بیستمین سمینار جبر،
۲ و ۳ اردیبهشت ماه ۱۳۸۸، صفحه ۹-۱۲،
دانشگاه تربیت معلم

نیم‌گروهها یی که دو- سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست

اکبر گلچین
دانشگاه سیستان و بلوچستان $agdm@math.usb.ac.ir$
لیلا نوری
دانشگاه سیستان و بلوچستان $l\_noori85@yahoo.com$

چکیده

به دنبال سؤال مطرح شده در ماهنامه ریاضی آمریکا[۵] در مورد مولدهای متناهی سیستم‌های راست قطری، در این مقاله با ارائه بعضی از نیم‌گروههای خاص نشان می‌دهیم که دو- سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست و لذا دو- سیستم قطری چنین نیم‌گروههایی نیز دوری نمی‌باشد.

۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این مقاله دو- سیستم قطری بعضی از نیم‌گروهها ر مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سراسر این مقاله S یک نیم‌گروه است و $S^1 = S \cup \{1\}$.

تعریف ۱. نیم‌گروه S روی مجموعه‌ی ناتهی X از راست عمل می کند، هرگاه نگاشت $X \times S \to X$ با ضابط [۴] $(x, s) \to xs$ موجود باشد.
X روی نیم‌گروه S یک دو- سیستم است، هرگاه S روی X عمل کند هم از چپ و هم از راست و برای هر $x \in X$ و هر $s_1, s_2 \in S$، $(s_1 x)s_2 = s_1(xs_2)$.
فرض کنید S روی $S \times S$ با ضرب مؤلفه‌ای از راست و چپ عمل کند، یعنی برای هر

واژه های کلیدی: دو سیستم قطری، متناهیاً تولید شده.

$s,t\in S$ ، $x,y\in S$ ، $t(x,y)s=(txs,tys)$. با این عمل $S\times S$ یک دو- سیستم است که آن را دو- سیستم قطری S می‌نامیم و با $(S\times S)$ نمایش می‌دهیم. دو- سیستم قطری S را متناهیاً تولید شده گوییم هرگاه برای زیرمجموعه‌ی متناهی $U\subseteq S$، $S\times S=S^1(U\times U)S^1$.

تعریف ۲. نیم‌گروه S را یک باند مستطیلی گوییم، هرگاه به ازای هر $a,b\in S$، $aba=a$. عنصر a از نیم‌گروه S را خودتوان گوییم در صورتی که $a^2=a$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم. اگر $E(S)=S$ آنگاه S را یک نیم‌گروه خودتوان یا یک باند می‌نامیم.

تعریف ۳. زیر مجموعه‌ی ناتهی I از نیم‌گروه S را یک ایده‌آل گوییم، اگر $IS\subseteq I$ و $SI\subseteq I$. اگر $a\in S$، S^1aS^1 را ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a می‌نامیم. S را نیم‌گروه ایده‌آل اصلی گوییم هرگاه همه ایده‌آل‌های آن اصلی باشند.
رابطه $\mathcal{J}$ روی S به این صورت که $a\mathcal{J}b$ اگر و تنها اگر $S^1aS^1=S^1bS^1$، یک رابطه هم‌ارزی است و $\mathcal{J}$- کلاس شامل a را با J_a نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. یک نیم‌گروه بدون صفر، ساده نامیده می‌شود هرگاه فاقد ایده‌آل سره باشد.
نیم‌گروه صفردار S، ۰- ساده نامیده می‌شود هرگاه:
i) $\{0\}$ و S تنها ایده‌آل‌های آن باشند. ii) $S^2\neq\{0\}$.

تعریف ۵. فرض کنید $(X,\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. گوییم $(X,\leq)$ یک نیم‌لاتیس پایینی است، هرگاه برای هر $a,b\in X$، بزرگترین کران پایینی $a\wedge b$ موجود باشد.
نیم‌گروه S یک نیم‌لاتیس از زیرنیم‌گروههای S_α، $\alpha\in Y$ است هرگاه:
۱) Y یک نیم‌لاتیس پایینی باشد.
۲) $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$
۳) برای هر $\alpha,\beta\in Y$، $S_\alpha S_\beta\subseteq S_{\alpha\beta}$ که $\alpha\beta$ حاصلضرب α و β در Y است.

لم ۱. اگر دو- سیستم قطری S متناهیاً تولید شده، T زیرنیم‌گروهی از S و $S\setminus T$ (متمم T) یک ایده‌آل باشد، آنگاه دو- سیستم قطری T متناهیاً تولید شده است.

لم ۲. دوـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شده است اگر، و تنها اگر دوـ سیستم قطری $= S \cup \{ \}$ متناهیاً تولید شده باشد.

لم ۳. اگر S نامتناهی و دارای دوـ سیستم قطری متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه هر $\mathcal{J}$ـ کلاس ماکسیمال دارای همان عدد اصلی S است.

قضیه . اگر S نامتناهی و دارای دوـ سیستم قطری متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه S یک نیم‌گروه ابدی اصلی و دارای یک $\mathcal{J}$ـ کلاس ماکسیمال با عدد اصلی S است.

قضیه . اگر S یک نیم‌گروه کاملاً ٥ـ ساده نامتناهی باشد، آنگاه دوـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شده است، اگر و تنها اگر S یک گروه با تعداد متناهی کلاس‌های مزدوج همراه صفر الحاقی باشد.

۲ نیم‌گروه‌هایی که دوـ سیستم قطری آنها متناهیاً تولید شده نیست

قضیه . اگر S یک نیم‌گروه تعویض‌پذیر نامتناهی باشد، آنگاه دوـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه . [ ] فرض کنید S یک نیم‌گروه بدون صفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) S کاملاً ساده است.

(۲) S منظم است و برای هر $a, b \in S$، اگر $aba = a$، آنگاه $bab = b$.

قضیه . اگر S یک باند مستطیلی نامتناهی باشد، آنگاه دوـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه . فرض کنید یک مجموعه و برای هر $\alpha \in$ ، T_α یمگروهی باشد که دو ـ سیستم قـ ری آن تناهیاً تولید شده نـ شد، مگر ابنـ T_α تناهی باشد. اگر S یک نیمگروه نامتناهی و یک نیم‌لاتیس از T_α ها باشد، آنگاه دو ـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شده نیست.

قضیه . [ ] رض کنید S یک باند باشد. در این صور S یک نیم‌لاتیس از باندهای مستطیلی است.

نتیجه. اگر S یک باند نامتناهی باشد، آنگاه دو ـ سیستم قطری S متناهیاً تولید شد نیست.

مراجع

[1] J. M. HOWIE, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.

[2] M. KILP, U. KNAUER, A. MIKHALEV, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.

[3] P. GALLAGHER, *On the Finite and Nonfinite Generation of Diagonal Act*. Comm. Algebra (2006), 34, 3123-3137.

[4] P. M. HIGGINS, *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford, Oxford University Press, (1992).

[5] S. BULMAN FLEMING, AND K. MCDOWELL, *Problem E3311, Amer. Math.* Monthly 96 (1989), 155; Solution, Amer. Math. Monthly 97 (1990), 617.