اولین کنفرانس ملی تصادفات وسوانح جاده ای و ریلی
ایران- زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی –واحد زنجان، آذر 1388

تحلیل پاسخ دینامیکی دال خط با نگاهی به سیر ایمن قطار

مرتضی اسماعیلی[1] محمد فشارکی[2]

[1] استادیار، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران m_esmaeili@iust.ac.ir

[2]کارشناس ارشد مهندسی خطوط راه آهن

چکیده:

با افزایش بار محوری و میزان مسافر و بار، در سال های اخیر، استفاده از رویکردهای جدید در طراحی خطوط راه آهن الزامی می باشد. با توجه به حجم بالای عملیات نگهداری و زمان زیاد مسدودی و کیفیت پایین هندسه خط، در خطوط بالاستی، به نظر می رسد طراحی خطوط به شیوه کلاسیک، امکان رقابت راه آهن با سایر گزینه های حمل و نقل را محدود کرده است. با پیدایش قطارهای سریع السیر و خطوط ریلی درون شهری، نیاز به خطوط با حداقل نگهداری و مسدودی، بیش از پیش احساس شده است. این نیاز منجر به توسعه خطوط با دال بتنی[1] شده است. اگرچه این خطوط جوابگوی الزامات فنی و هندسی خط می باشند و میزان عملیات تعمیر و نگهداری را به صفر نزدیک نموده اند ولی هزینه بسیار بالای ساخت، توسعه آنها را با مشکل مواجه نموده است. بنابراین بهینه سازی طراحی این خطوط و انتخاب مناسب پارامترهای آن، به گونه ای که ضمن حفظ صلبیت و استحکام روسازی در برابر بارهای وارده، تغییر شکل های ایجادشده در خط را به حداقل رسانده و سیر ایمن قطار را تضمین نماید، از اهمیت زیادی برخوردار است. این مقاله با بررسی مقطع عرضی سیستم دال خط، به بررسی پارامترهای موثر بر ارتعاشات و تغییر مکان های ایجاد شده در خط، می پردازد. همچنین تاثیر فرکانس اعمال بار(سرعت قطار) در پاسخ سازه خط مورد بررسی قرار گرفته است. با مطالعه این پارامترها، محدوده مناسب هر یک، جهت ساخت یک سیستم دال خط ایمن، با بیشترین کارایی به دست می آید.

مقدمه:

در خطوط با دال بتنی، خرابی های هندسی و اجزاء خط و در نتیجه عملیات نگهداری و تعمیر متداول در خطوط بالاستی، کاهش چشمگیری پیدا نموده است. با این وجود، در صورت خرابی یا وقوع سانحه، هزینه های بسیار بالاتری به دنبال دارد. بنابراین بایستی در طراحی دال خط، به گونه ای عمل شود که در دوره عمر خود نیازمند کمترین نگهداری بخصوص در زیرسازی باشد. از طرف دیگر با توجه به اینکه ارتعاشات در دال خط نسبت به خط بالاستی افزایش می یابد، در طراحی این خطوط بایستی عامل ارتعاشات خط، به ویژه در سرعت های بالا مد نظر قرار گیرد. افزایش سرعت قطارها، که گاهی از سرعت انتشار امواج در خاک نیز بیشتر می گردد، ارتعاشات و نیروهای دینامیکی وارده بر خط را به شدت افزایش می دهد به گونه ای که سیر ایمن قطار ممکن نمی باشد. برای نمونه می توان به چنین موردی در سال 1997در سوئد اشاره کرد که سبب ایجاد تغییر مکان های قائم بسیار زیاد در خط گردید که تقلیل سرعت قطار سریع السیر X2000 منجر شد. [1] بنابراین لازم است به منظور طراحی ایمن دال خط، عواملی نظیر سرعت قطار، ضخامت دال و سختی و میرایی خاک اجزاء خز بررسی گردد. با توجه به اینکه مساله تحلیل دینامیکی خط راه آهن، مساله ای پیچیده و دارای درجات آزادی زیاد است. و شامل اندرکنش اجزاء مختلف روسازی و

[1] Slab Track

Archive of SID
www.SID.ir

زیرسازی و همچنین اندرکنش وسیله نقلیه ریلی و سازه خط می باشد بنابراین در حال حاضر، حل تحلیلی دقیق، برای سیستم راه آهن وجود ندارد. حل تقریبی را می توان از ایده آل سازی بعضی شرایط به دست آورد. این ساده سازی ها معمولا شامل ساده سازی هندسه مدل پیچیده مساله، ساده سازی در رفتار مصالح خط و مصالح خاک و همچنین ساده سازی بار اعمالی از سوی قطار می باشد. با این حال بنا به هدف طراحی، می توان جواب های قابل قبولی از این سیستم ها اخذ نمود.

برای تحلیل رفتار دال بتنی در خط ریلی از روش های تحلیلی و عددی متعددی استفاده شده است. معمولا دال بتنی توسط تیر مدلسازی می شود. با توجه به اینکه ریل نیز به صورت تیر مدل می شود، این مدل ها، دو تیری[1] خوانده می شوند. تحلیل دقیق ارتعاشات مدل های دارای دو تیر، تحت شرایط مختلف ارائه شده است. برای مثال Dublin and Friedrich(1956) حل ارتعاشات اجباری دو تیر اولر-برنولی که به صورت گسسته توسط فنر- میراگر به یکدیگر متصل شده اندرا ارائه نمودند. Rao(1974) با در نظر گرفتن تاثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل های برشی، پاسخ مساله فوق را برای تیر تیموشنکو ارائه کرد. Vu,Ordonez and Karnopp(1999) با فرض صلبیت خمشی برابر برای تیرها، مساله فوق را به حل معادلات مستقل[2] تبدیل نمودند.[2]

در مقاله حاضر، دال خط، با اتصال مستقیم ریل و دال[3]، مدلسازی شده است. با توجه به هندسه مساله، می توان از رویکردی ساده تر جهت شبیه سازی پاسخ خط، به بارهای سیکلیک قطار استفاده کرد. در این مقاله، مقطع عرضی خط مدلسازی شده است و خط ریلی به صورت یک سیستم دو درجه آزادی، تحت بار دینامیکی قطار در نظر گرفته می شود. در حالت کلی مجموعه وسیله نقلیه ریلی و خط راه آهن به صورت مجموعه ای از جرم-فنر - میراگر شبیه سازی می شود. در نتیجه برای مجموعه قطار و خط می توان معادلات دیفرانسیل جداگانه تشکیل داده و در نهایت با ترکیب این معادلات، معادله کلی حاکم بر سیستم را حل نمود. [3] از آنجا که در این مقاله، تنها اجزاء موجود در خط و تاثیر آنها در ارتعاش مدنظر است، تنها معادلات حرکت اجزاء تشکیل دهنده خط راه آهن بررسی می شود.

3-2-1- معادلات حاکم بر سیستم

معادله حرکت دستگاه چند درجه آزادی با میرایی عبارت است از:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (1)$$

که در آن $[m]$، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس های جرم، میرایی و سختی می باشند. از آنجا که سیستم مورد نظر گسسته می باشد، لذا ماتریس جرم قطری است. نیروی دینامیکی قطار تنها بر ریل (جرم اول) وارد می شود و نیروی خارجی بر سایر جرم ها اعمال نمی شود. ضریب سختی Kij (ضریب میرایی Cij) نیروی متناظر با درجه آزادی i به ازای تغییر مکان واحد (سرعت واحد) در درجه آزادی j وقتی تغییر مکان (سرعت) در سایر درجات آزادی برابر صفر باشد تعریف می شود. بنابراین بسط یافته معادله(1) را می توان به صورت معادله (2) در نظر گرفت.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & (c_1+c_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1+k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن m2،m1 به ترتیب جرم ریل و دال می باشد. c1، c2، مقادیر میرایی پد زیر ریل و خاک بستر بوده و k2،k1 به ترتیب معرف سختی لایه های پد و بستر است.

شکل (1) نمایی از سستم دال خط، و مدل شبیه سازی شده در این مقاله را نشان می دهد.

---

1 *Double-beam*
2 *Uncoupled Equation*
3 *Direct fixation slab track*

Archive of SID

www.SID.ir

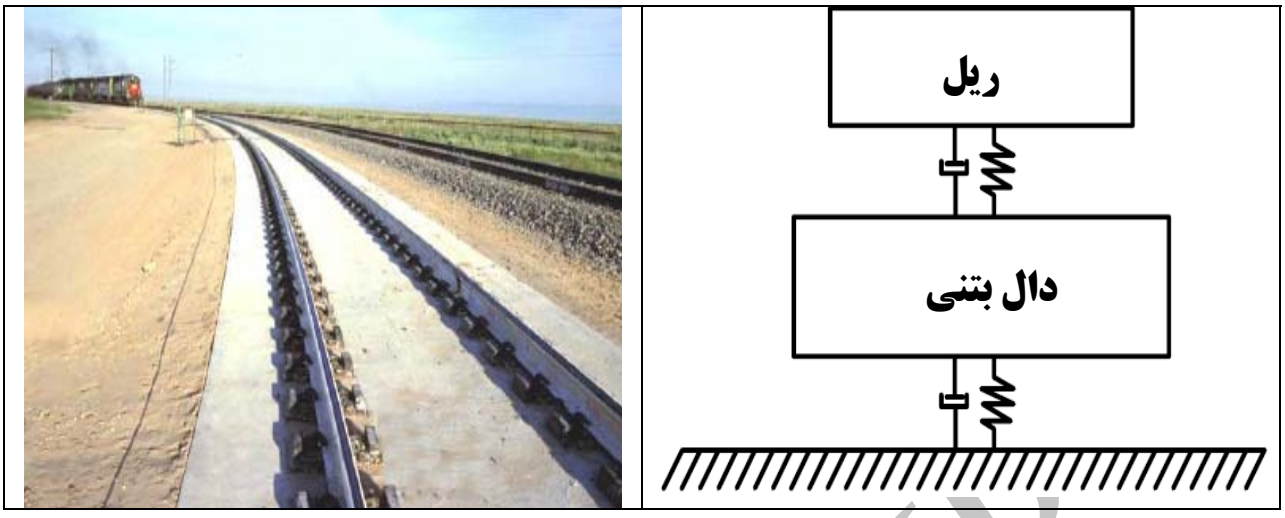
مشخصات بارگذاری ناشی از حرکت قطار

در شرایط واقعی، بار قطار از طریق سطح تماس چرخ و ریل بر خط اعمال می گردد. در این راستا استفاده از تئوری هرتز[1] امکان تعریف بارگذاری بصورت سطوح گسسته را در محل هر چرخ فراهم می آورد. [4] با توجه به عدم همگرائی حل مدل تحلیلی در شرایط استفاده از بار ضربه ای تولید شده، معمولا از شکل هارمونیک بار که توسط تبدیل فوریه قابل استخراج می باشد استفاده میگردد. این مساله باعث می شود که امکان انتخاب گام های زمانی بسیار کوچک و بالا بردن دقت حل و یا گام زمانی بزرگ و کاهش زمان حل فراهم گردد. مهمترین گام در تعریف بارگذاری هارمونیک، تعیین فرکانس مناسب بار است. به عبارت دیگر صحت بارگذاری توسط فرکانس آن، که نشان دهنده سرعت بارگذاری است، کنترل می شود. در تحقیق حاضر، برای تعیین فرکانس غالب، از تبدیل سریع فوریه[2] استفاده شده است. تبدیل سریع فوریه یک روند محاسباتی مناسب و موثر برای روش تبدیل انفصالی فوریه است. با استفاده از تبدیل فوریه می توان حل مساله با بارگذاری غیرتناوبی را از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل نمود. در نتیجه با در نظر گرفتن فرکانس های غالب، بارگذاری ساده شده مساله نیز و ساده تر حل می شود.

[1] *Hertz Theory*
[2] *Fast Fourier Transform*

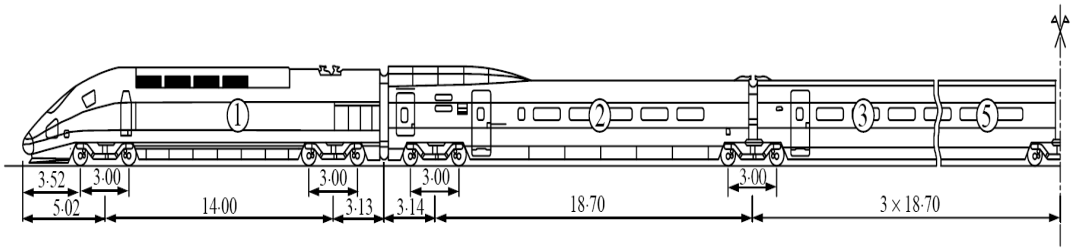
Archive of SID

www.SID.ir



شکل (1) : دال خط و مدل استفاده شده در مقاله

بارگذاری حاصل از عبور قطار، پیچیده و دارای فرکانس های متعدی است. بطور نمونه، شکل (2) نمایی از قطار سریع السیر Thalys و فاصله بین محورهای آن را نشان می دهد. شکل (3-الف) ، تغییر شکل ایجاد شده در ریل (جرم یک) و طیف تغییر شکل مربوط به آن را در شرایط حرکت قطار با سرعت 200 کیلومتر بر ساعت، نشان می دهد.



شکل(2) شکل شماتیک قطار سریع السیر Thalys

با توجه به شکل (3-الف) می توان فرکانس های غالب ناشی از عبور قطار فوق را تعیین کرد. با گرفتن تبدیل سریع فوریه مطابق شکل (3-ب)، فرکانس اصلی سیستم بارگذاری قطار، حدود 2.85 هرتز به دست می آید که بسیار نزدیک به فرکانس عبور بوژی[1] واگن ها یا 2.97 است. فرکانس اصلی دیگر 17.3 هرتز می باشد که معادل فرکانس عبور محور یا 18.5 هرتز است. فرکانس عبور بوژی و محور، در نتایج اندازه گیری های میدانی نیز به دست آمده است. برای مثال Degrande [5] و Galvin and Dominguez [6] فرکانس عبور بوژی و فرکانس عبور محورها را به عنوان فرکانس های اصلی سیستم در اندازه گیری های میدانی انجام شده به دست آورده اند. این نتایج در سایر اندازه گیری های میدانی انجام شده نیز، تائید شده است.

بنابراین در ادامه برای توسعه و حل معادلات حاکم بر سیستم جرم-فنر-میراگر از رابطه هارمونیک ایده آل زیر استفاده می شود که با به کار بردن آن، نیرویی مثبت و با فرکانس عبور بوژی بر سیستم، خط اعمال می شود.

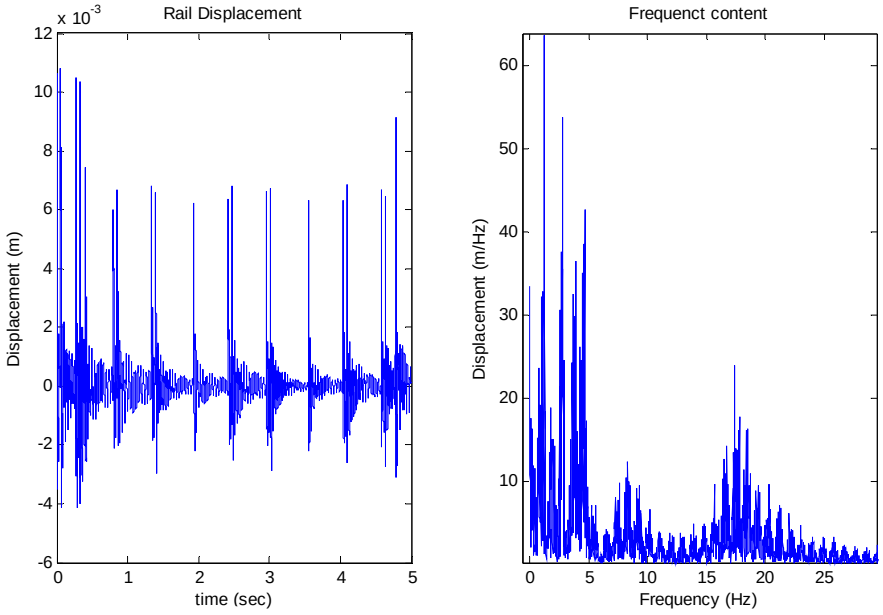
$$F = P(1 - \cos 2\pi f t) \qquad (3)$$

در رابطه فوق P، 1/4بار محوری ، f ، فرکانس اعمال بار (معادل فرکانس عبور بوژی) و t زمان می باشد. در حل معادلات

[1] Bogie Passage Frequency

www.SID.ir

این فرکانس برای انواع قطارهای باری، مسافری و سریع السیر در سرعت های مختلف محاسبه و مورد استفاده قرار گرفته است.



(الف) (ب)

شکل(3- الف) تغییر شکل های ایجاد شده در ریل و (3- ب) طیف تغییر شکل ریل

انتخاب پارامتر های جرم- سختی- میرائی خط برای تحلیل دینامیکی

با نگاهی به ادبیات فنی ارتعاش در خط ریلی، در انواع مدل های تحلیلی خط، محدوده مختلفی برای پارامترهای میرایی و سختی اجزاء، ارائه شده است. محققین متعددی با در نظر گرفتن تعداد جرم های متفاوت در مدل سازی خط راه آهن، این مقادیر را ارائه نموده اند. از آن جمله می توان به مدل های ارائه شده توسط Grassie al et [7] Zai el al [8] ، Sun and Dhanasekar [9] و Ishida and Suzuki [10] که در آنها خط ریلی با تعداد جرم های متفاوت مدل شده است، اشاره کرد. محدوده پارامترهای میرایی و سختی پد از مراجع فوق استخراج شده است. همچنین مشخصات ژئو تکنیکی مصالح بستر، در مراجع مختلف ذکر شده است. برای مثال مشخصات مدل ارائه شده توسط Choudhury et al، [11] اشاره کرد. در این مقاله، سیستم دال خط، متکی بر مصالح خاکی با سختی و میرایی متفاوت، مدلسازی شده است. جدول (1) و (2) پارامترها و محدوده مقادیر مورد استفاده در تحلیل دینامیکی خط، در بخش بعد را نشان می دهد.

در این حالت با معلوم شدن مقادیر جرم، سختی و میرایی، از یک طرف و از طرف دیگر، شرایط بار هارمونیک قابل اعمال بر خط، امکان حل معادلات حاکم بر ارتعاش خط، فراهم می گردد. نتایج حل، برای شرایط مختلف حاکم بر جرم، سختی و میرایی اجزاء، در قالب انجام تحلیل حساسیت، توسط برنامه MATLAB، در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

Archive of

www.SID.ir

جدول (1) مشخصات مصالح مختلف بستر خط

علامت اختصاری	پارامتر	مقدار	واحد
M_r	جرم واحد طول ریل	60	Kg/m
d	ضخامت دال	0.15-0.45	m
K_p	سختی ریل پد	60-240	MN/m
C_p	میرایی ریل پد	30-250	KNs/m

جدول (2) مشخصات خاک بستر

نوع خاک بستر	E (MPa)	K(MN/m)	C(MN.sec/m)	υ
ماسه متراکم یکنواخت	51.50	9.81	0.336	0.4
ماسه سست یکنواخت	18	2.15	0.171	0.3
رس سخت	10	1.43	0.14	0.35
رس نرم	2.5	0.84	0.065	0.45

نتایج به دست آمده از تحلیل خط:

با توجه به مقادیر جرم، سختی و میرایی به دست آمده از بخش قبل، می توان معادلات دیفرانسیل خط را حل نمود. با حل این معادلات و انجام تحلیل پارامتری روی مقادیر بیان شده، تاثیر هر یک بر سیستم دال خط، تعیین می گردد. با در دست داشتن این نتایج، می توان پارامترهایی چون ضخامت دال و نوع خاک بستر را با دقت بیشتری انتخاب کرد. در کلیه تحلیل های صورت گرفته، بار محوری قطار 15 تن می باشد. همچنین فرکانس اعمال بار، 2 هرتز، فرض می شود مگر آنکه به صورت صریح به مقدار آن اشاره شده باشد.

1- تاثیر مصالح بستر خط در تغییر مکان و سرعت ارتعاش دال خط:

همانطور که اشاره شد، سیستم دال خط، در چهار حالت قرارگیری بر روی خاک ماسه متراکم یکنواخت، ماسه سست یکنواخت، رس سخت و رس نرم مدلسازی شده است. بستر خط موجود با هر یک از انواع مصالح فوق، دارای مقادیر متفاوت سختی و میرایی است. شکل (4) تاریخچه تغییر مکان و سرعت ریل و دال برای رس نرم را نشان می دهد. شکل (5) تاثیر نوع بستر بر تغییر مکان قائم ریل را نشان می دهد. لازم به ذکر است که در تحلیل های صورت گرفته مقادیر میرایی و سختی پد، برابر مقدار متوسط جدول (1)، انتخاب شده است. همانطور که از شکل (5) مشخص است افزایش سختی و میرایی خاک بستر به شدت از

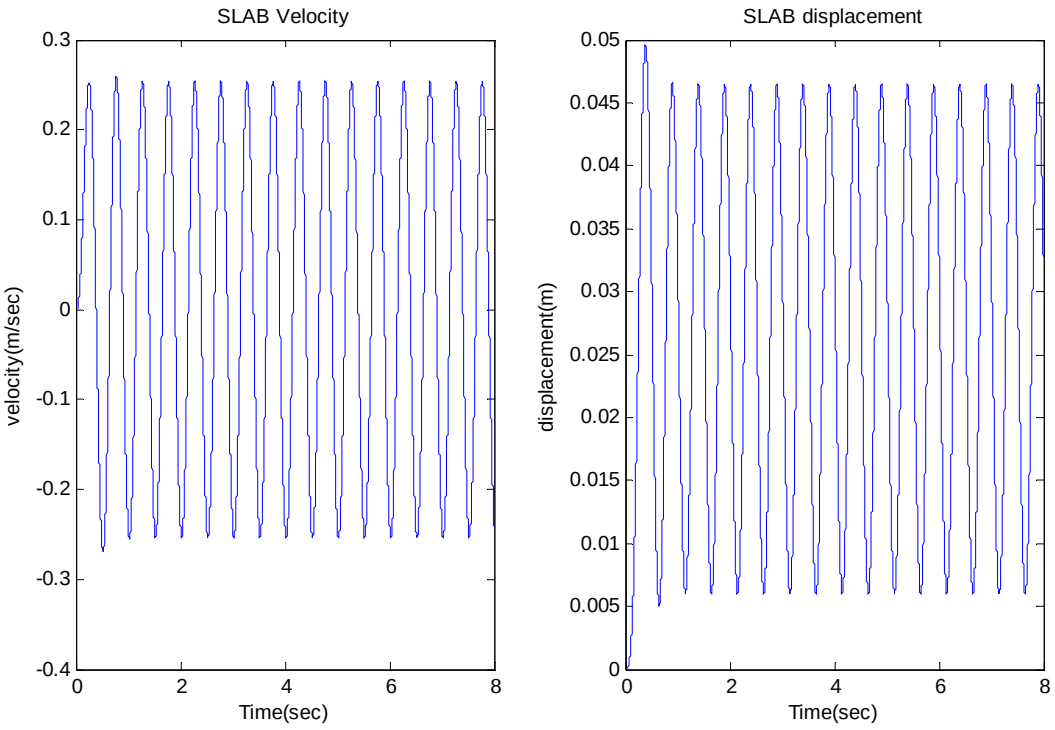
Archive of SID

www.SID.ir

تغییر مکان ریل دال می کاهد. به طوری که افزایش سختی و میرایی خاک بستر، سبب کاهش تغییر مکان هاای ریل از حدود 9 سانتیمتر به کمتر از 1 سانتیمتر می شود. همین نتایج را می توان در برای دال به دست آورد. شکل (6) سرعت ارتعاشی دال، را برای بسترهای مختلف، نشان می دهد. بنابراین در بین مصالح مورد استفاده در این تحلیل، ماسه متراکم کمترین ارتعاش و جابجائی را نشان می دهد. همچنین نتایج به دست آمده نشان می دهد که مصالح رسی بیشترین ارتعاش و تغییر مکان را داشته و جهت ساخت خطوط دال خط، مناسب نمی باشند.

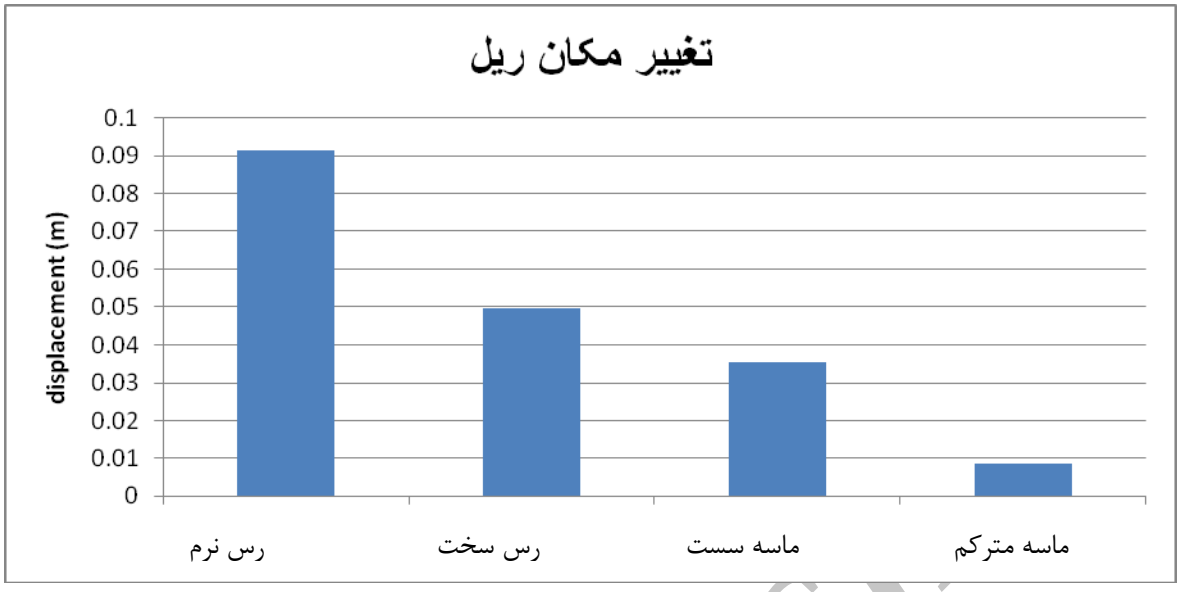
افزایش ضخامت دال، معادل افزایش جرم خط، و در نتیجه کاهش ارتعاشات خط است. جدول (4) اثر تغییر در ضخامت دال را در تغییر مکان قائم ریل و دال و همچنین سرعت ارتعاشی ریل و دال نشان می دهد. با توجه به این جدول، افزایش ضخامت دال از 15 به 45 سانتیمتر، سبب کاهش تغییر مکان و سرعت ریل و دال می گردد.همچنین روند تغییرات مشاهده در ریل و دال تقریبا مشابه یکدیگر است. با این وجود تغییر ایجاد شده در تغییر مکان قائم و سرعت ریل و دال، بخصوص برای ضخامت های کمتر از 10 سانتیمتر بسیار ناچیز است. بنابراین اغلب در انتخاب ضخامت دال ملاحظات اقتصادی مد نظر قرار می گیرد.

3- تاثیر ضخامت دال بر ارتعاشات خط:

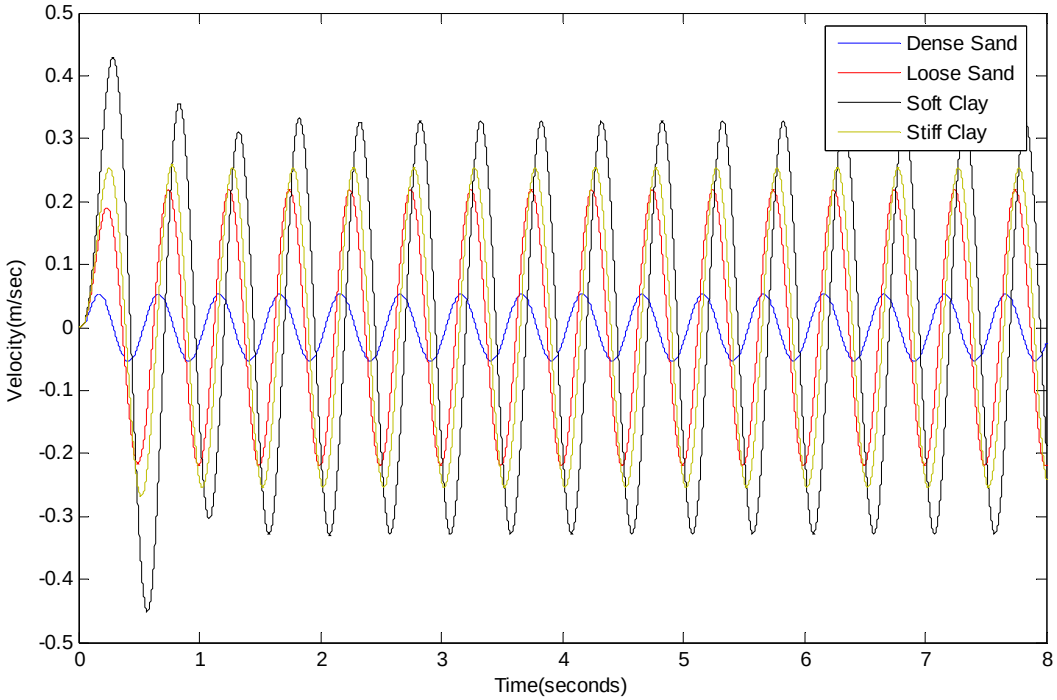


شکل (4) : تاریخچه تغییر مکان و سرعت ریل و دال برای رس نرم

www.SID.ir



شکل (5) تاثیر نوع بستر بر تغییر مکان قائم ریل



شکل (6) تاثیر بستر خط بر ارتعاش دال

www.SID.ir

جدول (4) تاثیر ضخامت دال بر سرعت و تغییر مکان ریل و دال (رس نرم)

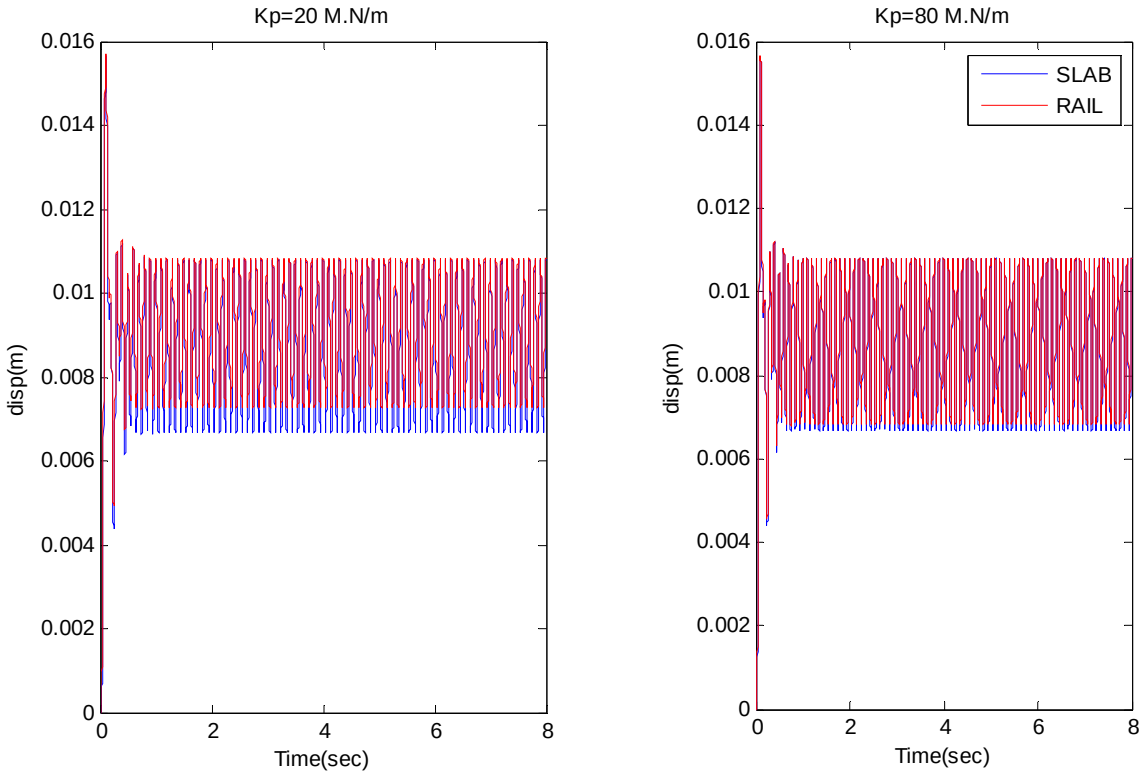
ضخامت دال (m)	جرم دال (Kg)	تغییر مکان		سرعت	
		ریل (cm)	دال (cm)	ریل (m/sec)	دال (m/sec)
0.15	6048	9.264	9.237	0.568	0.568
0.20	8064	9.311	9.290	0.514	0.515
0.25	10080	9.266	9.250	0.447	0.448
0.30	12096	9.168	9.156	0.428	0.429
0.35	14112	9.039	9.030	0.410	0.411
0.40	16128	8.893	8.887	0.392	0.394
0.45	18144	8.740	8.736	0.376	0.378

3- تاثیر سختی پد:

به منظور بررسی تاثیر سختی پد بر پاسخ سیستم دال خط،بر مقادیر سختی پد تحلیل حساسیت انجام شده است. شکل (8) تغییر مکان ریل و دال، تحت تاثیر با محوری 15 تن قطار سریع السیرThalys ، را نشان می دهد. خط بر روی خاک تشکیل شده از ماسه متراکم ساخته شده است. همانطور که از شکل مشخص می باشد، افزایش سختی پد از 20 به 80 مگا نیوتن بر متر، تاثیر محسوسی بر تغییر مکان های دال ندارد. با این وجود افزایش سختی پد، باعث افزایش تغییر مکان ریل می شود. به عبارت دیگر هر چه سختی پد بیشتر شود، تغییر مکان ریل به سمت تغییر مکان دال میل می کند.

Archive of SID

www.SID.ir



شکل (7) تاثیر سختی پد بر تغییر مکان ریل و دال

4- تاثیر میرایی پد:

به منظور تعیین میزان تاثیر میرایی ریل پد، در ارتعاشات ایجاد شده در خط با دال بتنی، مقدار میرایی پد در محدوده مشخص شده در جدول1، بین مقادیرحداقل و حداکثر، تغییر داده می شود. برای رس نرم حداکثر کاهش ارتعاش مشاهده شده در دال، اثر تغییر میرایی پد، معادل با 0.01 درصد می باشد. با افزایش سختی و میرایی بستر، سهم میرایی پد در کاهش ارتعاشات کمی افزایش می یابد و در ماسه متراکم به 0.5 درصد می رسد. با توجه به مقادیر به دست آمده، میرایی پد تاثیری بر پاسخ سیستم دال خط بر بارهای وارده از طرف قطار ندارد.

نتیجه گیری:

1- نوع مصالح بستر عامل بسیار مهمی در ارتعاشات دال خط است. افزایش سختی و میرایی خاک بستر به شدت از تغییر مکان و ارتعاش دال می کاهد. به طوری که جایگزین کردن ماسه متراکم به جای رس نرم، سبب کاهش 92 درصدی در تغییر مکان قائم دال و کاهش 87 درصدی در سرعت ارتعاشی آن می شود. بنابراین در بین مصالح مورد استفاده در این تحلیل، ماسه متراکم کمترین ارتعاش و جابجائی را نشان می دهد. همچنین نتایج به دست آمده نشان می دهد که مصالح رسی بیشترین ارتعاش و تغییر مکان را داشته و جهت ساخت خطوط دال خط مناسب نمی باشند و سیر ایمن قطار در خط را با مشکل مواجه می کنند. در بین عوامل بررسی شده در این مقاله، سختی بستر

Archive of SID

www.SID.ir

بیشترین تاثیر را در پاسخ سیستم دال خط به بارهـای دینامیکی قطار نشان می دهد.

2- افزایش ضخامت دال، معادل افزایش جرم خط، و در نتیجه کاهش ارتعاشات خط است.. با توجه به نتایج ارائه شده، افزایش ضخامت دال از 15 به 40 سانتیمتر، سبب کاهش تغییر مکان و سرعت ریل و دال می گردد. همچنین روند تغییرات مشاهده در ریل و دال تقریبا مشابه یکدیگر است.

3- افزایش سختی پد، تاثیر محسوسی بر تغییر مکان های دال ندارد. با این وجود افزایش سختی پد، باعث افزایش تغییر مکان ریل می شود. به عبارت دیگر هر چه سختی پد بیشتر شود، تغییر مکان ریل به تغییر مکان دال نزدیک تر می شود.

4- با توجه به تحلیل حساسیت صورت گرفته بر روی میرایی پد، تاثیر این پارامتر بر ارتعاشات خط، بسیار محدود می باشد.

مراجع:

[1] C.Madshus, and A.M.Kaynia "High-Speed Trains on Soft Ground: Track-Embankment-Soil Response and Vibration Generation.in Noise and Vibration From High-Speed Trains", edited by V.V. Krylov, Thomas Telford, London, pp. 315-344, 2001

[2] H.V.Vu,A.M.Ordonez and B.H. Karnopp," VIBRATION OF A DOUBLE-BEAM SYSTEM", Journal of Sound and Vibration ,pp.807-822, 1999

[3] P Lou1, X-G Zhong, J-F Tang, and Q-Y Zeng, " Finite-element analysis of discretely supported rail subjected to multiple moving concentrated forces" Journal of rail and rapid transit, pp.305-315, 2006

[4] Coenraad Eaveld, " Modern Railway Track", 2nd Edition, MRT Productions, 2001

[5] G.Degrande "Free-field vibrations during the passage of a high-speed train: experimental results and numerical predictions,. in Noise and Vibration from High-Speed Trains", edited by V.V. Krylov, Thomas Telford, London, pp. 285-314, 2001.

[6] P.Galvı´n, J.Domı´nguez, " Experimental and numerical analyses of vibrations induced by high-speed trains on the Co´rdoba–Ma´laga line", journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, pp.641–657, 2008

[7] S.L Grassie , R.w.Gregory and K.L Johnson."The dynamic response of railway track to high frequency lateral excitation" Journal Mechanical engineering Science ,1982

[8] Zhai, W.M., Wang, K.Y., Lin, J.H., "Modeling and experiment of railway ballast vibrations" Journal of sound and vibration, 270, pp.673-683,2004

[9] Y.Q.Sun,M.Dhanasekar, "A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system" International Journal of Solids and Structures, 39, 2002

[10]- Ishida, M., Suzuki, T., "Effect on track settlement of interaction excited by leading and trailing axles" QR of RTRI, Vol. 64, No. 1, Feb. 2005

[11] D.Choudbury, R.K.Bharti, S.Chauhan, and B.Indraratna," Response of Multilayer Foundation System Beneath Railway Track under Cyclic Loading" Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, pp. 1558-1563, 2008

Archive of SID

www.SID.ir