کلی تولید شوند. برخی از تکنیک های مورد استفاده در ساخت راه حل های معادلات دیفرانسیل معمولی خطی همگن را می توان به مطالعه معادلات دیفرانسیل جزئی، همان طور که با قضیه ۱ می بینیم، گسترش داد.

قضیه ۱) اصل برهم نهی: اگر $u_1, u_2, u_3 \dots, u_m$ باشد، راه حل های یک معادله دیفرانسیل جزئی همگن خطی در یک منطقه R هستند، پس رابطه (۲) وجود دارد:

$$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+\cdots+c_mu_m=\sum_{k=1}^{m}c_ku_k$$

(۲)

که در آن $c_1, c_2, c_3 \dots, c_m$ ثابتی هستند و همچنین یک راه حل در R است. در واقع متوجه خواهیم شد که معادلات می توانند مجموعه ای نامتناهی از راه حل ها داشته باشند، به طوری که ما جواب دیگری را به صورت یک سری نامتناهی بسازیم.

چند معادله مطرح معادلات دیفرانسیل جزئی در ریاضیات مهندسی

جداسازی متغیرها

روشی که می توان برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی استفاده کرد، جداسازی متغیرها (یا روش محصول) نامیده می شود. به طور کلی هدف از روش جداسازی متغیرها تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی به سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی است

که هر کدام از آن ها فقط به یکی از توابع موجود در فرم حاصل از حل بستگی دارد. فرض کنید تابع $u(x,y)$ حل معادله دیفرانسیل جزئی در متغیرهای مستقل x و y باشد. در جداسازی متغیرها، فرض می کنیم که $u=u(x,y)$ را می توان به عنوان حاصلضرب تابعی از x و تابعی از y نوشت. از این رو، رابطه (۳) وجود دارد.

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

(۳)

و برای تعیین $X(x)$ و $Y(y)$ این محصول را در معادله دیفرانسیل جزئی جایگزین می کنیم. البته برای جایگزینی در معادله دیفرانسیل، باید بتوانیم این محصول را متمایز کنیم. با این حال، این با پیروی از قوانین تمایز حساب چند متغیره انجام می شود که به صورت رابطه (۴) است.

$$u_x=X'Y,\ \ u_{xx}=X''Y,\ \ u_{xy}=X'Y',\ \ u_y=XY',\ \ and\ u_{yy}=XY''$$

(۴)

که در آن X' نماینده dX/dx و Y' نشان دهنده dY/dy است. پس از انجام این جانشینی ها و اگر معادله قابل تفکیک باشد، می توانیم یک معادله دیفرانسیل معمولی برای X و یک معادله دیفرانسیل معمولی برای Y به دست آوریم. سپس این دو معادله حل می شوند تا $X(x)$ و $Y(y)$ را پیدا کنیم.

معادله حرارت یک بعدی

یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل جزئی معادله حرارت است که به صورت رابطه (۵) است.

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta t}=c^2\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2}$$

(۵)

در یک بعد فضایی، حل معادله حرارت در هر موقعیت x و هر زمان t را در یک میله یا سیم نازک به طول p نشان می دهد. از آن جایی که سرعت جریان گرما از طریق میله به ماده تشکیل دهنده میله بستگی دارد، ثابت c^2 که مربوط به انتشار حرارتی ماده است، در معادله گرما گنجانده شده است. هنگام تعیین دما در میله می توان چندین موقعیت مختلف را در نظر گرفت. انتهای سیم را می توان در دمای ثابت نگه داشت، انتهای آن ممکن است عایق باشد یا ترکیبی از این موقعیت ها وجود داشته باشد.

معادله گرما با شرایط مرزی همگن

اولین مشکلی که ما بررسی می کنیم وضعیتی است که در آن دما در انتهای میله به طور مداوم در صفر نگه داشته می شود و توزیع دمای اولیه در میله به عنوان تابع داده شده $f(x)$ نشان داده می شود. از این رو، دمای انتهای صفر ثابت در شرایط مرزی به صورت رابطه (۶) داده می شود.

$$u(0,t) = u(p,t) = 0$$

(۶)

در حالی که توزیع دمای اولیه توسط رابطه (۷) محاسبه می شود.

$$u(x,0) = f(x)$$

(۷)

از آن جا که دما در نقاط پایانی صفر است، می گوییم که مسائل دارای شرایط مرزی همگن هستند که در یافتن راه حل با جداسازی متغیرها و همچنین شرایط مرزی مهم هستند. بنابراین، مشکل به صورت رابطه (۸) خلاصه می شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta u}{\vartheta t} = c^2 \dfrac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2} \\ u(0,t) = 0, \;\; u(p,t) = 0, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \;\; 0 < x < p \end{cases}$$

(۸)

این مشکل را از طریق جداسازی متغیرها با یک فرض به صورت رابطه (۹) حل می کنیم.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

(۹)

جایگزینی در معادله حرارتی (۵) به صورت رابطه (۱۰) نتیجه می دهد.

$$\frac{T'}{c^T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

(۱۰)

که در آن $-\lambda$ ثابت جداسازی است و رابطه حاصل آن به صورت (۱۱) است.

$$T' + c^2\lambda T = 0 \quad and \quad X'' + \lambda X = 0$$

(۱۱)

بررسی کاربردها در مطالعات پیشین

مطالعات گوناگون در زمینه های معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه شده است. این بخش چند مطاعه اخیر جدید در زمینه ریاضیات مهندسی را به کمک معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت کلی بررسی می کند. در [۳] شبکه های عصبی مبتنی بر فیزیک با درون یابی چند جمله ای برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی ترکیب شده اند. نوسان اجباری معادلات دیفرانسیل جزئی کسری ضربه ای در [۴] بررسی شده است. در [۵] تحلیل محاسباتی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری محلی در حوزه حساب فراکتال[1] مطالعه شد. در [۶] توزیع نرمال و گاما تعمیم یافته وابسته به زمان به عنوان راه حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه بالاتر حل شده است. در [۷] روش خط محدود برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه بالا در علوم و مهندسی مطالعه شد. در [۸] شناسایی معادلات دیفرانسیل جزئی در نظریه مکانیک سازه از طریق تحلیل و طراحی فضا انجام شده است. در [۹] راه حل های مجموعه تصادفی برای معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی و هذلولی مطرح و حل شده است. در [۱۰] بررسی حل های تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی مختلط کسری زمان–فضای منطبق اصلاح شده ارائه شد.

[1] Fractal

نتیجه گیری

معادلات دیفرانسیل جزئی هم در ریاضیات و هم در فیزیک بسیار مهم هستند. این تحقیق مقدمه ای بر برخی از ساده ترین و مهمترین معادلات دیفرانسیل جزئی در هر زمینه های مختلف و تکنیک هایی برای حل آن ها ارائه می کند. معادلات دیفرانسیل جزئی شامل بیش از یک متغیر مستقل است و حل آن ها بسیار دشوارتر از معادلات دیفرانسیل معمولی[1] است. گاهی اوقات می توان متغیرها را در یک معادله دیفرانسیل جزئی جدا کرد تا آن را به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش داد. تعدادی از توابع ویژه به این ترتیب نتیجه می شود. توابع ویژه تعمیم توابع ابتدایی آشناتر هستند و شامل توابع گاما، توابع زتا، توابع بسل، توابع لژاندر، توابع لاگر، چند جمله ای هرمیت و توابع فراهندسی می شوند. برخی از روابط شامل کارکردهای ویژه واقعا قابل توجه است.

[1] Ordinary differential equation

مراجع

[1] Martha L. Abell, and James P. Braselton. 10 - Partial Differential Equations. Differential Equations with Mathematica, Fourth Edition, 2016, Pages 781-833.

[2] Brent J. Lewis, E. Nihan Onder, and Andrew A. Prudil. Chapter 5 - Partial differential equations. Advanced Mathematics for Engineering Students, The Essential Toolbox, 2022, Pages 131-164.

[3] Siping Tang, Xinlong Feng, Wei Wu, and Hui Xu. Physics-informed neural networks combined with polynomial interpolation to solve nonlinear partial differential equations. Computers & Mathematics with Applications, Volume 132, 15 February 2023, Pages 48-62.

[4] G. E. Chatzarakis, and K. Logaarasi. Forced oscillation of impulsive fractional partial differential equations. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Volume 7, June 2023, 100478.

[5] Devendra Kumar, Ved Prakash Dubey, Sarvesh Dubey, Jagdev Singh, and Ahmed Mohammed Alshehri. Computational analysis of local fractional partial differential equations in realm of fractal calculus. Chaos, Solitons & Fractals, Volume 167, February 2023, 113009.

[6] S. I. Serdyukov. Time-dependent generalized normal and gamma distributions as solutions of higher-order partial differential equations. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Volume 6, December 2022, 100453.

[7] Xiao-Wei Gao, Yu-Mo Zhu, and Tao Pan. Finite line method for solving high-order partial differential equations in science and engineering. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Volume 7, June 2023, 100477.

[8] Thomas Brion, Pascal Fossat, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille, Abdel-Malek Zine, and Christophe Droz. Identification of partial differential equations in structural mechanics theory through k-space analysis and design. Composite Structures, Volume 304, Part 2, 15 January 2023, 116297.

[9] Jelena Karakašević, and Michael Oberguggenberger. Random set solutions to elliptic and hyperbolic partial differential equations. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 69, July 2022, 103289.

[10] Chavda Divyesh Vinodbhai, and Shruti Dubey. Investigation to analytic solutions of modified conformable time–space fractional mixed partial differential equations. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Volume 5, June 2022, 100294.