Archive of SID

بیستمین سمینار جبر،
۲ و ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸، صفحه۱۳–۱۶،
دانشگاه تربیت معلم

حلقه‌های تقسیم و ابرمیدان‌ها

سعید میروکیلی
دانشگاه پیام نور استان یزد مرکز مهریز– گروه ریاضی
saeed_mirvakili@yahoo.com

چکیده

در این مقاله به بررسی روابط اساسی روی ابرمیدان‌ها می‌پردازیم. رابطه Γ را که اولین بار توسط وجیوک‌لیس (۱۹۹۰) تعریف شده است در نظر گرفته و با استفاده از مفهوم زیرمجموعه‌های کامل ابرمیدان‌ها، نشان می‌دهیم این رابطه روی ابرمیدان‌های دلخواه یک رابطه هم‌ارزی، با رابطه اساسی Γ^* برابر و R/Γ حلقه تقسیم است.

۱ مقدمه

فرض کنیم R یک مجموعه ناتهی، $+$ و $\cdot$ ابرعمل‌های تعریف شده بر R باشند.

$$+ : R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x + y \subseteq R,$$
$$\cdot : R \times R \to P^*(R), (x, y) \to x \cdot y \subseteq R.$$

دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ یک ابرحلقه نامیده می‌شود هرگاه $(R, +)$ ابرگروه، $(R, \cdot)$ نیم‌ابرگروه و ابرعمل $\cdot$ نسبت به ابرعمل $+$ دارای خاصیت توزیع‌پذیری باشد.

اگر در ساختار فوق $(R, +)$ یک نیم‌ابرگروه باشد، دستگاه جبری $(R, +, \cdot)$ را یک نیم‌ابرحلقه می‌نامند. منظور از ابرمیدان ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ است که در آن $(R, \cdot)$ یک ابرگروه باشد.

واژه های کلیدی: حلقه تقسیم، ابرمیدان، رابطه اساسی، رابطه هم‌ارزی.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 20N20، 16Y9.

www.SID.ir

۲ رابط اساسی Γ^* روی ابر ان‌ها

رابطه * برای اولین بار توسط فریو و لیس [۵] روی ابرحلقه‌ها تعریف شد. ر ا ع رابطه ا ا ی * زنبا بین نظریه ابرحلقه‌ها و نظریه حلقه‌ها را بیان می‌کند. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک نیم‌ابرحلقه باشد. رابطه Γ روی R برای هر R a, b به و زیر تعریف می‌شو :

$$a \, \Gamma \, b \Leftrightarrow \exists [n \in N, \; k_i \in N, (z_{i1}, \ldots, z_{ik_i}) \in R^{k_i}] \; \{a, b\} \subset \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}),$$

به آسانی دیده می‌شو که رابطه Γ یک رابطه انعکاسی و تقارنی است. بستار انتقالی رابطه Γ را با Γ^* نشان می‌دهیم. بنابراین رابطه Γ^* یک رابطه هم‌ارزی روی R است و رده هم‌ارزی عضو a از R تحت رابطه * را با ( )* نشان می‌دهیم. فریو و لیس نشان دادند * کوچکترین رابطه هم‌ارزی روی ابرحلقه R است به طوری که * / یک حلقه عمومی (حلقه‌ای که لزوماً با عمل + جابجایی نیست) است. رابطه * را رابطه اساسی روی ابرحلقه R و حلقه * / را حلقه اساسی می‌گوییم. همچنین اگر R یک ابرمیدان باشد آنگاه * / یک حلقه تقسیم عمومی (حلقه‌ی تقسیمی که لزوماً با عمل + جابجایی نیست) می‌باشد.

تعریف ۱. فرض کنید M زیرمجموعه‌ی ناتهی ابرحلقه R باشد. M را زیرمجموعه کامل گوییم هرگاه برای هر $n \in N$، هر $i = 1, \ldots, n$، هر عدد $k_i \in N$ و هر $(z_{i1}, \ldots, z_{ik_i}) \in R^{k_i}$، داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \bigcap M \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq M.$$

همچنین، فرض کنید M زیرمجموعه ناتهی ابرحلقه R باشد. اشتراک همه زیرمجموعه‌های کامل R را که شامل M است بستار کامل M نامیده و آن را با $\mathcal{C}(M)$ نشان می‌دهیم.

حلقه اساسی * / را در نظر بگیرید و فرض کنید * / دارای عنصر یکانی $1_{R/\Gamma^*}$ (با عمل ضرب) باشد و * / $\phi : R \rightarrow$ تصویر کانونی باشد. قرار دهید $w_R = \phi^{-1}(1_{R/\Gamma^*})$ (w_R را قلب ابرحلقه R نامیده می‌شود). اگر ابرمیدان $(R, +, \cdot)$ را در نظر بگیریم، آنگاه حلقه تقسیم * / دارای عنصر یکانی $1_{R/\Gamma^*}$ است و w_R را نیز دارد.

قضیه ۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از ابرمیدان R باشد. در این صورت A یک زیرمجموعه‌ی کامل از R است اگر و تنها اگر $A = A \cdot w_R = w_R \cdot A$.

Archive of SID
www.SID.ir

Archive of SID

قضیه . فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی کامل و ـ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از ابرمیدان R باشد. در این صورت $A \cdot B$ و $B \cdot A$ زیرمجموعه‌های کامل از ابرمیدان R هستند.

فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک ابرمیدان و SC ـانوا ـ ی همه زیرابرگروه‌های $(R, \cdot)$ باشد به‌ـ ـی‌که ـیرمجموعه‌ی کامل ا ـ نیـ ـتـد. در این صر ـ ـاریم:

قضیه . ـ ـ ابرمیدان R برابر است با اشتراک همه زیرابرگروه‌های $(R, \cdot)$ که زیرمجموعه کامل هستند، یـ ـی $w_R = \bigcap_{A \in SC} A$.

قبل ا ـیان ـضیه بعدی نما گذار ـ های ـیر ا ـر نظر بگیرید. برای هر عضو ـ ا ـر ابرمیدان R، ـ ـر د ـید:

$$P(\ ) = \{A \quad {}^*(R \ ;\ z \in A \ \ \exists [x]^{n}_{\ ,\dots,\ },\ A = \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} \ _{ij}\ \},$$
$$M(\ ) = \bigcup_{A \in P(z)} A.$$

قضیه . فرض کنید R یک ابرمیدان باشد. در این صورت

۱) ـرای هر ـ R ـ z، زیرمجموعه $M(\ )$ یک زیرمجموعه‌ی کامل R است،

۲) ـگر $z \in w_R$ آ ـگاه $\mathcal{C}(\ ) = w_R$ و در نتیجه w_R یک زیرمجموعه کامل R است،

۳) ـرای هر ـ R ـ z داریم $M(\ ) = w_R$.

قضیه . اگر R یک ابرمیدان باشد آ ـگاه رابـ ـ Γ یک رابـ ـ هم‌ارزی است و $\Gamma = {}^*$ ـ، که در آن Γ^* رابـ ـ اساسی روی ابرمیدان R است، و در نتیجه $/\Gamma$ حلقه تقسیم است.

بـ ـان: ـرض کنید y ـ * ـ ... در این صورت اعضایی مانند $u, \ \in w_R$ ـ ـود دارند به‌ـسمی‌که ـ $\in x \ \ v$ و ـ $\in x \cdot w$. بنا بر ـضیه ۴، $M(u) = w_R$، بنابراین ـضوی مانند $P(u) \quad A$ و ـ ـ دارـ به‌ـ ـی‌که $\in A$. حال ـ ـر $A = \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} \ _{ij})$ آنـگاه

$$\{x \quad \} \subseteq x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{k_i} \ _{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot \prod_{j=1}^{k_i} \ _{ij}),$$

و بنابراین ـ Γ ـ . □

www.SID.ir

Archive of SID

مثال . قضیه ۵، برای نیم‌ابرحلقه‌ها درست نیست. قرار دهید $R = \{a, b, c, \}$ و ابرعمل‌های زیر را در نظر بگیرید:

$+$	a	b	c	d
a	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
b	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
c	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
d	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
b	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
c	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$
d	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$	$\{b, \}$

ابرعمل + شرکت‌پذیر است زیرا برای هر $x, y, z \in R$ داریم:

$$x + (y + z) = \{b, \} = (x + y) + z.$$

ابرعمل $\cdot$ نیز شرکت‌پذیر است. همچنین برای هر $x, y, z \in R$ داریم $x \cdot (y + z) = \{b, \} = x \cdot y + x \cdot z$، لذا ابرعمل $\cdot$ روی ابرعمل + دارای خاصیت پخشی است. از این نتیجه می‌شود که ابرساختار $(R, +, \cdot)$ یک نیم‌ابرحلقه است. حال داریم $\ldots$ d ولی d ، c، بنابراین $\ldots^* \neq \Gamma$.

مراجع

[1] CORSINI P., *Prolegomena of hypergroup theory*, Second edition, Aviani editor, 1993.

[2] DAVVAZ B. AND SALASI A., *A realization of hyperrings*, Comm. Algebra, Vol. 3 (1), pp. 4389-4400, 2006.

[3] DAVVAZ B. AND VOUGIOUKLIS T., *Commutative rings obtained from hyperrings (H_v-rings) with α^*-relations*, Comm. Algebra, Vol. 35, pp. 3307-3320, 2007.

[4] MIRVAKILI S., ANVARIYEH S. M. AND DAVVAZ B., *On α-relation and transitivity conditions of α*, Comm. Algebra, 3 (0) 1695-1703, 2008.

[5] VOUGIOUKLIS T., *The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield*, Proc. Fourth Int. Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications (AHA 199), World Scientific, pp. 203-211, 1991.