نمونه‌برداری فشرده برای داده‌های لرزه‌ای

علی غلامی[۱] و حمیدرضا سیاهکوهی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری لرزه‌شناسی، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران
[۲] استادیار گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

چکیده

در این مقاله دیدگاه جدیدی برای نمونه‌برداری و بازسازی داده‌های لرزه‌ای ارائه می‌گردد. هنگامی که نمونه‌برداری با فاصله‌های منظم انجام می‌گیرد، طبق تئوری نمونه‌برداری نایکویست، به منظور بازسازی کامل سیگنال، سرعت نمونه‌برداری باید حداقل دو برابر باند فرکانسی سیگنال باشد. نمونه‌برداری با سرعتی کمتر از مقدار فوق منجر به پدیده نامطلوب الیاسینگ می‌شود که گاهی اوقات گریز از آن اجتناب ناپذیر است. در اینجا بر مبنای تبدیلات تُنُک (sparse) کنندهٔ سیگنال‌های لرزه‌ای (مانند wave atom) الگوریتمی برای نمونه‌برداری و بازسازی داده‌های لرزه‌ای با سرعتی بسیار کمتر از حد نایکویست ارائه شده است. مبانی نظری روش ارائه شده ایجاب می‌کند که هنگام نمونه برداری تنها اطلاعات مهم سیگنال برداشت شود. عملکرد الگوریتم تدوین شده بر روی داده‌های لرزه‌ای یک و دو بعدی نشان داده شده است.

Abstract

In this study we present a new insight into data sampling and reconstruction. In uniform sampling, according to the Nyquist sampling theory, sampling frequency must be twice the frequency bandwidth of signal. The smaller sampling rate will produce aliasing. In this study we developed an algorithm based on sparsifing transforms (e.g. wave atom) to reconstruct signals with samples less than Nyquist limit. The method permits to sample only necessary parts of the signal. We presented the efficiency of the method on one- and two-dimensional seismic signals.

مقدمه

در این مقاله دیدگاه جدیدی برای نمونه‌برداری و بازسازی داده‌های لرزه‌ای ارائه می‌گردد. برای گریز از پدیده الیاسینگ، تئوری نایکویست برای نمونه‌برداری ایجاب می‌کند که سرعت نمونه‌برداری باید حداقل دو برابر باند فرکانسی سیگنال باشد. اما از یک طرف نمونه‌برداری کمتر صرفه اقتصادی را به دنبال دارد و از طرف دیگر در کارهای لرزه‌ای شاهد مناطقی هستیم که نمونه‌برداری در آنجا مشکل یا حتی غیر ممکن است. بنابراین هنگام بازسازی سیگنال اصلی از نمونه‌های مشاهده شدهٔ آن ناچار به استفاده از تکنیکهای درون‌یابی و برون‌یابی هستیم. این کار برای داده‌های الیاس شده مسأله ایست که همیشه ژئوفیزیکدانان با آن درگیر بوده‌اند همچنین روشهای مختلفی برای مقابله با این مسأله در ژئوفیزیک ارائه شده است [۱، ۲، ۳، ۴]. اما گذشته از دقت این روشها، همگی آنها برای مقابله با الیاسینگ مکانی ارائه شده‌اند. ما در اینجا دیدگاهی کاملا متفاوت ارائه می‌کنیم. این دیدگاه بر مبنای خاصیت بسیار مهم سیگنال‌های لرزه‌ای با عنوان خاصیت تُنُکی (Sparsity) استوار است. دونوهو و جانستون در سال ۱۹۹۲ ازاین خاصیت برای تخمین سیگنال از نوفه استفاده کردند [۵]. در [۶] نشان داده شد سیگنال‌های تنک بهتر قابل جداسازی از نوفه هستند زیرا نوفه تنکی ناپذیر است. در [۷] از این خاصیت برای حل مسائل معکوس لرزه ای استفاده شد و در [۸] و [۹] نشان داده شد که نمونه‌برداری از سیگنال‌های تنک می‌تواند با سرعتی بسیار کمتر از حد نایکویست انجام گیرد.

نمونه‌برداری فشرده

فرض کنید سیگنال آنالوگ $y(t)$ که قرار است نمونه‌برداری کنیم دارای فرکانس بیشینه f_{max} باشد، آنگاه طبق تئوری نمونه‌برداری نایکویست برای جلوگیری از پدیده الیاسینگ باید فاصله نمونه‌بردای از رابطه $\Delta t \leq (2f_{max})^{-1}$ تبعیت کند. بنابراین اگر بخواهیم در مدت زمان T از این سیگنال نمونه‌برداری کنیم، می‌بایست $N = T/\Delta t$ نمونه از سیگنال فوق را ذخیره نماییم. حال فرض کنید

می‌خواهیم تعداد نمونه‌برداری خیلی کمتر از مقدار فوق باشد اما با این وجود قادر باشیم سیگنال را همانند زمانی که N نمونه آن در دست است به طور کامل بازسازی نماییم. راه حل چیست؟

فرض کنید $y(n)$ ، $0 \le n \le N$، حاصل نمونه‌برداری $y(t)$ باشد که به طور منظم با فاصله Δt نمونه‌برداری شده است. در این حالت $y(t)$ کاملاً از $y(n)$ قابل بازسازی است. حال سیگنال $x(n)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $x(n) \in R^N$، تعداد نمونه‌های غیر صفر $x(n)$ برابر M باشد و $M << N$. و $x(n) \in \{0,1\}$ و موقعیت نمونه‌های غیر صفر $x(n)$ تصادفی با توزیع نرمال باشد.

سیگنال $z(n)$ را به صورت $z(n) = x(n)y(n)$ تعریف می‌کنیم که می‌توان آنرا به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$z = X y \qquad (۱)$$

برای سادگی اندیس n حذف شده است. همانطور که می‌بینیم سیگنال z حاصل نمونه‌برداری تصادفی از سیگنال y است. حال باید دید آیا می‌توان سیگنال y را از سیگنال z بدست آورد؟ جواب مثبت است اگر سیگنال y تحت تبدیل خطی و متعامد F تنک باشد. رابطه (۱) برای y یک مسأله معکوس خطی و بدشرط است زیرا بینهایت سیگنال y وجود دارد که تحت عملگر X همان نمونه‌های z را تولید می‌کنند. اما با اعمال اطلاعات اضافی بر مسأله می‌توان پاسخ را یکتا نمود. می‌توان نوشت $z = XF^T c$، که T نشان دهنده ترانهاده و c ضرایب y می‌باشند. با کاهش دادن بُعد سیگنال z خواهیم داشت $\hat{z} = \phi c,$ که $\phi \in R^{M \times N} = \theta X F^T$، و $\theta \in R^{M \times N}$ ماتریسی است که بعد z را از N به M کاهش می‌دهد. حال اگر ضرایب c تنک باشند، رابطه بازسازی صورت مسأله بهینه‌سازی زیر حل نمود:

$$\hat{c} = \min \sum_{i=1}^{N} |c_i| \quad s.t. \quad \hat{z} = \phi c, \qquad (۲)$$

$$\hat{y} = F^T \hat{c}$$

رابطه (۲) یک مسأله محدب است و جواب یکتا دارد. بنابراین برای نمونه‌برداری فشرده سه شرط مهم زیر نیاز است

(۱) سیگنالی که قرار است نمونه‌برداری شود تحت تبدیل F تنک باشد.

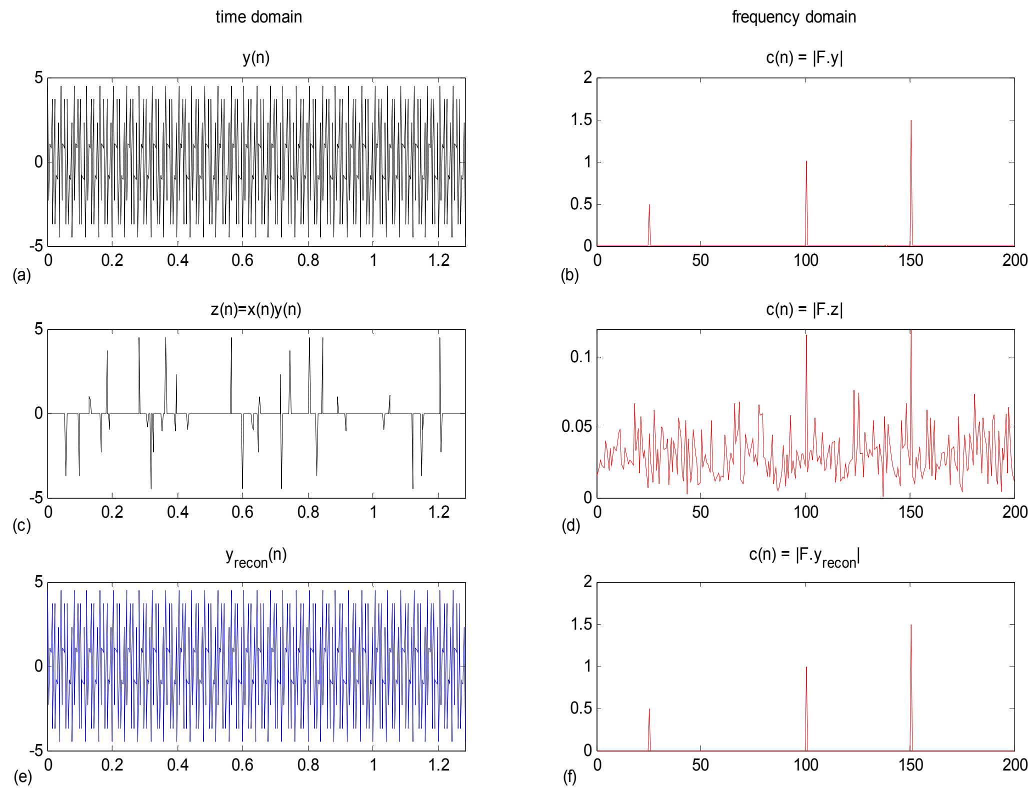
(۲) نمونه‌برداری تحت تبدیل F ناهمدوس باشد.

(۳) از الگوریتم بهینه‌سازی غیرخطی L_1 برای بازسازی سیگنال استفاده شود.

در ادامه عملکرد الگوریتم فوق را بر روی داده‌های یک و دو بعدی لرزه ای بررسی می‌کنیم.

نمونه‌برداری و بازسازی سیگنال‌های یک بعدی

در اینجا سیگنالی که قرار است نمونه برداری کنیم از سه هامونیک با فرکانس‌های ۲۵، ۱۰۰ و ۱۵۰ هرتز تشکیل شده است. شکلهای ۱-a و ۱-b سیگنال مذکور را در بازه صفر تا ۱/۲۸ ثانیه و طیف فرکانسی آنرا نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود سیگنال مذکور تحت تبدیل فوریه کاملاً تنک است. حال اگر بخواهیم سیگنال مذکور را در این بازه نمونه‌برداری کنیم طوری که قابل بازسازی باشد باید فرکانس نمونه‌برداری حداقل برابر ۳۰۰ نمونه در ثانیه باشد. به عبارت دیگر حداقل باید ۳۸۴ نمونه با فاصله‌های برابر از سیگنال را داشته تا قادر باشیم آنرا دقیقاً بازسازی کنیم. حالا ما تقریباً ۹ برابر کمتر یعنی ۴۰ نمونه از سیگنال را در این بازه انتخاب می‌کنم (شکل ۱-c)، شکل ۱-d طیف فرکانسی سیگنال نمونه‌برداری شده را نشان می‌دهد پدیده الیاسینگ از روی طیف فرکانسی کاملا واضح است. در این حالت با روشهای مرسوم قادر به بازسازی سیگنال اصلی نیستیم. شکل ۱-e سیگنال بازساری شده با استفاده از الگوریتم غیر خطی (۲) را نشان می‌دهد. همچنین طیف فرکانسی سیگنال بازسازی شده در شکل ۱-f نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که سیگنال اصلی کاملاً بازسازی شده است.

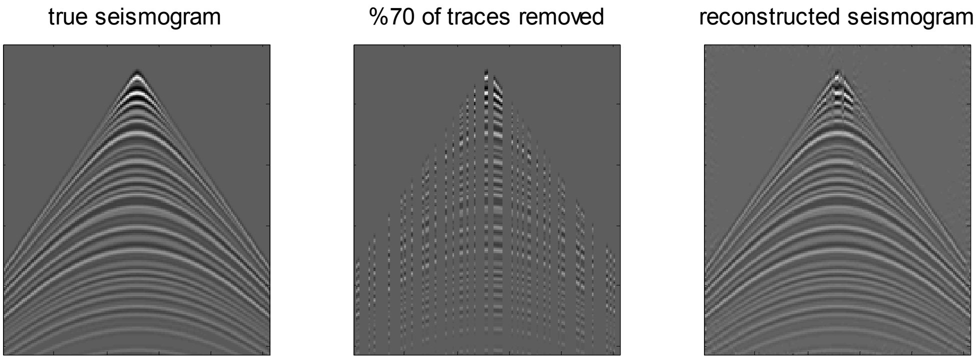


شکل ۱. قسمتهای a، c، و e به ترتیب سیگنال‌های y(n)، z(n) و سیگنال بازسازی شده توسط الگوریتم غیر خطی را نشان می‌دهند. طیف فرکانسی هر سیگنال در سمت راست آن نشان داده شده است.

نمونه‌برداری و بازسازی سیگنال‌های دو بعدی لرزه ای

در این مثال می خواهیم به مقابله با الیاسینگ مکانی برویم که پدیده‌ای مرسوم در لرزه شناسی است، ما در این مقاله از تبدیل wave atom ارائه شده در [۱۰] برای تبدیل تنک کننده استفاده کرده ایم. wave atom ها حالتی از بسته های موج دوبعدی هستند که از رابطه {(قطر)^2 ∝ طول موج} تبعیت می کنند. می‌توانند حالتهای مختلفی داشته باشند از جمله پایه‌های متعامدی را تشکیل می‌دهند، همانند بسته‌ای از Curvelet ها عمل می کنند و برای سیگنال‌های با الگوی نوسانی کاملا تنک کننده‌اند.

شکل a–۲ یک لرزه نگاشت مصنوعی را نشان می دهد که حاوی ۵۱۲ تریس است. حال تقریباً ۷۰٪ از تریس های لرزه نگاشت را دور می‌ریزیم، شکل b–۲، در واقع مثل این است که به جای ۵۱۲ نقطه مکانی تنها ژئوفون‌های خود را در ۱۵۰ نقطه قرار داده باشیم. خواننده می تواند تصور کند که با این کار چقدر هزینه عملیات برداشت داده کاهش می یابد! حال برای بازسازی لرزه نگاشت شکل a–۲ از الگوریتم غیر خطی L_1 استفاده می‌کنیم. شکل c–۲ سیگنال بازسازی شده را نشان می‌دهد همانطور که ملاحظه می‌شود سیگنال اصلی به خوبی بازسازی شده است.



(a) (b) (c)

شکل ۲. (a) لرزه‌نگاشت مصنوعی، (b) لرزه‌نگاشت مصنوعی قسمت (a) اما هفتاد درصد از تریس‌های آن دور ریخته شده است، و (c) لرزه‌نگاشت بازسازی شده با الگوریتم غیرخطی در حوزه wave atom.

نتیجه گیری

در این مقاله دیدگاه جدیدی برای نمونه‌برداری و بازسازی سیگنال‌های لرزه‌ای ارائه شد. الگوریتم ارائه شده نیازمند یک تبدیل تنک کننده برای سیگنال مورد نظر است که ما تبدیل wave atom را برای این منظور به جامعه ژئوفیزیک معرفی کردیم. همچنین الگوریتم غیر خطی پایداری را برای بازسازی سیگنال اصلی از تعداد بسیار کمتر از نمونه‌هایی که تئوری الیاسینگ پیشنهاد می‌کند ارائه نمودیم. عملکرد الگوریتم ارائه شده بر روی داده‌های یک و دوبعدی لرزه‌ای بررسی شد.

منابع

Spitz, S., 1991, Seismic trace interpolation in the F-X domain: Geophysics, **56**, 785-794.

Claerbout, J. F., and D. Nichols, 1991, Interpolation beyond aliasing by (tau,x)-domain PEFs: 53rd Annual Conference and Exhibition, EAGE, Extended Abstracts, 2-3.

Fomel, S., 2002, Applications of plane-wave destruction filters: Geophysics, **67**, 1946-1960.

Gulunay, N., 2003, Seismic trace interpolation in the Fourier transform domain: Geophysics, **68**, 355-369.

Donoho, D., and I.M., Johnstone, 1998, Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage, Stanford University, Ann. Statist. **26**, 3, 879-921. Technical Report, Department of Stat. 1992.

Johnstone, M., 2002, Function Estimation and Gaussian Sequence Models. Available at: http://www-stat.stanford.edu/~imj.

Gholami A., and H.R., Siahkoohi, 2007, a Hybrid Method for Linear Inversion of Geophysical Data, 69th EAGE Conference and Exhibition, London 2007.

Candes, E., Romberg, J., and T., Tao, 2006, Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information, IEEE Trans. Inform. Theory, **52**, 2489-509.

Donoho, D., 2006, Compressed Sensing, IEEE Trans. Inform. Theory, **52**, 4, pp. 1289-1306.

Demanet, L., and Ying, L., 2007, Wave atoms and Sparsity of Oscillatory patterns, Appl. Comput. Harmon. Anal.