



## اصول مدلسازی دینامیک زیر دریایی

فرهود آذرسینا<sup>۱</sup> - محمد سعید سیف<sup>۲</sup>

### چکیده

در این مقاله اصول مدلسازی دینامیک زیر دریایی، بصورت مراحل مشخص تدوین شده است. با توجه به محدودیت برای پرداختن به جزئیات و اثبات روابط سعی گردیده اصول مهم بیان شود و مراجع معرفی شده برای دستیابی به درک بهتری از روابط، قابل استفاده باشند.

در این مقاله علاوه بر گردآوری و تدوین اصول، سعی شده در هر قسمت ساده سازی ها و ضرایب مورد نیاز معرفی گردند. چنین ساده سازی هایی تقریب خوبی از رفتار دینامیکی زیر دریایی که در حالت کامل بسیار پیچیده است، بدست می دهد. در تحلیل های دقیق تر می توان به جزئیات هر بخش پرداخت و مدلسازی را کاملتر نمود. مدل ارائه شده تبدیل به یک نرم افزار کامپیوتری گردیده و برخی از نتایج بدست آمده ارائه و تشریح شده اند.

### (۱) مقدمه

کاربردهای گسترده زیر دریایی، اهمیت توسعه دانش و تکنولوژی در این زمینه را نشان می دهد. مطالعه دینامیک زیر دریایی بخش مهمی از این دانش است که به طور مستقیم بر طراحی یک زیر دریایی و عملکرد نهایی آن اثر دارد و بر تکنولوژی های ساخت هم مؤثر خواهد بود.

---

1- دانشجوی دکترا دانشگاه Memorial کانادا

2- دانشیار دانشگاه صنعتی شریف



منظور از مدل سازی تعریف ویژگی ها، ورودی ها و خروجی های یک مسأله خاص و ارتباط آنها است. این مسأله خاص می تواند یک نمونه واقعی باشد. یعنی اگر اطلاعات یک زیردریایی واقعی که ساخته شده، در دست باشد می توان مدل ریاضی را با توجه به این ویژگیها تهیه نمود. در این حالت ورودی ها هم طبق نیازهای عملیاتی زیردریایی واقعی تعریف می شود و پاسخ دینامیکی به عنوان خروجی مشخص می شود. در حالت دیگر مسأله ای که مدلسازی می شود، در حد یک طرح است. در این حالت اگر رفتار دینامیکی مدل نامناسب باشد، می توان ابعاد و مشخصات مدل را تغییر داد. مسلماً در حالت اول زیردریایی ساخته شده است و بنابراین برای اصلاح رفتار دینامیکی تنها می توان از دستوره های کنترلی استفاده کرد.

برای شروع مدلسازی بهتر است برای هر طرح مراحل مدلسازی جداگانه ارزیابی شود. در مجموع مقالات اندکی با عنوان مدلسازی دینامیکی زیردریایی موجود است و بسیاری از تحقیقات جنبه نسبتاً نظامی و غیر قابل دسترسی دارند. اکثر مقالات موجود نیز، مدلسازی یک حالت خاص است. مشکل اصلی برای تعمیم مدلسازی ریاضی به هندسه ای دلخواه (البته در محدوده هندسه زیردریایی های متداول) ضرایب هیدرودینامیکی هستند. مثلاً در مرجع [1] برای ارائه مدل ریاضی از ساخت مدل فیزیکی کمک گرفته شده و ضرایب هیدرودینامیکی آزمایش مدل بدست آمده است و یا مرجع [2] که با روشهای عددی مانور زیردریایی نزدیک سطح را تحلیل کرده است، برای شبکه بندی و حل جریان وابسته به هندسه زیردریایی بوده و نتایج قابل تعمیم به همه حالات نیستند.

## ۲) معادلات حرکت

در مطالعه دینامیک زیردریایی می توان آن را یک جسم صلب با ۶ درجه آزادی فرض کرد. در حالت کلی این یک فرض ساده کننده است زیرا باید اثر سیال داخل مخازن و جابجایی وزنه های داخلی هم لحاظ شود. در هر حال می توان قانون نیوتن را به صورت بقای اندازه حرکت خطی و زاویه ای بیان کرد یعنی:

$$\sum F = m\dot{V} \quad , \quad \sum M = I\dot{\alpha} \quad (1)$$

باید نیروهای وارد بر جسم به صورت برداری تعیین و جرم جسم، مرکز جرم و ممان اینرسی آن هم مشخص شود تا معادلات حرکت بدست آید.

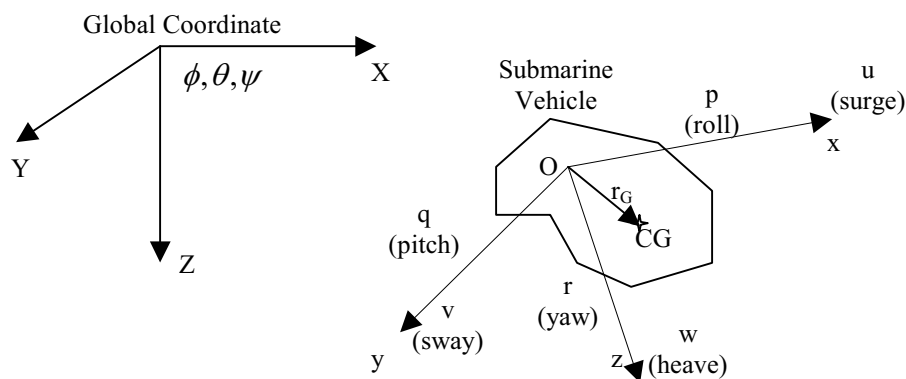
در مطالعه زیردریایی ها طبق قرارداد SNAME 1950 [۳] دو دستگاه مختصات تعریف می شوند که عبارتند از:

مختصات محلی (Body – fixed) و مختصات کلی (Earth – fixed) که چون سرعت زیردریایی نسبت به شتاب یک نقطه از زمین قابل صرفنظر است، مختصات چسبیده به زمین همان مختصات کلی (Global) است. عبارت دیگر مبدأ مختصات و جهت بردارهای یکه ثابت هستند.

دینامیک زیردریایی با ۶ درجه آزادی با بردارهای:  $\tau, v, \eta$  بیان می شود که  $\eta$  جابجایی خطی و زاویه ای در دستگاه مختصات کلی،  $v$  سرعت خطی و زاویه ای در مختصات محلی و  $\tau$  نیروها و ممان های وارد بر زیردریایی در مختصات محلی هستند. عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} \eta &= [\eta_1^T, \eta_2^T]^T; & \eta_1 &= [x, y, z]^T; & \eta_2 &= [\phi, \theta, \psi]^T \\ v &= [v_1^T, v_2^T]^T; & v_1 &= [u, v, w]^T; & v_2 &= [p, q, r]^T \\ \tau &= [\tau_1^T, \tau_2^T]^T; & \tau_1 &= [X, Y, Z]^T; & \tau_2 &= [K, M, N]^T \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات حرکت زیردریایی در مختصات محلی نوشته می شود. به این ترتیب نیروها و ممان های هیدرودینامیکی با تغییر راستای زیردریایی نسبت به مختصات کلی، تغییر نمی کنند. معمولاً مرکز دستگاه مختصات محلی منطبق بر مرکز جرم (CG) انتخاب می شود. در حالت کلی تر طبق شکل ۱ مبدا دستگاه مختصات محلی نقطه  $O$  به فاصله  $r_G$  از مرکز جرم زیردریایی است.



شکل ۱- دستگاه های مختصات



اگر  $\sum F$  و  $\sum M$  در معادله ۱ به ترتیب با  $\tau_1$  و  $\tau_2$  جایگزین شوند معادلات حرکت در مختصات محلی به صورت زیر خواهند بود:

$$m[\dot{v}_1 + v_2 \times v_1 + \dot{v}_2 \times r_G + v_2 \times (v_2 \times r_G)] = \tau_1 \quad (3)$$

$$I_0 \dot{v}_2 + v_2 (I_0 v_2) + m r_G \times (\dot{v}_1 + v_2 \times v_1) = \tau_2$$

در معادلات فوق  $r_G = [x_G, y_G, z_G]$  محل مرکز جرم،  $m$  جرم زیردریایی و  $I_0$  ممان اینرسی حول مبدأ است. معادلات ۳ به شش مؤلفه متناظر در جهات  $x, y, z, \phi, \theta, \psi$  قابل تفکیک هستند. این شش معادله، معادلات حرکتند و زیربنای مدلسازی دینامیک زیردریایی محسوب می شوند.

### ۳) اصول مدلسازی

هدف این مدلسازی پیش بینی چگونگی حرکت زیردریایی در آب ساکن، در اثر تغییر یک یا چند مورد از ورودی ها و ویژگی های مدل است. مواردی همچون چگالی آب، حدود عمق کاری زیردریایی، دمای آب، لیست اجزای زیردریایی که در مساله مؤثرند (بدنه، سطوح افقی پاشنه، سکان، پروانه و ...)، هندسه بدنه، مشخصات سطوح کنترلی (هندسه، ضریب نیروی برا)، مشخصات پروانه (قطر، دور، بازده و...) چیدمان اجزا نسبت به هم، موقعیت مرکز شناوری (با توجه به هندسه اجزا قابل تعیین است)، موقعیت مرکز جرم، وضعیت دستگاه مختصات محلی و وضعیت دستگاه مختصات کلی ویژگی های مدلسازی هستند.

ورودی های مساله موقعیت اولیه زیردریایی، سرعت اولیه، دور پروانه، زاویه حمله سطوح کنترلی، زاویه حمله بدنه، وضعیت تریم زیر دریایی (از نظر مقدار نیروی وزن و شناوری) است و نهایتاً خروجی های مساله یا مدل تهیه شده شتاب زیردریایی، سرعت زیردریایی و مکان زیردریایی پس از گذشت زمان مورد نظر هستند. همانطور که اشاره شد از معادلات نیوتن - اویلر، معادله حرکت بدست می آید:

$$M_{RB} \dot{v} + C_{RB(v)} v = \tau_{RB} \quad (4)$$

$M_{RB}$  ماتریس  $6 \times 6$  جرم،  $C_{RB(v)}$  ماتریس  $6 \times 6$  اینرسی افزوده و  $\tau_{RB}$  بردار  $6 \times 1$  نیروها و گشتاورها است.

ماتریس جرم نیز به صورت زیر تعریف می شود:



$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

مولفه های ماتریس جرم از ویژگی های مساله قابل تعیین است.

$C_{RB}$  که اینرسی افزوده خوانده می شود شامل بردارهای مربوط به اثر Coriolis یعنی  $V_2 \times V_1$  و بردارهای

مربوط به اثر جانب مرکز یعنی  $V_2 \times (V_2 \times r_G)$  است و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$C_{RB(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m(y_G q + z_G r) & m(y_G p + w) & m(z_G p - v) \\ -m(x_G q - w) & -m(z_G r + x_G p) & m(z_G q + u) \\ m(x_G r + v) & m(y_G r - u) & -m(x_G p + y_G q) \\ m(y_G q + z_G r) & -m(x_G q - w) & -m(x_G r + v) \\ -m(y_G p - w) & m(z_G r + x_G p) & -m(y_G r - u) \\ -m(z_G p - v) & -m(x_G q + u) & m(x_G p + y_G q) \\ 0 & -I_{yz} q - I_{xz} p + I_z r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_y q \\ I_{yz} q + I_{xz} - I_z r & 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_x p \\ -I_{yz} r - I_{xy} p + I_y q & I_{xz} r + I_{xy} q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

نیروهایی که به یک زیردریایی وارد می شود عبارتند از: نیروهای هیدرواستاتیکی، گرانشی، هیدرودینامیکی و

رانش. بنابراین  $\tau_{RB}$  عبارتست از:

$$\tau_{RB} = F_{propulsion} + F_{Hydrodynamic} + F_B + F_G \quad (7)$$

در رابطه (7) برآیند نیروهای هیدرواستاتیکی که شناوری زیردریایی است با  $F_B$  و نیروی گرانش با  $F_G$  نمایش

داده شده که مجموع این دو نیرو را می توان به صورت نیروی ذخیره شونده (Restoring force) نشان داد.

نیروهای هیدرودینامیکی به دو صورت بر جسم اثر می گذارند:

الف) مستقیماً به خاطر لزجت سیال به صورت تنش های قائم و برشی بر سطح جسم اثر می کند (نیروهای پسا

و برآ)

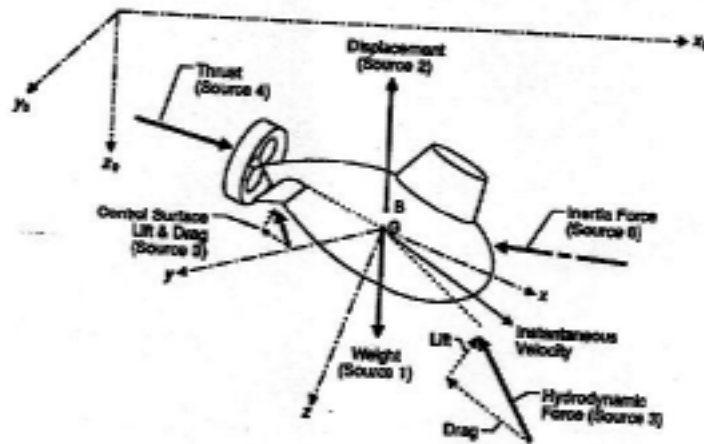
ب) همراه جسم مقداری از جرم سیال جابجا می شود و شتاب می گیرد که جرم افزوده (Added Mass) نامیده می شود.

مورد (الف) به صورت یک نیروی مستهلک کننده ضریبی از سرعت جسم است و مورد (ب) به دو بخش  $M_A$  (جرم افزوده) و  $C_A$  (اینرسی افزوده ناشی از جرم افزوده) تقسیم می شود.

همچنین  $F_{prop}$  که نیروی پروانه یا به طور کلی پیشران است با  $\tau$  نشان داده می شود. پس نیروهای وارد بر زیردریایی مجموعاً به صورت زیر نوشته می شود:

$$\tau_{RB} = \underbrace{\tau}_{\text{propulsion forces}} - \underbrace{M_A \dot{v} - C_{A(v)} v}_{\text{hydrodynamic added mass}} - \underbrace{D_{(v)}}_{\text{hydrodynamic damping and lift}} + \underbrace{g(\eta)}_{\text{restoring forces}} \quad (8)$$

علاوه بر این نیروها، نیروهای برخوردی هم می تواند به زیردریایی وارد شود. منشأ این نیروها اجسام خارجی، امواج و جریان آب است. البته در این مقاله آب ساکن فرض می شود. نیروهای وارد بر زیردریایی در شکل ۲ نمایش داده شده اند.



شکل ۲- نمایش نیروهای مختلف وارد بر یک زیردریایی [5]

از ماتریس زیر با دانستن موقعیت اولیه زیردریایی و تریم زیردریایی (ورودی های مساله) و جرم زیردریایی تعیین می شود.



$$g^{(n)} = \begin{bmatrix} -(W-B)s\theta \\ (W-B)c\theta s\phi \\ (W-B)c\theta c\phi \\ (y_G W - y_B B)c\theta c\phi + (z_G W - z_B B)c\theta s\phi \\ -(z_G W - z_B B)s\theta + (x_G W - x_B B)c\theta c\phi \\ (x_G W - x_B B)c\theta s\phi - (y_G W - y_B B)s\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$c$  نمایش خلاصه (Cos) و  $s$  نمایش خلاصه (Sin) است.

جرم افزوده  $M_A$  مورد استفاده در رابطه (۸) ماتریس قطری فرض می شود و عبارتست از:

$$M_A = \text{diag}\{X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}\} \quad (10)$$

مؤلفه های این ماتریس قطری، برای اجسام باریک کاملاً مغروق، با روابط تئوری قابل تقریب است [3].

همچنین  $C_A$  یعنی اینرسی افزوده ناشی از جرم افزوده، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$C_{A(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}}r & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

با داشتن مؤلفه های  $M_A$  و سرعت اولیه،  $v_{(t_0)}$ ، مؤلفه های  $C_A$  قابل محاسبه هستند.

نیروهای هیدرودینامیکی برا و پسا و گشتاورهای مربوط به آنها به دو بخش تقسیم می شود:

۱. نیروهای وارد بر بدنه

۲. نیروهای وارد بر سطوح کنترلی

نیروی پسا (Drag) وارد بر بدنه به صورت زیر نوشته می شود:

$$D = [D_x, D_y, D_z]^T \quad (12)$$

این مؤلفه ها از روابط تجربی قابل محاسبه هستند. البته می توان از تست مدل و یا تحلیل عددی جریان حول

زیر دریایی مورد نظر نیز استفاده نمود.

نیروی برا (lift) وارد بر بدنه و گشتاور آن نیز به صورت مشابه قابل محاسبه هستند و در حالت کلی به صورت

زیر نمایش داده می شوند:



$$L = [0, L_y, L_z]^T \quad (13)$$

$$M_L = [0, M_{Lz}, M_{Ly}]^T$$

برخی روابط تجربی برای محاسبه این مؤلفه ها نیز در مرجع شماره [8] ارائه شده اند.

نیروی برا و پسا مربوط به سطوح کنترلی از روابط معمول مورد استفاده برای فویل ها قابل محاسبه است [4]. همچنین گشتاور سطوح کنترلی با توجه به موقعیت مرکز مختصات و مشخص بودن نیروهای وارد بر سطوح فوق محاسبه می شوند.

موضوع دیگری که باید در مدلسازی مورد توجه واقع شود سیستم رانش است. ماتریس نیرو و گشتاور ناشی از رانش به صورت ذیل قابل نمایش است:

$$\tau = [\rho D^4 K_T J_0 n^2, 0, 0, \rho D^5 K_Q J_0 n^2, 0, 0]^T \quad (14)$$

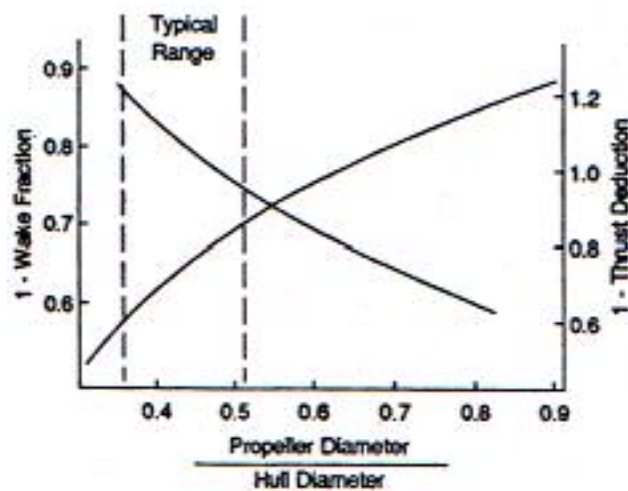
ضریب پیشروی پروانه است که اگر ضریب Wake طبق تعریف تیلور  $J_0 = \frac{V_a}{nD}$  باشد بدست می آید:

$$V_a = (1-w)V \quad (15)$$

ضریب wake را می توان از روابط تجربی و یا با انجام تست مدل محاسبه نمود. از نمودار شکل ۳ مقدار

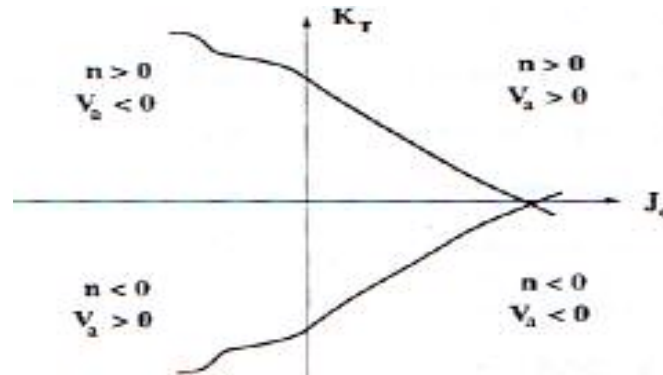
$(1-w)$  یعنی wake fraction بر حسب نسبت قطر پروانه به قطر حداکثر بدنه، با تقریب خوبی بدست می

آید.





در این نمودار همچنین  $(1-t)$  خوانده می‌شود که  $t$  ضریب کاهش رانش (thrust deduction) است. در شکل ۳،  $D$  قطر پروانه،  $\rho$  چگالی آب و  $K_T$  ضریب پیشران است. از طرفی در حالت کلی  $K_T$  تابع غیر خطی از  $J_o$  است. شکل ۴ رفتار  $K_T$  را نشان می‌دهد.



شکل ۴- نمودار  $K_T$  بر حسب  $J_o$  [3]

در  $J_o > 0$  نمودار تقریباً خطی است. رفتار  $K_Q$  هم تقریباً شبیه  $K_T$  است. بنابراین می‌توان برای ضریب رانش و گشتاور رابطه‌ای خطی بر حسب  $J_o$  بدست آورد:

$$K_T = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{V_a}{nD}$$

$$K_Q = \beta_1 + \beta_2 \frac{V_a}{nD} \quad (16)$$

ضرایب ثابت  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  از آزمایش مشخص می‌شوند.

نهایتاً از ترکیب روابط (۴) و (۸) بدست می‌آید:

$$\tau - M_A \dot{v} - C_{A(v)} v - D_{(v)} + g_{(\eta)} = M_{RB} \dot{v} + C_{RB(v)} v \quad (17)$$

با انجام عملیات جبری می‌توان نوشت:

$$(M_{RB} + M_A) \dot{v}_{(t_0)} = C_{(t_0)} \quad (18)$$

$C$  مجموع جملاتی است که مقدار آنها در لحظه  $t_0$  با توجه به سرعت اولیه و آنچه‌ان که توضیح داده شد، بدست می‌آید همچنین:

$$M = M_{RB} + M_A \quad (19)$$

بنابراین شتاب در لحظه  $t_0$  عبارتست از:

$$\dot{v}_{(t_0)} = M^{-1} C_{(t_0)} \quad (20)$$

با انتگرال گیری از شتاب در بازه زمانی  $(\delta t)$  سرعت در لحظه  $(t_0 + \delta t)$  بدست می‌آید:

$$v_{(t_0+\delta t)} = v_{(t_0)} + (\delta t) \dot{v}_{(t_0)} \quad (21)$$



سرعت در مختصات کلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{\eta} = J^{-1}(\eta_2)v \quad (22)$$

$J(\eta_2)$  ماتریس تبدیل مختصات است:

$$J(\eta_2) = \begin{bmatrix} J_1(\eta_2) & 0 \\ 0 & J_2(\eta_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$J_1(\eta_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

$$J_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\phi & c\phi/c\theta \end{bmatrix}$$

$t$  نمایش خلاصه  $\tan$  است.

مکان زیر دریایی در مختصات کلی نیز در لحظه  $(t_0 + \delta t)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\eta_{(t_0+\delta t)} = \eta_{(t_0)} + (\delta t)\dot{\eta}_{(t_0)}$$

بنابراین با توجه به روند مدلسازی توصیف شده امکان بررسی حرکات زیردریایی در آب ساکن در یک روند

زمانی با در نظر گرفتن گامهای مناسب  $(\delta t)$  امکانپذیر خواهد بود.

#### ۴) نمونه ای از نتایج عددی

در این قسمت نمونه ای از نتایج مدلسازی بر مبنای اصول مدلسازی تشریح شده ارائه شده است. تعریف کاملی

از مدل ریاضی ساخته شده و نتایج بدست آمده در مرجع [۹] ارائه شده است.

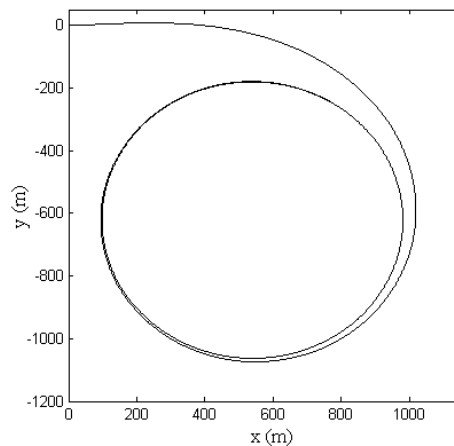
در شکل ۵ نمونه ای از چرخش زیردریایی با زاویه ساکن  $15^\circ$  نمایش داده شده است. زیردریایی در اثر نیروی

رانس به سرعت  $15 m/s$  رسیده (شکل ۶). نمودار جابجایی در راستای X هم در شکل ۷ نشان داده شده با

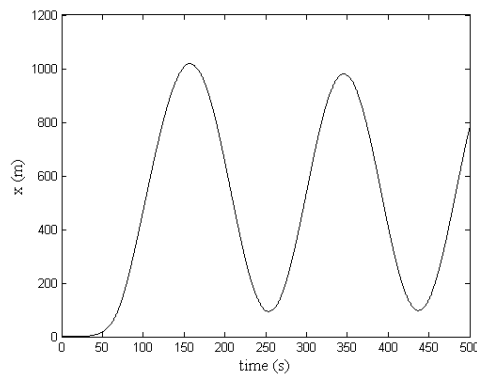
توجه به تعداد تناوبهای این شکل می توان تعداد دورهای چرخش زیردریایی در صفحه X-Y را مشخص نمود.

همچنین شعاع چرخش زیردریایی با توجه به شکل ۵ حدود ۴۰۰ متر می باشد و می توان تجسم مناسبی از

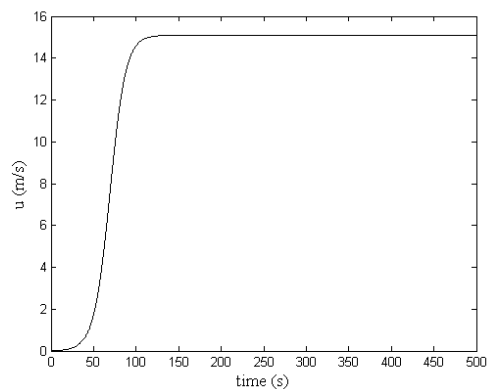
توانایی مانور زیردریایی در چنین شرایطی بدست آورد.



شکل ۵- چرخش زیردریایی در صفحه X-y



شکل ۷- تغییر مکان زیردریایی در راستای X



شکل ۶- نمودار سرعت زیردریایی در راستای X

### جمع بندی و نتیجه گیری:

مقاله حاضر مدل ریاضی کامل و مناسبی برای تحلیل حرکات زیردریایی در آب ساکن ارائه می نماید. مدل فوق محدودیتی از لحاظ شکل هندسی و شرایط دریا نداشته و می توان رفتار زیردریایی و حرکات آن را تحت تأثیر نیروی رانش و سطوح کنترلی شبیه سازی نمود. شبیه سازی فوق می تواند در ارزیابی توانایی مانور زیردریایی های در دست طراحی بسیار مفید باشد. همچنین در آموزش و ساخت دستگاههای سیمپلاتور می توان از مدل فوق استفاده و شرایط مانور واقعی یک زیردریایی را شبیه سازی نمود.



## مراجع

- 1- Ridley Peter, "Submarine Dynamic Modeling", Queensland University of Technology, 2001
- 2- Griffin Michael J., "Numerical Prediction of the Maneuvering Characteristics of Submarines Operating Near the Free Surface", PhD Thesis, MIT, 2001
- 3- Fossen Thor I., "Guidance and Control of Ocean Vehicles", John Wiley & Sons Ltd., 1994
- 4- White Frank M., "Fluid Mechanics", Mc Graw-Hill, 1986
- 5- "Submarine Vehicle Systems Design", Written by a Group of Authorities, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1990
- 6- Purtell L. Patrick, "Unsteady Hydrodynamics of the Maneuvering Submarine", Office of Naval Research Arlington, 1998
- 7- Sadko Mandzuka, "Mathematical Model of a Submarine Dynamics at the Periscope Depth", Brodarski Institute, 1998
- 8- Yuh J., "Underwater Robotic Vehicle Design and Control", TSI Press, 1995
- ۹- فرهود آذرسینا، "دینامیک زیردریایی"، پایان نامه فارغ التحصیلی، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی

شریف، تابستان ۱۳۸۳