هیجدهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن
۲۶ و ۲۷ فروردین ۱۳۸۸، دانشگاه تربیت‌معلم

ماتریس میانگین وزن‌دار روی فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار

فاطمه سعیدی، غلامرضا طالبی و رحمت ا... لشکری‌پور*

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی
lashkari@hamoon.usb.ac.ir
fatemehsaidi@gmail.com
gh11talebi@gmail.com

چکیده

هدف این مقاله، محاسبه نرم برای ماتریس‌های میانگین وزن‌دار (با درایه های نامنفی) است که روی فضاهای $l_1(w)$ ($d(w,1)$) اثر می کنند.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2000: ۴۷A۳۰، ۴۷B۱۵.
واژه های کلیدی: نرم، ماتریس میانگین وزن‌دار، فضای دنباله‌ای وزن‌دار، ماتریس سیزارو.

* سخنران

۱ مقدمه

تعریف ۱.۱ . ماتریس میانگین وزن‌دار A_d، یک ماتریس نامتناهی به شکل زیر است:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{d_k}{D_n} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

که d_nها اعداد نامنفی با مجموع جزئی $D_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$ هستند. به‌علاوه فرض می‌کنیم $d_1 > 0$. بنابراین D_n مثبت می‌باشد.

تعریف ۲.۱ . عملگری را که دارای ماتریس A_d می باشد عملگر ماتریس میانگین وزن‌دار می نامیم. اگر $v_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} w_k$، آنگاه $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{w_k d_n}{D_k}$. حال اگر $V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ می‌توان W_n را نیز بطور مشابه تعریف کرد، دراین‌صورت نرم A_d سوپرمم $\frac{V_n}{W_n}$ است.

تعریف ۳.۱ . ماتریس سیزارو، A، یک ماتریس نامتناهی به شکل زیر است:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n} & k \leq n \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

که یک ماتریس پایین مثلثی می باشد.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید $w = (w_n)$ دنباله‌ای نزولی و نامنفی باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ واگرا باشد. قرار دهید $W_n = w_1 + w_2 + ... + w_n$. آنگاه $l_1(w)$ (و فضای دنباله‌ای لورنتس $d(w, 1)$)عبارت است از فضای دنباله‌های $x = (x_n)$ به‌طوری‌که سری‌های

$$||x||_{l_1(w)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n| \qquad \& \qquad ||x||_{d(w,1)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^*,$$

همگرا باشند، که در آن x_n^* تغییر آرایش یافته $|x_n|$ به‌صورت نزولی می باشد.

تعریف ۵.۱ . فرض کنید عملگر B به‌صورت $Bx = y$ تعریف شده باشد، که در آن $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} x_k$. نرم B را، که به‌عنوان عملگری از $l_1(w)$ به $l_1(w)$ درنظر گرفته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||B||_{l_1(w)} = sup \ \{ ||Bx||_{l_1(w))} \ : \ ||x||_{l_1(w))} \leq 1 \}.$$

در حالتی که B روی $d(w, 1)$ تعریف شده باشد، داریم

$$||B||_{w,1} = sup \ \{ ||Bx||_{w,1} \ : \ ||x||_{w,1} \leq 1 \}.$$

به‌علاوه تعریف می کنیم

$$M_{w,1} = sup \ \{ ||Bx||_{l_1(w))} \ : \ ||x||_{l_1(w))} = 1 \},$$

که در آن $x = (x_n)$ دنباله ای نامنفی و نزولی در $l_1(w)$ درنظر گرفته می شود.

همچنین فرض کنید: ۱. به‌ازای هر n, k، $b_{n,k} \geq 0$. این نتیجه می‌دهد که برای هر x، $|Bx| \leq B(|x|)$ و لذا دنباله های نامنفی برای نشان دادن $||B||_{l_1(w)}$ کافی هستند. علاوه بر این: ۲. فرض کنید $B(e_k)$ متعلق به $l_1(w)$ باشد، یعنی به‌ازای هر k ، $\sum_{n=1}^{\infty} w_n b_{n,k}$ همگرا باشد. این تضمین می کند که $B(e_k)$ متعلق به $l_1(w)$ باشد.

همچنین فرض کنید: ۳.([۳]، قضیه ۱) برای هر زیرمجموعه M, N ازاعداد طبیعی که به‌ترتیب دارای m, n عنصر هستند داشته باشیم $\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$. دراین‌صورت برای هر عنصر نامنفی x از $l_1(w)(d(w,1))$ داریم $||Bx||_{l_1(w)} \leq ||Bx^*||_{l_1(w)}$ ($||Bx||_{w,1} \leq ||Bx^*||_{w,1}$)که در آن x^* همان $|x_n|$ است که به‌صورت نزولی مرتب شده است. لذا دنباله های نامنفی و نزولی مانند x برای تعیین $||B||_{l_1(w)}$ ($||B||_{w,1}$) کافی است.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید A ماتریس میانگین با رابطه $Ax = y$ باشد، که $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$. ماتریس A همان ماتریس سیزارو است. وقتی A به‌عنوان عملگری روی $l_p(1 < p)$ درنظر گرفته شود نامساوی هاردی [۱] نتیجه می‌دهد که $||A||_p = \frac{p}{p-1}$ ، و کران پایین $L_p(A)$ برابر $\zeta(p)^{\frac{1}{p}}$ است [۱]. توجه کنید Ae_1 برابر دنباله $(\frac{1}{n})$ است. بنابراین برای این که A_{e_1} متعلق به $l_1(w)$ باشد، نیاز داریم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n}$ همگرا باشد. قرار دهید $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{w_k}{k}$ و $U_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. به‌راحتی دیده می شود که $U_n = W_n + nu_{n+1}$.

لم ۱.۲ . عملگر A، $l_1(w)$ را به $l_1(w)$ می‌نگارد، اگر

$$\sup_n \frac{U_n}{W_n} = \sup_n (1 + \frac{nU_{n+1}}{W_n}) < \infty.$$

این سوپرمم نرم A خواهد بود.

لم ۲.۲ . فرض کنید B عملگری باشد که شرایط (۱) و (۲) و (۳) را برآورده کند و هنگامی که $n \to \infty$، $\frac{u_n}{w_n} \to U$. آنگاه B، $l_1(w)$ را به $l_1(w)$ می‌نگارد. اگر برای هر n، $\frac{u_n}{w_n} \leq U$ (به‌خصوص، اگر $\frac{u_n}{w_n}$ صعودی باشد) آنگاه $M_{w,1}(B) = ||B||_{l_1(w)} = U$.

لم ۳.۲ . فرض کنید B عملگری روی فضای $l_1(w)$ باشد که در شرایط (۱) و (۲) و (۳) صدق کند. اگر $u = (u_n)$ چنان باشد که برای هر n ، $\frac{u_n}{w_n} \leq \frac{u_1}{w_1}$ (به خصوص، اگر $\frac{u_n}{w_n}$ نزولی باشد) آنگاه B یک عملگر از $l_1(w)$ به توی $l_1(w)$ است و همچنین $||B||_{l_1(w)} = \frac{u_1}{w_1} = M_{w,1}(B)$.

قضیه ۴.۲ . اگر $w_n = (\frac{۱}{n^p})$ که $۰ < p \leq ۱$، آنگاه ماتریس میانگین وزن‌دار A_d، که $d_n = (\frac{۱}{n^q})$ و $۰ < p - q \leq ۱$، یک عملگر کراندار از $l_۱(w)$ به خودش است. همچنین $M_{w,۱}(A_d) = ||A_d||_{l_۱(w)} = \zeta(p - q + ۱)$، که در آن $\zeta(p - q + ۱) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^{p-q+۱}}$.

اثبات. چون $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{w_k d_n}{D_k}$، پس

$$\frac{u_n}{w_n} = n^p \sum_{k=n}^{\infty} \frac{w_k d_n}{D_k} \leq n^{p-q} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{۱}{k^{p-q+۱}} \leq \frac{u_۱}{w_۱}.$$

حال بااستفاده از لم ۳ خواهیم داشت

$$M_{w,۱}(A_d) = ||A_d||_{l_۱(w)} = \frac{u_۱}{w_۱} = \zeta(p - q + ۱).$$

مراجع

[1] G. H. Hardy, J. Littlewood and G. Polya., ‘ *Inequalities*’, Cambridge Univ . 2001.

[2] R. Lashkaripour, *Lower bounds and norms of operators on Lorentz sequence spaces*, Doctoral Dissertation, Section 3 (Lancaster, 1997).

[3] R. Lashkaripour, *Operators on Lorentz sequence spaces II*, WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS, issue 1, Volume 1, January(2002), 16-22.

[4] R. Lashkaripour, D. Foroutannia,*Lower bounds for matrices on weighted sequence spaces*, Journal of Scinces, Islamic Republic of Iran , 2006,49-56.

[5] D. V. Widder, *Laplace Transformes*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1968.