بیستمین سمینار جبر،
۲ و۳ اردیبهشت ۱۳۸۸، صفحه ۴–۸،
دانشگاه تربیت معلم

هموارى و هموارى پوچ ـساز

اکبر گلچین
دانشگاه سیستان و بلوچستان *agdm@math.usb.ac.ir*
الهام خداپرست*
دانشگاه سیستان وبلوچستان *el_kh_85@yahoo.com*

چکیده

دراین مقاله به بیان خاصیت هموارى براساس یک به یک بودن نگاشت φ متناظر با نمودار بربرکنندههاى خاص پرداخته، سپس به رابطه بین هموارى و هموارى پوچ ـساز مى‌پردازیم. در ادامه کلاس‌هایى از مونوئیدها ر معرفى مى‌کنیم که مطلقاً هموار پوچ ـساز مى‌باشند و سپس با مثالى نشان مى‌دهیم، مونوئیدهایى وجود دارند که مطلقاً همو ر پوچ ـساز نیستند.

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱. یم‌گروه S را صفر راست مى‌نامیم هرگاه، براى هر $s \in S$ ،z، $sz = z$. مونوئید S را حذف پذیر ـ پ ى‌نامیم هرگاه، هر $s \in S$ ذف پذیر ـ پ ا د یعنى، براى $\in S$ ـ تساوى = ـ ایجا کند ـ ـ. رض کنیم S ک ونوئید با نصر همانى ۱ ـ یک جمو ه اتهى با د. A را یک یستم چپ گو یم هر گاه، نگا تى و $\times A \longrightarrow A$ ، $\longrightarrow$ $(s\ a)$ موجو با د که: a 1_S ـ $(ta) = (t)$: A $\forall$ S $\in$ s : S یستم پ A ا با s مایش ى یم. S یستم راست A یز ه طر ق شابه تعر ف ى و رض کنیم B یک زیرسیستم دلخواه ار A_S ا د. همنهشتى ρ_B وى A ا ه به ور زیر عر ف ى و

واژه‌هاى کلیدى : حذف پذیرى، صفر راست، هموارى، هموارى پوچ–ساز.
رده بندى موضوعى (MSC2000):۲۰M۳۰.

B ـ a' یا $a = a$ ⟸ $'$ $a\,\rho_B$ یک همنهشتی ر س گو یم و سیستم خارج قسمتی s را ه با / شال ی یم، سیستم خارج قسمتی ر س ی‌نامیم. بخصو ـ اگر S ـ یک ید آل است با د، آنگاه $K/$ سیستم خارج قسمتی ر س ولید ده ترس ید آل است گو یم.

A_S را هموار گو یم هر گاه، ابعگو $- \otimes_S A$ حافظ کر ختی‌ها از یستم‌های چپ با د. A_S را عیف هموار گو یم هر گاه، ابعگو $- \otimes_S A$ حافظ کر ختی‌ها از ید آل ای پ به توی S با د. A_S را به طور اساسی هموار عیف گو یم هرگاه، تابعگو $- \otimes_S A$ حافظ کر ختی‌ها از ید آل ای چپ اصلی S به توی S با د. گوئیم A_S در ر L صدق ی کند، هرگاه برای هر A A موجو با د به طوری که $a =$.

فرض کنیم S یک مونوئید باشد. نمودار برابرکننده زیر را در سیستم‌های چپ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

که در آن می‌توان فرض کرد $\{m \in {}_SM \mid f(m) = g(m)\}$ E و ι یک نگاشت شمول را در نظر می‌گیریم. با ضرب تانسوری A_S از چپ در نمودار بالا ممکن است $\otimes E$ ، برابرکننده باشد یا نباشد. لذا بنا به خاصیت جهانی برابرکننده، نگاشت کانونی $E' \longrightarrow E \otimes$: , که در آن $E' : \{ \otimes m \in \otimes M \mid \otimes f(m) = \otimes g(m)\}$ برابرکننده $_A \otimes f$ و $_A \otimes g$ در کتگوری $\mathbf{Set}$ می‌باشد وجود دارد، به طوری که نمودار زیر تعویض‌پذیرمی باشد.

$$\begin{tikzcd} \otimes E \arrow[r, "{}_A \otimes \iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & \otimes M \arrow[r, shift left, "{}_A \otimes f"] \arrow[r, shift right, "{}_A \otimes g"'] & \otimes N \\ E' \arrow[ur, "\iota'"'] & & \end{tikzcd}$$

فرض کنیم A_S یک سیستم راست، ${}_SM$ و ${}_SN$، سیستم‌های چپ و ${}_SM \longrightarrow {}_SN$: f,g، نگاشت باشند. گوییم A_S به کلاس $[{}_SM, f, g, {}_SN]_i$ تعلق دارد، هرگاه نگاشت φ در نمودار بالا یک به یک باشد.

علامت اختصاری $[{}_SM, {}_SN]_i$ را برای کلاس S سیستم‌های راست متعلق به $[{}_SM, f, g, {}_SN]_i$، به ازای تمام انتخاب‌های ممکن از نگاشت‌های ${}_SM \longrightarrow {}_SN$: f,g، و $\bigcap[{}_SM, {}_SN]_i$ را به عنوان کلاس S سیستم‌های راست متعلق به $[{}_SM, f, g, {}_SN]_i$ به ازای تمام انتخاب‌های ممکن از ${}_SM$ و ${}_SN$ و تمام انتخاب‌های ممکن از نگاشت‌های ${}_SM \longrightarrow {}_SN$: f,g به کار می‌بریم. I را به عنوان ایده‌ال چپ S بکار می‌بریم. همچنین هنگامیکه هم‌دامنه مورفیسم‌ها یک سیستم فاکتور ریس باشد از نماد $\bigcap[M, M/N]_i$ استفاده می‌کنیم.

لم . $A_S \in [{}_SM,\ f,\ g,\ {}_SN]_i$، اگر و فقط گر از تساوی $a \otimes m = a' \otimes m'$ در $A \otimes {}_SM$ که $\{x \in {}_SM \mid f(x) = g(x)\}$ $m, m' \in E$، تساوی $a \otimes m = a' \otimes m'$ در $A \otimes {}_SE$ نتیجه شود، به عبارت دیگر $A \in [{}_SM,\ f,\ g,\ {}_SN]_i$، اگر و فقط گر برای هر تکریختی $\iota : {}_SE \longrightarrow {}_SM$، نگاشت $1_A \otimes \iota : A \otimes {}_SE \longrightarrow A \otimes {}_SM$ یک به یک باشد.

تعریف ۲. فرض کنیم S یک مونوئید باشد. برای هر $s \in S$، مجموعه $\{ \in S \mid s \}$ L در صورت غیر تهی بودن یک ایدال چپ می‌باشد که آن را ایدال چپ ... می‌نامیم. A را هموار چپ ... گوئیم، هرگاه برای هر $s \in S$، نگاشت طبیعی $A \otimes L \longrightarrow A$ یک به یک باشد. با توجه به تعریف، سیستم‌های متعلق به کلاس $[S, S]$ هموار چپ ... می‌باشند. مونوئید را کاملاً هموار چپ ... گوئیم، هرگاه همه سیستم‌های روی آن هموار چپ ... باشند.

۲ بررسی خواص هموار سیستم‌ها

در این قسمت به بیان قضایا و نتایج اصلی می‌پردازیم.

قضیه . عبارات زیر برای هر S سیستم A معادل می‌باشند

i) A_S هموار است.

ii) $A \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SN]_i$.

iii) $A \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SM/N]_i$.

iv) $A \in \bigcap[{}_SM,\ \pi,\ ,\ {}_SM/N]_i$.

v) $A \in \bigcap[{}_SM,\ {}_SM]_i$.

قضیه ۲. اگر یک مونوئید حذف‌پذیر چپ باشد، آن‌گاه هر S سیستم راست به کلاس $\bigcap[M,\ S]_i$ تعلق دارد.

نتیجه . هر مونوئید حذف‌پذیر چپ، کاملاً هموار پوچ ساز می‌باشد.

قضیه ۳. اگر یک نیم گروه صفر راست و S، آن‌گاه همه S سیستم‌های راست به کلاس $\bigcap[\ ,\ S]$ تعلق دارند.

نتیجه ۲ اگر S، بطوریکه نیم‌گروه صفر راست باشد، آن‌گاه کاملاً هموار پوچ ساز می‌باشد.

با توجه به تعریف واضح است که هر سیستم هموار، هموار پوچ ساز می‌باشد. حال با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که عکس این مطلب همواره برقرار نیست.

مثال . فرض کنیم $S = \{\ ,\ s,\ \}$ یک مونوئید باشد که در آن صفرهای راست هستند. $M = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$ به همراه جدول زیر یک S سیستم چپ است.

	a	b	c	d	e
1	a	b	c	d	e
s	c	d	c	d	e
t	e	c	c	d	e

بنا به نتیجه قبل هر سیستم راست، از جمله Θ هموار پوچ ساز است. حال نشان می‌دهیم که { } Θ_S به کلاس $\bigcap[M,\ M]_i$ تعلق ندارد و لذا طبق قضیه هموار نیست. فرض کنیم نمودار زیر که { } E و ι نگاشت شمول است، نمودار بربرکننده $g,\ f$ باشد بطوریکه در آن

$$E \xrightarrow{\iota} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M$$

$$f(x) \quad \begin{pmatrix} & b & c & d & \\ c & b & c & d & \end{pmatrix}, \qquad g(x) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & \\ b & d & d & d & \end{pmatrix}.$$

با ضرب تانسوری Θ_s درنمودار بالا و با توجه به جدول، در $\Theta \otimes M$ داریم:

$$\otimes \quad s \quad \otimes \quad \otimes \quad t \quad \otimes =$$
$$\otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad t \quad \otimes e.$$

اما چون و e صفر سیستم هستند، $\otimes$ و $\otimes d$ می‌توانند در $\Theta \otimes E$ برابر باشند، لذا بنا به لم ۱ $[M,\ M]_i$ Θ.

حال با استفاده از قضیه زیر نشان می‌دهیم، مونوئیدهایی وجود دارند که مطلقاً هموار پوچ ساز نیستند.

قضیه ۴. [۳] رگاه یدال استی با د، K/ به‌طور اساسی هموار عیف ی‌با د اگر و گر، K ر شر (LU) دن کند.

مثال ۲ رض کنیم { , , } S، بطوریکه $= x^{۲}$ یک مونوئید باشد. ادعا می‌کنیم همه سیستم‌ها به کلاس $[S,\ S]_i$ تعلق ندارند و لذا مونوئید S طلقاً هموار پوچ ساز نیست. در غیر این صور نمودار بربرکننده

$$K \xrightarrow{\iota} S \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} S$$

برای هومورفیسم‌های f و g، بطوریکه $f(۱) = x$, $g(۱) =$ را در نظر می‌گیریم. سیستم فاکتور ریس K/ که در آن { } K تنها ایدآل (چپ، راست) غیر بدیهی می‌باشد، به کلاس $[S,\ S]_i$ تعلق دارد. لذا S K/ حافظ مام نشانندهها، از ایدال‌های S به توی S می‌باشد. پس بنا به تعریف ضعیف هموار و لذا به طور اساسی هموار ضعیف است. و بنا به قضیه K باید در شرط (LU) دن کند که یک تناقض است. زیرا، برای هر K y، $\neq y$.

مراجع

[1] BULMAN-FLEMING, S. AND M.KILP, *Equalizer and flatness properties of acts I*, Comm.Alge'.r 30(3),2002, 475- 498.

[ ] KILP, M. U.KNAUER, AND A.MILHAIEV, *Monoids, Acts and Categories*,W.d Gruyt r, B rlin, 2000.