



## مدلسازی جریان گذرای دو فازی با استفاده از روش گام جزئی

ابراهیم جهان بخش<sup>۱</sup>، روزبه پناهی<sup>۲</sup>، محمد سعید سیف<sup>۳</sup>  
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی مکانیک، آزمایشگاه دریا  
ebrahim\_jahan@yahoo.com

### چکیده

مدلسازی جریان دوفازی کاربرد بسیاری در مسائل صنعتی و بخصوص پدیده های مربوط به هیدرودینامیک شناور ها داشته و از این رو تحقیقات زیادی برای بررسی این موضوع در حال انجام است. حل عددی این جریان از دو زیر مساله اصلی معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی و مدلسازی سطح آزاد تشکیل شده و کوپل مناسب این دو به خصوص در شرایطی که اختلاف خواص فیزیکی دو فاز سیال زیاد باشد، نیازمند توجه ویژه ای در رویه عددی و گسسته سازی معادلات حاکم است.

با حل معادله انتقال نسبت حجمی در رویکرد حجمی مدلسازی سطح آزاد، توزیع دو فاز سیال در کل دامنه محاسباتی بدست آمده و بدین ترتیب معادلات حاکم بر جریان سیال برای یک سیال موثر با خواص فیزیکی متغیر حل خواهد شد. به منظور کوپل میدان سرعت و فشار نیز از روش گام جزئی استفاده شده است.

مقایسه نتایج حاصل از مدلسازی ناپایداری رایلی- تیلور و نوسان مایع درون مخزن (Sloshing)، بیانگر توانایی و دقت الگوریتم عددی پیشنهادی و نرم افزار تهیه شده است. اگرچه مسائل بیان شده همگی دو بعدی بوده و از هندسه ساده ای برخوردار می باشند، اما رویه عددی بیان شده به راحتی برای مدلسازی جریانهای دوفازی گذرای سه بعدی قابل استفاده می باشد.

**کلمات کلیدی:** جریان دو فازی، روش گام جزئی، روش حجمی مدلسازی سطح آزاد

<sup>1</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد

<sup>2</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد

<sup>3</sup> دانشیار



## مقدمه

جریان سیال همراه با سطح آزاد در بسیاری از مسائل عملی بوجود می‌آید. مدل‌سازی چنین جریانی از مسائل روز دینامیک سیالات محاسباتی بوده و تحقیقات زیادی در این زمینه در حال انجام می‌باشد. مساله بیان شده از دو بخش کلی تشکیل شده است که عبارتند از: حل معادلات اساسی حاکم بر جریان سیال (معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی) و مدل‌سازی سطح آزاد.

حل معادلات ناویر- استوکس، نیازمند انتخاب الگوریتم کوپل میدان سرعت و فشار می‌باشد. به طور کلی این روش‌های را می‌توان به دو دسته روش‌های اصلاح فشار (Pressure-Corrector) و روش‌های گام جزئی تقسیم نمود. روش‌های مبتنی بر رویکرد اصلاح فشار مانند SIMPLE [۱] و PISO [۲ و ۳]، معادله اصلاح فشار را چندین بار حل نموده و بر اساس آن سرعت‌ها را اصلاح می‌نمایند، تا پیوستگی در میدان محاسباتی برقرار گردد. در مقابل، روش‌هایی وجود دارند که با یک بار حل معادله متغیر شبه فشار (کمیت کمکی مرتبط با فشار) در هر گام زمانی، شرط پیوستگی را ارضا می‌کنند. بدین ترتیب، استفاده از رویکرد گام جزئی با توجه به بالا رفتن سرعت حل و قابلیت آن در مدل‌سازی مسائل گذرا، بسیار مورد توجه واقع شده است [۴]. این رویکرد توسط کرین [۵ و ۶] در اوایل دهه هشتاد میلادی پیشنهاد گردید و در ادامه توسط افراد مختلف گسترش پیدا کرد [۷ و ۸ و ۹ و ۱۰]. برون [۱۱] با مقایسه این روش‌ها، به اصلاح طرح بل [۸] پرداخت و طرحی را ارائه نمود که میدان سرعت و فشار را با دقت مرتبه دوم حل می‌کند. تحقیق حاضر از طرح مذکور به منظور حل معادلات ناویر - استوکس استفاده می‌کند.

از طرف دیگر، دو روش مدل‌سازی سطح آزاد عبارتند از [۱۲]: روش‌های سطحی یا تعقیب سطح آزاد و روش‌های حجمی یا تسخیر سطح آزاد. روش‌های سطحی با محدودیتهایی در مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ و پیچیده روبرو بوده و از این رو استفاده از روش‌های حجمی مورد توجه بیشتری واقع شده است. در این حالت، فصل مشترک دو سیال به عنوان یک ناپیوستگی در خصوصیات فیزیکی دامنه محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. در این میان بسیاری از طرح‌های مبتنی بر رویکرد حجمی مدل‌سازی سطح آزاد با حل یک معادله انتقال، توزیع دو فاز سیال درون هر سلول شبکه محاسباتی و به عبارت دیگر نسبت حجمی را بدست می‌آورند. گسسته سازی مناسب معادله انتقال کمیت سطح آزاد از اهمیت بالایی برخوردار بوده و تحقیقات قابل توجهی در این راستا انجام پذیرفته است. تحقیق حاضر از میانمایی [۱۳]



CICSAM (Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes) که یک میانمایی ترکیبی مرتبه بالا می باشد استفاده می نماید. این میانمایی با توجه به وضعیت جریان، دو طرح میانمایی را ترکیب نموده و از خواص آنها برای مدلسازی یک فصل مشترک واضح (Sharp Interface) (تغییر بین دو فاز سیال در طول یک سلول محاسباتی اتفاق می افتد) با تغییر شکل واقعی استفاده می کند.

## معادلات اساسی حاکم

در مدلسازی جریانهای همراه با سطح آزاد، با محاسبه توزیع دو فاز سیال در کل دامنه محاسباتی، می توان فرض نمود که یک سیال موثر در کل دامنه وجود دارد. بدین ترتیب، معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی برای این سیال موثر با لزجت و جرم حجمی متغیر در دامنه محاسباتی حل می شوند. این معادلات در شکل حجم محدود عبارتند از:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \bar{U} dV + \int_{A(t)} \rho \bar{U} (\bar{c} \cdot \bar{n}) dA = \int_{A(t)} \mu \bar{\nabla} \bar{U} \cdot \bar{n} dA - \int_{A(t)} P \cdot \bar{n} dA + \int_{V(t)} \rho \bar{g} dV \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (2)$$

که در این روابط  $\bar{U}$  بردار سرعت،  $\bar{c}$  شار جابجایی روی سطح،  $\mu$  لزجت سیال،  $\rho$  جرم حجمی،  $P$  فشار و  $\bar{g}$  بیانگر ثقل هستند. جمله نفوذ (Diffusion Term) (عبارت اول سمت راست معادله (۱)) با استفاده از میانمایی اختلاف مرکزی [۴] گسسته می شود. گسسته سازی جمله جابجایی (عبارت دوم سمت چپ معادله (۱)) نیازمند سرعت روی سطوح میباشد. در تحقیق حاضر، این کمیت به کمک میانمایی گاما [۱۴] بر اساس تعاریف متغیرهای نرمال شده (Normalized Variable Diagram -NVD) [۱۴] محاسبه شده است.

جرم حجمی و لزجت سیال موثر در هر سلول با رابطه (۳) محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned} \rho_{cell} &= \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \\ v_{cell} &= \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2 \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، زیر نویس های ۱ و ۲ بیانگر دو فاز سیال (برای مثال آب و هوا) می باشند. نسبت حجمی  $\alpha$  (درصد حضور دو سیال درون هر سلول محاسباتی)، در دامنه حل به صورت رابطه (۴) می باشد:



$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{for cells inside fluid 1} \\ 0 & \text{for cells inside fluid 2} \\ 0 < \alpha_0 < 1 & \text{for transitional area} \end{cases} \quad (4)$$

با استفاده از معادله پیوستگی (معادله (۲)) و تعریف خواص سیال موثر (رابطه (۳))، معادله (۵) برای انتقال نسبت حجمی  $\alpha$  بدست می آید:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha \bar{u}) = 0 \quad (5)$$

گسسته سازی معادله انتقال نسبت حجمی دو فاز سیال (رابطه (۵))، از اهمیت بالایی برخوردار است. در تحقیق حاضر از طرح CICSAM [۱۳] که بر اساس دو میانمایی CBC (Convection Boundedness Criteria) [۱۶] و UQ (ULTIMATE-QUICKEST) [۱۵] می باشد، استفاده شده است.

## ناپایداری رایلی - تیلور

وقتی یک سیال سنگین بر روی یک سیال سبک قرار می گیرد، با توجه به نیروی شناوری، جای دو سیال عوض خواهد شد. این مساله شکل غیر پایداری داشته و به مساله رایلی-تیلور مشهور است. شکل جابجایی دو سیال وابسته به اغتشاش اولیه ای است که به دامنه محاسباتی داده می شود. کارهای زیادی بر این اساس انجام شده است. برای مثال می توان توزیع اولیه سیال را تغییر داده و یا سرعت اولیه به دامنه محاسباتی داد [۱۹ و ۲۰ و ۲۱]. در اینجا، سرعت اولیه (رابطه (۶)) برای دو سیال به عنوان اغتشاش اولیه در نظر گرفته شده است. شکل ۱ بیانگر هندسه مساله می باشد.

$$\frac{u}{V_r} = \begin{cases} \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi |y|}{L}\right) & \frac{y}{L} > 0 \\ -\alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi |y|}{L}\right) & \frac{y}{L} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{v}{V_r} = \alpha \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi |y|}{L}\right) \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\pi A \Delta y}{2V_r L}$$



در این رابطه  $V_r = \sqrt{gL}$ ،  $A$  دامنه اغتشاش بوده و  $\Delta y$  عرض سلول های مورد استفاده در شبکه بندی یکنواخت می باشد. برای مقایسه دقت نتایج از عدد رینولدز  $Re = \frac{\rho_r V_r L_r}{\mu_r}$  بر مبنای سیال سنگین استفاده شده است. در  $Re=28.3$  نتایج بدست آمده با کار مشابهی [۲۱] مقایسه گردیده و در شکل ۲ نمایش داده شده است. در ضمن ملاحظه شده است که در گامها زمانی اولیه تغییر شکل فصل مشترک ماهیتی متقارن داشته و در ادامه این تقارن از بین می رود. برای بررسی اثر عدد رینولدز در شکل گیری فصل مشترک، ناپایداری رایلی - تیلور با سرعت اولیه به دامنه محاسباتی در رینولدزهای مختلف مدلسازی شده و در شکل ۳ نشان داده شده است.

### نوسان مایع درون مخزن (Sloshing)

جابجایی مایع درون مخزن در شناور ها (بخصوص شناور LNG) از اهمیت بالایی برخوردار بوده و باعث تشدید حرکت غلتش عرضی در آنها می شود و برای کاهش این اثر در مخزن شناور ها از کنترل کنندهای غیر فعال (Passive) و فعال (Active) استفاده می شود. نوسان مایع درون مخزن توسط محققین مختلفی بررسی شده [۲۲ و ۲۳] و به عنوان یکی از مسائل نمونه مناسب در کارهای عددی مورد استفاده قرار می گیرد. این مساله با شرایط متفاوتی آزمایش شده است. در اینجا، شرط اولیه جابجایی (موقعیت سطح آزاد) مطابق ۴ به دو سیال غیر لزج، داده شده است. بدین ترتیب مساله مشابه تحقیق راد و همکارانش [۲۳] می باشد. در این حالت سیال با پرپود ۰/۳۷۳۹ ثانیه (رابطه (۷)) نوسان خواهد نمود.

$$Period = 2\pi \sqrt{gk \tanh(kh)} = 0.3739s \quad (7)$$

که در اینجا  $k$  عدد موج و  $h$  عمق آب درون مخزن است. این مساله با شبکه یکنواخت  $10^4 \times 160$  مدلسازی شده است. سیال درون ظرف در شرایط اولیه ساکن خواهد بود. پس از یک چهارم پرپود تمام انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل می شود. در این حالت، سطح مایع درون مخزن کاملاً صاف خواهد بود. پس از گذشت یک پرپود سطح مایع به حالت قبل بر خواهد گشت. شکل ۵ بیانگر جابجایی سطح مایع در زمانهای مختلف یک پرپود می باشد. برای محاسبه پرپود حرکت سطح آزاد و انجام مقایسه (رابطه (۷)) از تغییر ارتفاع مرز سمت راست مایع استفاده شده است. نمودار شکل ۶ به مقایسه نتیجه محاسبه انجام شده و فرکانس تئوری محاسبه شده [۲۳] پرداخته است.



## نتیجه گیری

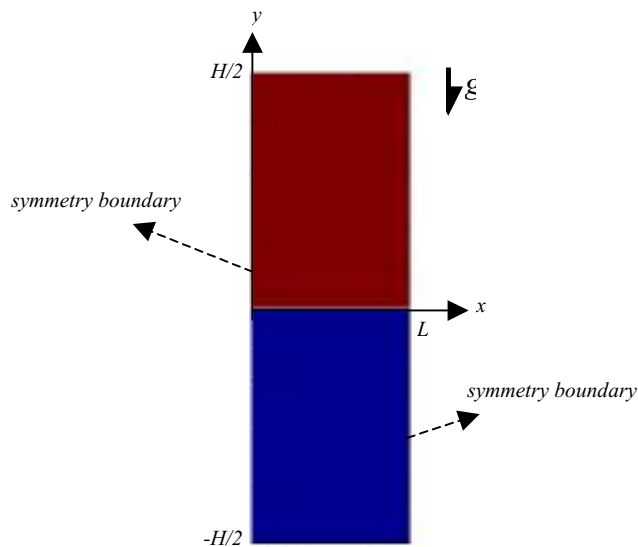
در این مقاله روش مدلسازی سطح آزاد با گسسته سازی معادلات حاکم بر اساس کوپل روش حجمی مدلسازی سطح آزاد و روش گام جزئی (برای حل معادلات ناویر- استوکس) بررسی گردید. گسسته سازی معادله انتقال نسبت حجمی برای محاسبه توزیع دو فاز سیال، نیازمند توجه خاصی است. به هر حال کوپل مناسب دو زیر مساله مذکور، الزاماتی را در گسسته سازی معادلات بوجود می آورد که الگوریتم پیشنهادی بر این اساس شکل گرفته است. با مقایسه نتایج تحقیق حاضر و آزمایشهای مشابه توانایی و دقت روش تایید گردیده است. اگرچه مدلسازی های انجام شده از هندسه ساده ای برخوردار هستند، اما روش بیان شده و نرم افزار تهیه شده، برای هندسه های پیچیده تر قابل اجرا بوده و می تواند برای اینگونه مدلسازی ها ابزار و روش مناسبی باشد. لازم به ذکر است که خروجی نرم افزار تهیه شده، توزیع سرعت و فشار اطراف اجسام می باشد. بدین ترتیب امکان محاسبه نیروهای وارد بر شناور بوجود آمده و با افزودن حل معادلات حاکم بر حرکت جسم صلب، امکان مدل سازی حرکات و مانور شناور بوجود می آید.

## مراجع

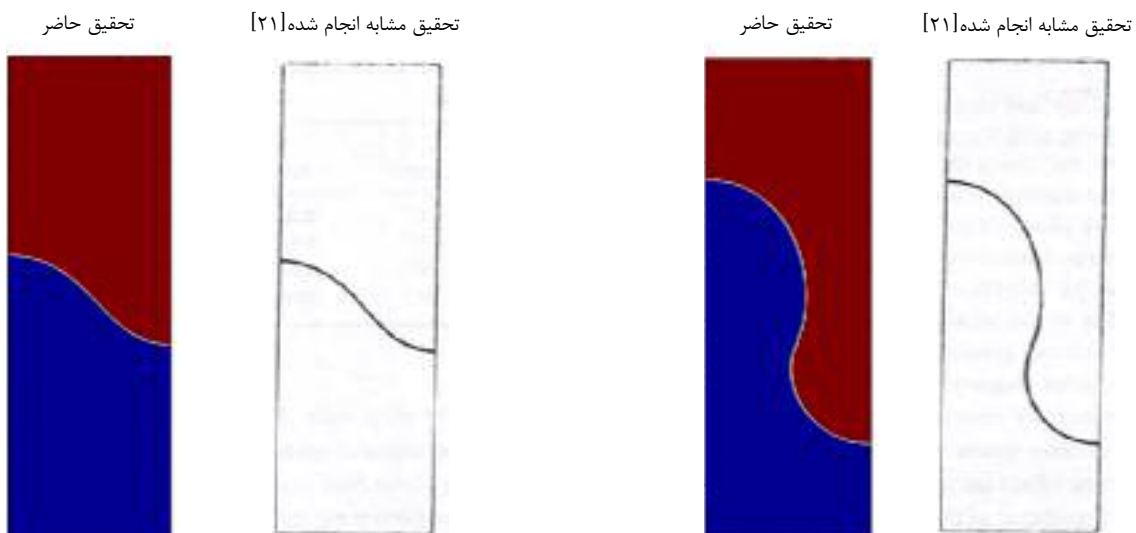
1. Patankar, S.V., Spalding, D.B., "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, p. 1787, 1972.
2. Issa, R.I., "Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting", J. of computational physics Vol. 62(1), p. 40-65, 1986.
3. Versteeg, H.K., Malalasekera, W., "An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method", Hrlow; Longman scientific & Technical, 1995.
4. Ferziger, J. H., Peric, M., "Computational methods for fluid dynamics", 3rd ed., Springer, 2002.
5. Chorin, A.J., "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", Math. Comput. 22, 745, 1968.
6. Chorin, A.J., "On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations", Math. Comput. 23, 341, 1969.
7. Goda, K., "A multiphase technique with implicit difference schemes for calculating two- or three- dimensional cavity flows", J. computational physics. 30, 76, 1979.



8. Bell, J.B., Collela, P., Howell, H., "An efficient second-order projection method for viscous incompressible flow", In proceeding of tenth AIAA computational fluid dynamics conference, AIAA, p.360, 1991.
9. Kim, J., Moin, P., "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations", J. Comput. Phys. 59, 308, 1985.
10. Van Kan, J., "A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow", SIAM, J. Sci. Comput. 7, 870, 1986.
11. Brown, D.L., Cortez, R. Minion, M.L., "Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations", J. Comput. Phys. 168, 464-499, 2001.
12. Muzafferija, S., Peric, M., "Computation of free surface flows using interface tracking and interface capturing methods", chap. 2 in O. Mahrenholtz and M. Markiewicz , Nonlinear Water Waves Interaction, computational Mechanics Publications, Southahampton, 1998.
13. Ubbink, O., "Numerical Prediction of two fluid systems with sharp interfaces", PhD thesis, Imperial College, Department of Mechanical engineering, 1997.
14. Jasak, H., "Error analysis and estimation for finite volume method with application to fluid flows", PhD Thesis, University of London, 1996.
15. Leonard, B.P., "The ULTIMATE conservation difference scheme applied to unsteady one dimensional direction", computational methods in applied mechanic and engineering, 1991.
16. Gaskell, H., Lau, A.K.C., "Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm", Int. J. numerical methods in fluids, 1988.
17. Zang, Y., Street, R.L. Kossef, J.R., "A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates", J. computational physics, 114:18-33, 1994.
18. Kim, D., Choi, H., "A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids", J. Comput. Phys. 162, 411-428, 2000.
19. Puckett, E.G., Almgren, A.S., Bell, J.B., Marcus D.L., Rider, W.J., "A second order projection method for tracking fluids interfaces in variable density incompressible flows", submitted to J. of computational physics.
20. Puckett, E.G., Almgren, A.S., Bell, J.B., Marcus D.L., Rider, W.J., "A high order projection method for tracking fluids interfaces in variable density incompressible flows", J computational physics, 100:269-282, 1997.
21. Kelcey, F.J., Pletcher, R.H., "The development of free surface capturing approach for multidimensional free surface flows in closed containers", J. computational physics, 138, 939-980, 1997.
22. Tadjbakhsh, I., Keller, J.B., "Standing surface waves of finite amplitude", J. of fluid mechanics, 8:442-451, 1960.
23. Raad, P.E., Chen, S., Johnson, D.B., "The introduction of micro cells to treat pressure in free surface fluid flow problems", J. of fluids engineering, 117:683-690, 1995.

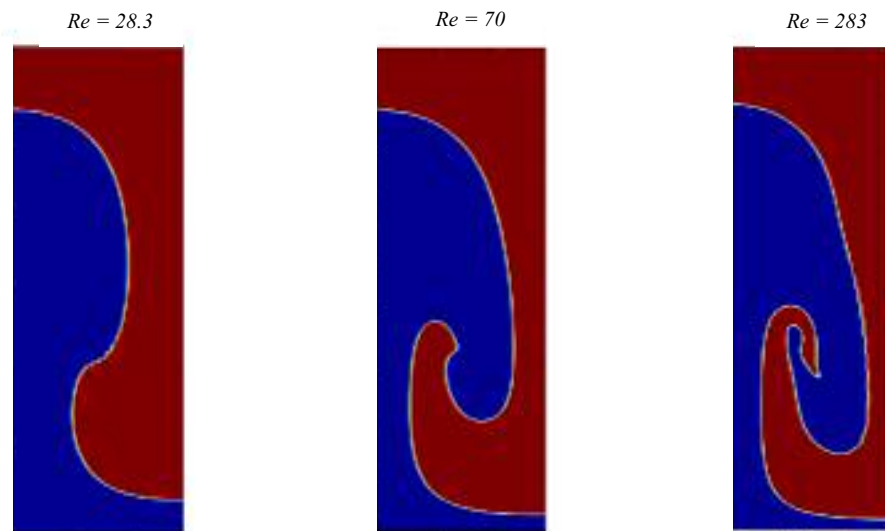


شکل ۱- مشخصات مساله ناپایداری رایلی - تیلور

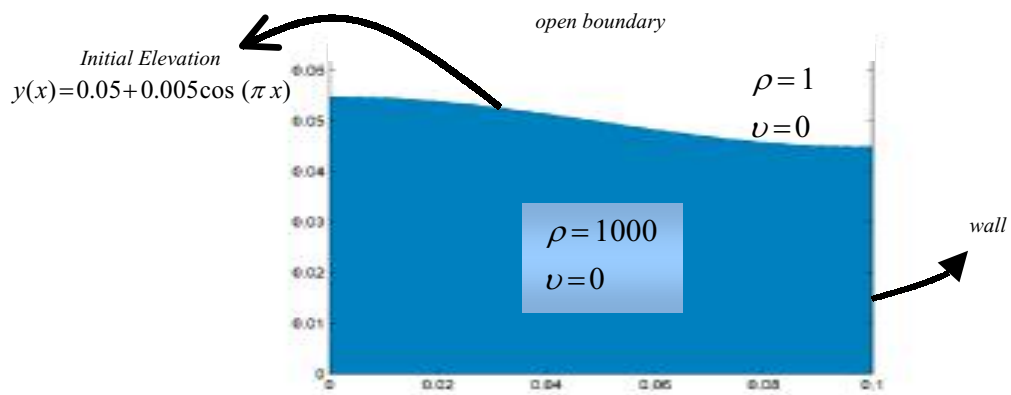


شکل ۲- مقایسه نتایج





شکل ۳- اثر افزایش عدد رینولدز در نحوه جابجایی دو سیال



شکل ۴- هندسه مساله جابجایی مایع درون مخزن