



استفاده از روش ممان جهت بررسی معادلات حاکم بر تقویت کننده رامن فیبر نوری دوطرفه با پمپ طیف فرکانسی پیوسته

آمنه پورمقدس^۲، محمد حسین تیمورپور^۲، علیرضا بهرامپور^{۱و۳}

۱دانشگاه صنعتی شریف، ۲مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی کرمان

چکیده - در این مقاله از روش ممان جهت حل معادلات حاکم بر تقویت کننده رامن فیبر نوری در حالت پمپ از دو طرف با طیف فرکانسی پیوسته استفاده شده است. همچنین جهت مقایسه، این معادلات توسط روش تمام عددی نیز حل گردیده اند. نتایج نشان می دهد که روش ممان یک روش دقیق و جدید جهت بررسی معادلات حاکم بر این تقویت کننده ها با پمپ های دو طرفه با طیف فرکانسی پیوسته می باشد.

کلید واژه- تقویت کننده رامن فیبرنوری، پمپ با طیف پیوسته، روش ممان.

کد PACS - 060.2320.

مهمی است که امروزه در طراحی این تقویت کننده ها مطرح می باشد.

همچنین استفاده از تکنیک پمپ های با طیف فرکانسی پیوسته پهن [۵] حل نمود.

اما امروزه (از سال ۲۰۰۲ به بعد) نشان داده شده است که استفاده از پمپ های با طیف فرکانسی پهن یکی از مناسب ترین راهکار ها جهت پائین آوردن اعوجاجات بهره رامن می باشد، که این روش لزوم به استفاده از تعداد پمپ های دیودی را کمتر می کند [2].

معادلات حاکم بر تقویت کننده های رامن با پمپ طیف فرکانسی پیوسته یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی جفت شده نا شمارا می باشد که به کمک روش جدید ممان به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی جفت شده شمارا تبدیل می گردد [6].

۲- مدل سازی تئوری

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییرات توان پمپ ها و سیگنال ها در طول فیبر نوری با در نظر گرفتن برهم کنش پمپ و سیگنال، سیگنال و سیگنال و برهم کنش بین

۱- مقدمه

امروزه به جهت کاهش ارزش لیزر های نیمه هادی با توان بالا و افزایش نیاز به فیبر های نوری انتقالی جهت بدست آوردن تقویت پهنای باند بیشتر، کاهش اعوجاجات بهره و نویز کمتر و همچنین تکنولوژی سیستم های انتقال با مسافت طولانی (WDM¹)، سبب گردیده است تا لزوم به استفاده از تقویت کننده های رامن فیبر نوری (FRAs^۲) نسبت به تقویت کننده های فیبر اربیم آلاییده (EDFAs^۳) بیش از پیش افزوده گردد [۱].

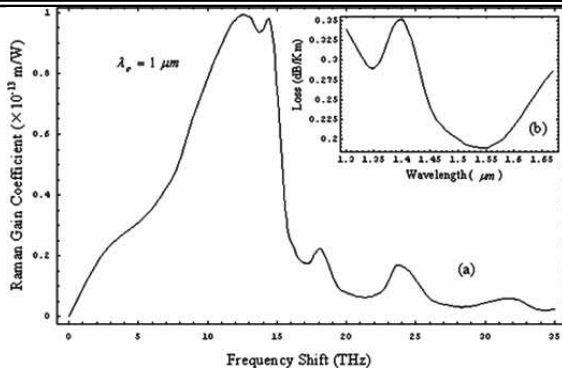
یکی از مزایای تقویت کننده های رامن فیبر نوری، قابلیت تقویت در هر ناحیه فرکانسی است. در واقع ضریب تقویت رامن تنها به اختلاف فرکانس پمپ و سیگنال بستگی داشته و مستقل از تک تک فرکانس هاست؛ منحنی بهره رامن در محیط سیلیکا دارای قله ای در اختلاف فرکانس حدود 13-14 THz است [۲].

مسطح نمودن طیف بهره (یا به عبارتی کاهش اعوجاجات بهره) در تقویت کننده های رامن فیبر نوری یکی از مسائل

¹ Wavelength Division Multiplexing

² Fiber Raman Amplifiers

³ Erbium Doped Fiber Amplifiers



شکل ۱: (a) ضریب تقویت رامان و (b) ضریب افت در فیبر سیلیکا [۱]

از آن جایی که در معادلات حاکم بر FRAs، جملات انتگرالی ظاهر شده اند، بنابراین با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی جفت شده نا شمارا مواجه هستیم؛ که حل آن به روش عددی امکان پذیر نیست. روش ممان جهت کاهش این دستگاه معادلات به دستگاه معادلات غیر خطی جفت شده شمارا به کار گرفته شده است. جهت رسیدن معادلات حاکم بر ممان‌ها، ممان‌های مرتبه m, n, t ام را به شکل:

$$B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)} = \int_0^{+\infty} \alpha^m(v) P_b(v) M_b^n(v) M_f^t(v) \times g(v, v_{k_1}) g(v, v_{k_2}) \dots g(v, v_{k_l}) dv \quad (5)$$

$$F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)} = \int_0^{+\infty} \alpha^m(v) P_f(v) M_b^n(v) M_f^t(v) \times g(v, v_{k_1}) g(v, v_{k_2}) \dots g(v, v_{k_l}) dv \quad (6)$$

$$M_f(v) = \int_0^{+\infty} g(v, v') P_f(v') dv' \quad (7)$$

$$M_b(v) = \int_0^{+\infty} g(v, v') P_b(v') dv' \quad (8)$$

معرفی می‌کنیم.

بنابراین دسته معادلات (۱) تا (۳) به صورت زیر بازنویسی خواهند شد:

$$\frac{\partial S_k}{\partial z} = S_k [-\alpha(v_k) + \sum_{j=1}^{N_s} g(v_k, v_j) S_j + B_{k_1, \dots, k_l}^{(0,0,0)} + F_{k_1, \dots, k_l}^{(0,0,0)}] \quad (9)$$

مؤلفه‌های فرکانسی موجود در طیف پمپ‌های مستقیم^۴ و معکوس^۵ با یکدیگر در حالت پایدار به شکل زیر است [7]:

$$\frac{\partial S_k}{\partial z} = S_k [-\alpha(v_k) + \sum_{j=1}^{N_s} g(v_k, v_j) S_j + \int_0^{+\infty} g(v_k, v') P_f(v') dv' + \int_0^{+\infty} g(v_k, v') P_b(v') dv'] \quad (1)$$

$$-\frac{\partial P_b(\hat{v})}{\partial z} = P_b(\hat{v}) [-\alpha(\hat{v}) + \sum_{j=1}^{N_s} g(\hat{v}, v_j) S_j + \int_0^{+\infty} g(\hat{v}, v') P_f(v') dv' + \int_0^{+\infty} g(\hat{v}, v') P_b(v') dv'] \quad (2)$$

$$\frac{\partial P_f(\hat{v})}{\partial z} = P_f(\hat{v}) [-\alpha(\hat{v}) + \sum_{j=1}^{N_s} g(\hat{v}, v_j) S_j + \int_0^{+\infty} g(\hat{v}, v') P_f(v') dv' + \int_0^{+\infty} g(\hat{v}, v') P_b(v') dv'] \quad (3)$$

در روابط فوق N_s تعداد سیگنال‌ها، S_k توان سیگنال k ام با فرکانس v_k ، $P_b(\hat{v})$ تابع توزیع توان پمپ مستقیم در فرکانس \hat{v} و $P_f(\hat{v})$ تابع توزیع توان پمپ معکوس در فرکانس \hat{v} بوده، ضریب افت فیبر در فرکانس v و $g(v, v')$ ضریب مربوط به برهم‌کنش رامان بین دو باریکه با فرکانس v و v' است که از رابطه (۴) بدست می‌آید.

علامت \mp در سمت چپ روابط (۲ و ۳) به ترتیب نشان دهنده حالت پمپ معکوس و حالت پمپ مستقیم بوده و همچنین جملات سمت راست در روابط (۱) تا (۳) به ترتیب مربوط به افت، برهم‌کنش با سیگنال‌ها، برهم‌کنش با مؤلفه‌های پمپ مستقیم و برهم‌کنش با مؤلفه‌های پمپ معکوس هستند. در این معادلات از اثرات نویز صرف نظر شده است.

$$g(v, v') = \begin{cases} \frac{v^2}{v_R v'} \cdot \frac{g_R(v-v')}{\Gamma A_{eff}} & ; v > v' \\ 0 & ; v = v' \\ \frac{v'}{v_R} \cdot \frac{g_R(v'-v)}{\Gamma A_{eff}} & ; v < v' \end{cases} \quad (4)$$

در رابطه فوق $g_R(\Delta v)$ ضریب تقویت رامان در فرکانس v_R ، A_{eff} سطح مقطع مؤثر فیبر، Γ ضریب مربوط به آثار قطبش است. منحنی افت و ضریب تقویت رامان در شکل (۱) نشان داده شده‌اند [1].

⁴ Forward pumping

⁵ Backward Pumping



$\alpha(V)$ نیز که عددی کوچک در حدود $(\frac{dB}{Km})^{-1} 10^{-1}$ است، به توان m رسیده است، که خود گویای ای مطلب اند که دنبالهٔ ممان‌های $B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ و $F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ به سرعت به سمت صفر همگرا می‌شوند. بنابراین به این ترتیب به کمک روش ممان، دستگاه معادلات حاکم بر تقویت کنندهٔ رامان با پمپ طیف فرکانسی پیوسته، به یک دستگاه معادلات جفت شدهٔ غیر خطی شمارا و معدود تبدیل خواهد شد که می‌توان این دستگاه معادلات را به راحتی حل نمود.

۲-۱- محاسبات عددی

همان طور که در قسمت قبل بیان شد، از آنجائیکه $1 \ll \alpha(V), g(V_k, V), M_b(V), M_f(V)$ هستند، دنبالهٔ ممان‌ها $B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ و $F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ به سرعت به سمت صفر میل می‌کنند، البته باید توجه داشت که چون $\alpha(V)$ از مرتبه 10^{-2} بوده اما $g(V_k, V)$ از مرتبه 10^{-4} می‌باشد، سرعت همگرایی نسبت به توان‌های α خیلی کندتر از توان‌های $g(V_k, V)$ است، بنابراین ما تقریبی به صورت $b=n+t+1$ که نشان دهندهٔ تعداد حاصلضرب $g(V_k, V)$ ‌ها بوده و تقریب M را که نشان دهندهٔ توان روی $\alpha(V)$ است معرفی می‌کنیم. و به این ترتیب با در نظر گرفتن تعداد معدودی از این معادلات می‌توانیم به همگرایی خوبی در جوابها برسیم. از طرفی در حالت پمپ از دو سر فیبر علاوه بر توان سیگنال‌ها در ابتدای فیبر مقدار پمپ Forward را نیز در ابتدا ($z=0$) داریم و همچنین طیف پمپ Backward در انتهای فیبر ($z=L$) مشخص است، بنابراین با مسئله‌ای با شرایط مرزی دو گانه مواجه هستیم. برای حل این گونه مسائل نیاز به حدس زدن مقدار پمپ Backward در ابتدای فیبر می‌باشیم؛ که حدسی به صورت $P_b(V)e^{-\alpha(V)L}$ را اعمال نمودیم و سر انجام توسط اعمال الگوریتم "shooting" $[\lambda]$ به نتایج نهایی دست پیدا نمودیم. همچنین توسط روش تمام عددی (که این روش بر مبنای تقسیم نمودن طیف فرکانسی پمپ‌ها به تعدادی پمپ گسسته می‌باشد) [9] مسائل مربوطه را حل نموده و منحنی اعوجاجات بهره را با یکدیگر مقایسه نمودیم. در ادامه مثالی با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است:

$$-\frac{\partial P_b(\hat{V})}{\partial z} = P_b(\hat{V})[-\alpha(\hat{V}) + \sum_{j=1}^{N_s} g(\hat{V}, v_j) S_j + M_b(\hat{V}) + M_f(\hat{V})] \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_f(\hat{V})}{\partial z} = P_f(\hat{V})[-\alpha(\hat{V}) + \sum_{j=1}^{N_s} g(\hat{V}, v_j) S_j + M_b(\hat{V}) + M_f(\hat{V})] \quad (11)$$

حال جهت یافتن معادلات حاکم بر ممان‌های $B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ و $F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ کافی است تا طرفین رابطه (۲) را در $\alpha^m(V) \times M_b^n(V) \times g(v_{k_1}, V) g(v_{k_2}, V) \dots g(v_{k_l}, V)$ رابطه (۳) را در $\alpha^m(V) \times M_f^t(V) \times g(v_{k_1}, V) g(v_{k_2}, V) \dots g(v_{k_l}, V)$ ضرب کرده و روی کل بازه فرکانسی انتگرال گیری شود؛ نهایتاً معادلات حاکم بر ممان‌های $B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ و $F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}$ به صورت:

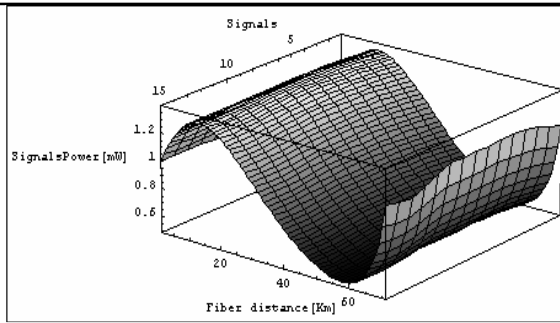
$$\frac{\partial B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}}{\partial z} = B_{k_1, \dots, k_l}^{(m+1, n, t)} - B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n+1, t)} - B_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t+1)} - \sum_{j=1}^{N_s} S_j B_{k_1, \dots, k_l, k_j}^{(m, n, t)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t)}}{\partial z} = -F_{k_1, \dots, k_l}^{(m+1, n, t)} + F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n+1, t)} + F_{k_1, \dots, k_l}^{(m, n, t+1)} + \sum_{j=1}^{N_s} S_j F_{k_1, \dots, k_l, k_j}^{(m, n, t)} \quad (13)$$

خواهند بود.

اما همان طور که ملاحظه می‌کنیم در ممان‌های تعریف شده (روابط (۵) تا (۸))، حضور ضریب تقویت $g(V_k, V)$ نشان دهندهٔ این مطلب است که به ازای هر فرکانس k ($k = 1, 2, \dots, N_s$)، این جملات انتگرالی (ممان‌ها)، دنبالهٔ متناهی از توابع پیوستهٔ z (و یا (V, z) هستند)؛ از سوئی دیگر در ممان‌های مذکور، ضریب تقویت $g(V_k, V)$ که عدد بسیار کوچکی در حدود $(\frac{1}{mW.Km}) 10^{-4}$ است چندین بار در یکدیگر ضرب شده اند، همچنین ضریب افت فیبر

⁶ Full Numerical method



شکل ۳: منحنی تحول سیگنالها در طول فیبر به طول 60Km.

۳- نتیجه گیری

همان طور که از نتایج بدست آمده در منحنی شکل ۲ و مقادیر بدست آمده در جدول ۱ ملاحظه می‌کنیم، بررسی نتایج تقریب های مختلف روی m , b نشان می‌دهد که می‌توان $m=8, b=2$ را که بسیار نزدیک به جواب های روش تمام عددی می‌باشد، تقریبی مناسب در نظر گرفت. همچنین محاسبات عددی نشان می‌دهد که نتایج این تقریب با نتایج مرتبه های بالاتر نیز کاملاً منطبق اند و لذا نیازی به حل تقریب های مرتبه بالاتر نیست.

مراجع

- [1] M. N. Islam, "Raman Amplifier for Telecommunications", **J.Lightwave Technology**, vol. 8, pp. 548 – 559, 2002.
- [2] C. Headely, "Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems". Elsevier Academic Press, San Diego, 2005.
- [3] S. namiki, Y. Emori, "Ultra broad band Raman amplifiers pumped and gain – equilized by wavelength", **J. IEEE** vol. 7, pp. 3-16, 2001.
- [4] A. R. Grant, "Calculating the Raman pump distribution to achive minimum gain ripple", **IEEE quantum electronics**, vol.38, pp.1503-1509, 2002.
- [5] T. J. Ellingham, "Enhanced Raman amplifier flatness with nonlinear broadening over non-standard transmission fiber", **Optics Communications**, vol:257, pp. 176-179, 2001.
- [6] A. R. Bahrapour, M. Mahjoei, "Theoretical analysis of spectral hole burning and relaxation oscillation in all-optical gain stabilized multichannel erbium-doped fiber amplifier (EDFA)", **IEEE J.Lightwave Technology**, vol. 19, pp. 1130-1139, 2001.
- [7] H. Kidorf, K. Rottwitz, "Pump interactions in a 100-nm bandwidth Raman amplifier", **IEEE Photonics Thecnology Letters**, vol. 11, pp. 530-532, 1999.
- [8] X. Liu, B. Lee, "Effective shooting algorithm and its application to fiber amplifiers", **Optics Express**, vol. 11, pp. 1452-1461, 2003.
- [9] S. Martin-Lopez, "Gain Flattening of fiber Raman amplifiers using non-linear pump spectral broadening", **Optics Communication**, vol. 242, pp. 463-469, 2004.

سیگنال ها در بازه فرکانسی [198/1,191/03] (THz) با مشخصات: $N_s = 15, L = 60 \text{ Km}$ و دو پمپ با طیف فرکانسی گوسی شکل در نظر گرفته شده اند، که پمپ مستقیم دارای توان کل 250/167mW و فرکانس مرکزی 208/01THz و پمپ معکوس با توان کل 221/748mW و با فرکانس مرکزی 210/11THz می باشند.

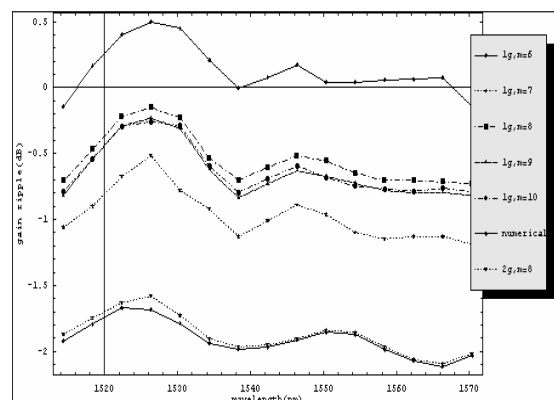
همچنین در مسئله مذکور، سطح مقطع مؤثر فیبر، ضریب مربوط به آثار قطبش، فرکانس مرجع و توان سیگنالها در ابتدای فیبر، به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$A_{eff} = 80 \mu m^2, \Gamma = 2, \nu_R = 300 THz, S_k(0) = 1 mW (k = 1, 2, \dots, N_s)$$

منحنی اعوجاجات بهره در دو تقریب $b=1, b=2$ و روش تمام عددی در شکل (۲) نشان داده شده است. همچنین اطلاعات مربوط به اعوجاجات بهره در جدول ۱ آورده شده است و منحنی تحول سیگنالها در طول فیبر نیز در شکل (۳) آورده شده است.

جدول ۱: مقایسه اعوجاجات بهره به ازای تقریب های مختلف در روش میان و روش تمام عددی.

1g Approximation (b=1)	Gain ripple(dB)
M=6	۰,۶۴۹
M=7	۰,۶۷۳
M=8	۰,۵۸۶
M=9	۰,۵۷۵
M=10	۰,۵۳۱
2g Approximation (b=2)	Gain ripple(dB)
M=8	۰,۵۰۲
Numerical method	۰,۵۰۱



شکل ۲: نمایش اعوجاجات بهره در دو تقریب 1g, 2g و روش تمام عددی.