هفتمین کنفرانس بین المللی انجمن رمز ایران

۲۴ و ۲۵ شهریورماه ۱۳۸۹، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

انجمن رمزایران

ویژگی‌های جبری جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t

سید مجتبی دهنوی[۱]، علیرضا رحیمی‌پور[۲]

دانشگاه تربیت معلم [۱]

Dehnavism@tmu.ac.ir

[۲] Alirezarahimipour@yahoo.com

چکیده

جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t، یکی از عملگرهای پرکاربرد در رمزنگاری متقارن است و بررسی خواص این عملگر، نقش مهمی در طراحی و تحلیل رمزها ایفا می‌کند. از آنجا که تحلیل جبری این عملگر برای $r = 2^n$ عملوند، در مقاله‌ای به تألیف مؤلفان همین مقاله، در ششمین کنفرانس رمز ایران انجام شده است، در این مقاله با استفاده از نتایج پژوهش‌های پیشین، به بررسی جبری جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t پرداخته، درجات توابع بولی مؤلفه‌ای این عملگر را (به عنوان یک نگاشت بولی) در حالت کلی، به دست می‌آوریم. همچنین به عنوان یک کاربرد، درجه‌ی توابع مؤلفه‌ای مذکور را برای یکی از پرکاربردترین حالات، یعنی تبدیل‌های PHT به کار رفته در رمزهای قالبی و دنباله‌ای به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی

جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t، توابع بولی، فرم نرمال جبری، درجه‌ی جبری.

۱- مقدمه

یکی از عملگرهایی که تاکنون بیشترین کاربرد را در رمزنگاری متقارن داشته، جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t می‌باشد که در آن، t عددی صحیح و مثبت و معمولاً برابر اندازه‌ی پردازنده‌های نوعی - یعنی ۸، ۱۶، ۳۲ و یا ۶۴ - است. به عنوان مثال، این عملگر در رمزهای بلوکی Twofish[2] و RC6[3] و رمز دنباله‌ای RC4[4] به کار رفته است. در [5]، ویژگی‌های جبری جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t با دو عملوند مورد بررسی قرار گرفته و ANF[۱] توابع بولی مؤلفه‌ای آن، به طور صریح به دست آمده است. برای بسیاری از کاربردها در طراحی و ارزیابی رمزهای متقارن، دانستن درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای، اهمیت شایانی دارد. در [1]، روابطی صریح برای درجه‌ی جبری توابع بولی مؤلفه‌ای جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t با r عملوند، در حالتی که r توانی از ۲ است را به دست آورده‌ایم. در این مقاله، درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای را برای جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t، در حالت کلی، به دست می‌آوریم.

یکی از کاربردهای مهم جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t، عبارت است از تبدیلات PHT[۲] که در برخی رمزهای قالبی و دنباله‌ای استفاده شده است. ما، درجات توابع بولی مؤلفه‌ای این تبدیلات را نیز - که از یک منظر - تعمیمی از عملگر جمع پیمانه‌ای است، به عنوان کاربردی از نتایج حاصله، محاسبه می‌کنیم.

در بخش ۲ به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم. بخش ۳ به مرور و بیان نتایج به دست آمده در [1] اختصاص دارد. بخش ۴ شامل قضایا و نتایج اصلی می‌باشد. در بخش ۵، کاربردی از نتایج به دست آمده روی تبدیلات PHT ارایه می‌گردد و در پایان در بخش ۶، به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

[1] **A**lgebraic **N**ormal **F**orm

[2] **P**seudo-**H**adamard **T**ransform

۲-تعاریف و قضایای مقدماتی!

فرض کنیم F_2 میدان متناهی با دو عضو باشد؛ دراین صورت، هر عضو $F_2{}^t$ (حاصل ضرب دکارتی t نسخه از F_2) را می‌توان به صورت یک بردار در نظر گرفت که ما آن را با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف $F_2{}^t$، یک تناظر یک‌به‌یک بین $F_2{}^t$ و Z_{2^t}، حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی 2^t، برقرار است که به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\varphi : F_2{}^t \to Z_{2^t}$$
$$\bar{x} = (x_{t-1},...,x_0) \mapsto \varphi(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{t-1} x_i 2^i \qquad (1)$$

در نمایش بالا، x_i را مؤلفه‌ی مکان $(i+1)$ - ام $\bar{x}$ یا x می‌نامیم.

حال، ترتیب جزیی $\preceq$ را روی $F_2{}^t$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} \preceq \bar{a} \iff x_i \le a_i,\ 0 \le i < t \qquad (2)$$

در نمایش بالا اگر

$$\bar{x} = (x_{t-1},...,x_0) \text{ و } u = \sum_{i=0}^{t-1} u_i 2^i \equiv (u_{t-1},...,u_0) \qquad (3)$$

آنگاه $\bar{x}^u$ به صورت $\bar{x}^u = {x_0}^{u_0}...{x_{t-1}}^{u_{t-1}}$ تعریف می‌شود.

هر تابع f به صورت $f : F_2{}^t \to F_2$ را یک تابع بولی[1] می‌نامند: فرض کنید $f(x)$ تابعی بولی باشد؛ f را می‌توان به شکلی یکتا که آن را فرم نرمال جبری (ANF) می‌نامیم، نشان داد. در واقع، داریم:

$$f(\bar{x}) = \bigoplus_{u \in Z_{2^t}} h_u \bar{x}^u,\ \ h_u \in F_2 \qquad (4)$$

که در آن ضرایب h_u به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$h_u = h(\bar{u}) = \bigoplus_{\bar{x} \preceq \bar{u}} f(\bar{x}) \qquad (5)$$

درجه‌ی جبری[2] تابع f، برابر با تعداد متغیرها در طولانی‌ترین جمله‌ی ANF یا به طور معادل، بیشترین وزن همینگ[3] $wt(\bar{u})$، در میان جملات با $h_u \neq 0$، تعریف می‌شود.

هر تابع $f : F_2{}^t \to F_2{}^m$، با $m > 1$، تابع بولی برداری[4] یا یک نگاشت بولی نامیده می‌شود. این تابع را می‌توان به وسیله‌ی بردار $(f_1, f_2, ..., f_m)$ بیان کرد که هر f_i، $1 \le i \le m$، یک تابع بولی $f_i : F_2{}^t \to F_2$ است: به این توابع، تابع‌های مؤلفه‌ای[5] می‌گوییم.

می‌توان ثابت کرد که معادل بولی جمع $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در Z_{2^t}، یعنی $\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} \bmod 2^t$، به عنوان یک نگاشت بولی، به صورت ذیل است:

$$\begin{aligned} &r_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus c_0,\ \ c_0 = 0 \\ &r_i = x_i \oplus y_i \oplus c_i,\ \ c_i = x_{i-1}y_{i-1} \oplus x_{i-1}c_{i-1} \oplus y_{i-1}c_{i-1} \end{aligned} \qquad (6)$$

قضیه۲-۱ : فرض کنیم ANF تابع بولی $f : F_2{}^t \to F_2$ یک تک‌جمله‌ای $\bar{x}^u$ با $u \in Z_{2^t}$ باشد؛ در این صورت، ANF تابع $f(\bar{x}+\bar{y})$ به صورت زیر است:

$$f(\bar{x}+\bar{y}) = \bigoplus_{c=0}^{u} \bar{x}^{(u-c)}\, \bar{y}^c \qquad (7)$$

که در اینجا، تفاضل $u - c$ در Z_{2^t} محاسبه می‌شود.

برهان: [5].

قضیه۲-۲ : اگر تابع f به شکل تعریف شده در قضیه‌ی ۲-۱ باشد، آنگاه ANF تابع $f(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + ... + \bar{y}_r)$، به صورت ذیل است:

$$f(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + ... + \bar{y}_r) = \bigoplus_{\substack{k_1,...k_r \ge 0 \\ k_1+...+k_r = u}} \bar{y}_1^{k_1} ... \bar{y}_r^{k_r} \qquad (8)$$

برهان: [1,5].

به کمک قضیه‌ی ۲-۲، درجه‌ی توابع بولی مؤلفه‌ای جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t را می‌توان به این روش به دست آورد: اولاً، اگر به ازای $q = 2^0, 2^1, ..., 2^{t-1}$ که در اینجا t برابر اندازه‌ی پردازنده است، قرار دهیم $f(\bar{x}) = \bar{x}^q$، در این صورت، با به دست آوردن درجه‌ی توابع مذکور، در واقع درجه‌ی توابع مؤلفه‌ای نگاشت بولی متناظر جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t، با r عملوند را به دست آورده‌ایم. ثانیاً، با توجه به رابطه‌ی (8)، درمی‌یابیم که همه‌ی جملات در مجموع سمت راست این رابطه متمایزند و لذا، اگر در بین مجموعه‌ی همه‌ی $\{k_1, k_1, ..., k_r\}$ ها، جوابی را بیابیم که در آن $\sum_{i=1}^{r} wt(k_i)$ بیشینه باشد، در واقع، درجه‌ی تابع مؤلفه‌ای متناظر را یافته‌ایم.

---

[1] Boolean Function
[2] Algebraic Degree
[3] Hamming Weight
[4] Vectorial Boolean Function = S-Box
[5] Component Function

۳- حالت $r = 2^n$!

فرض کنیم n , u و t سه عدد صحیح نامنفی باشند. رابطه‌ی (9) را در نظر بگیرید:

$$X_1 + X_2 + ... + X_{2^n} = 2^u \qquad (9)$$

که در آن X_i ها، $1 \le i \le 2^n$، عضو Z_{2^t} هستند و $u < t$ ؛ 0.

قضیه‌ی ذیل را داریم:

قضیه ۳-۱: برای $n < u$، وزن همینگ جواب‌های با وزن همینگ بیشینه برابر است با

$$\sum_{i=1}^{2^n} wt(X_i) = 2^n(u-n) + 2^{2n-u} \qquad n \ge u-n, \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} wt(X_i) = (2^n - 1)(u-n) + n + 1 \qquad n < u-n; \qquad (11)$$

و اگر $n \ge u$، وزن همینگ بیشینه برابر است با 2^n.

برهان: [1].

۴- حالت کلی

در این بخش با استفاده از الگوریتم بیان و اثبات شده در [1]، وزن همینگ جواب بهینه‌ی معادله‌ی $X_1 + X_2 + ... + X_n = 2^u$ را در حالت کلی برای n جمعوند به دست می‌آوریم: این جواب، در واقع برابر درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t در حالت کلی است.

$$f(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + ... + \bar{y}_n) = \bigoplus_{\substack{k_1,...k_n \ge 0 \\ k_1+...+k_n = 2^u}} \bar{y}_1^{k_1} ... \bar{y}_n^{k_n}. \qquad (12)$$

در اینجا، ANF تابع بولی $f : {F_2}^{nt} \to F_2$ ، یک تک‌جمله‌ای $\bar{x}^{2^u}$ با $2^u = 2^0, 2^1, ..., 2^{t-1}$، می‌باشد.

در معادله‌ی $X_1 + X_2 + ... + X_n = 2^u$ ، اگر $n > 2^u$ ، آنگاه تعدادی از X_i ها حتماً صفر هستند و معادله، تبدیل به معادله‌ای با شرط $n \le 2^u$ می‌شود: بنابراین در ادامه، همواره شرط $n \le 2^u$ را فرض می‌گیریم.

قضیه۴-۱: وزن جواب بهینه یا جواب با وزن بیشینه‌ی معادله‌ی $X_1 + X_2 + ... + X_n = 2^u$ برابر است با

$$nr + j - wt(X^*) \qquad (13)$$

که در اینجا،

$$r = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{2^u + n}{n} \right) \right\rfloor \qquad (14)$$

$$j = 2^{u-r} + \left\lfloor n 2^{-r} \right\rfloor - n + 1 \qquad (15)$$

$$X^* = \left\lfloor n 2^{-r} \right\rfloor 2^r - n + 2^r \qquad (16)$$

برهان: در ابتدا، الگوریتم ارائه شده در [1] را مرور می‌کنیم: در جدولی مشابه جدول شکل۱، از سطر پایین و سمت چپ شروع می‌کنیم و به ترتیب، جایگاه‌های بعدی را در سطر اول برابر 'I' قرار می‌دهیم و در صورت نیاز به سطر بالاتر می‌رویم. این روند را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا با افزایش یک 'I'، مجموع ارزش‌های جدول بیشتر از یا مساوی با 2^u شود. روشن است که بقیه‌ی درایه‌های جدول برابر '0' است؛ حال، اگرمجموع ارزش‌های جدول به طور اکید از 2^u بیشتر باشد، به طور معکوس، از سطر ماقبل پایانی شروع می‌کنیم و در صورت امکان پس از '0' کردن یک درایه، به سطر پایین‌تر می‌رویم؛ این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجموع برابر 2^u شود.

اکنون، با استفاده از مفاهیم مطروحه‌ی فوق و با توجه به الگوریتم مذکور در [1]، برای یافتن جواب بهینه، باید جدولی به صورت شکل۱ را تشکیل داد: در این جدول، با افزودن یک 'I' به سطر $r+1$ و ستون j - ام، مجموع ارزش‌های جدول، از مقدار 2^u بیشتر شده است.

چون ارزش هر 'I' در سطر i - ام برابر 2^{i-1} است، مقدار r از رابطه زیر به دست می آید:

$$n(2^r - 1) \le 2^u < n(2^{r+1} - 1) \qquad (17)$$

که با ساده کردن رابطه‌ی بالا، داریم:

$$r = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{2^u + n}{n} \right) \right\rfloor = \left\lfloor \log_2 (2^u + n) - \log_2 (n) \right\rfloor$$
$$= u + \left\lfloor \log_2 (1 + \frac{n}{2^u}) - \log_2 n \right\rfloor \qquad (18)$$

1	1	…	1	0	…	0	
1	1	…	1	1	…	1	← r
.	.	…	.	.	…	.	
.	.		.	.		.	
.	.		.	.		.	
1	1		1	1		1	
1	1	…	1	1	…	1	
X_1	X_2		X_j	X_{j+1}		X_n	

شکل۱

برای به دست آوردن مقدار j، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$n(2^r-1)+(j-1)2^r < 2^u \le n(2^r-1)+j2^r \qquad (15)$$

که پس از ساده کردن رابطه‌ی فوق، داریم:

$$j = 2^{u-r} + \left\lfloor n2^{-r} \right\rfloor - n + 1 \qquad (19)$$

چون درایه‌ی واقع در سطر $r+1$ و ستون j - ام، درایه‌ای است که با افزودن آن، مجموع مقادیر ارزش‌های جدول، از 2^u بیشتر می‌شود، پس بیشترین وزن، با کم کردن وزن مقدار اضافی از وزن کل جدول به دست می‌آید؛ این مقدار اضافی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X^* = (n(2^r-1)+j2^r)-2^u \qquad (20)$$

حال، با قرار دادن مقدار r و j در رابطه‌ی بالا، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$X^* = \left\lfloor n2^{-r} \right\rfloor 2^r - n + 2^r \qquad (21)$$

نتیجه ۴-۲: اگر برای معادله‌ی (9) داشته باشیم $2^r > n$، آنگاه وزن جواب بهینه‌ی معادله‌ی $X_1+X_2+\ldots+X_n = 2^{u+1}$، با افزودن $n-1$ واحد به وزن جواب بهینه‌ی معادله‌ی (9) به دست می‌آید.

برهان: با فرض $2^r > n$، چون همواره $2^u \ge 2^r$، با توجه به (18) و با استفاده از زیرنویس به جهت رفع ابهام، رابطه r_{u+1} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r_{u+1} &= (u+1)+\left\lfloor \log_2(1+\frac{n}{2^{u+1}}) - \log_2 n \right\rfloor \\ &= \left(u+\left\lfloor \log_2(1+\frac{n}{2^{u+1}}) - \log_2 n \right\rfloor \right)+1 = r_u+1 \end{aligned} \qquad (22)$$

همچنین مقدار j برای دو معادله تغییر نمی‌کند، زیرا

$$\begin{aligned} j_{u+1} &= \left\lfloor 2^{(u+1)-(r+1)} + n2^{-(r+1)} - n \right\rfloor + 1 \\ &= 2^{u-r} + \left\lfloor n2^{-(r+1)} \right\rfloor - n + 1 = j_u \end{aligned} \qquad (23)$$

با توجه به رابطه‌ی $2^r > n$، مقدار X^* برای معادله‌ی $X_1+X_2+\ldots+X_n = 2^u$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$X_u^* = 2^r - n \qquad (24)$$

از نتایج مقدار X^* برای معادله‌ی $X_1+X_2+\ldots+X_n = 2^{u+1}$ از رابطه‌ی ذیل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} X_{u+1}^* &= \left\lfloor n2^{-(r+1)} \right\rfloor 2^{r+1} - n + 2^{r+1} \\ &= 2^{r+1} - n = 2^r + 2^r - n \\ &= X_u^* + 2^r \end{aligned} \qquad (25)$$

که به وضوح، داریم:

$$wt(X_{u+1}^*) = wt(X_u^*) + 1 \qquad (26)$$

پس اگر وزن جواب بهینه برای معادله‌ی $X_1+X_2+\ldots+X_n = 2^u$ برابر w_u باشد، وزن جواب بهینه برای معادله‌ی $X_1+X_2+\ldots+X_n = 2^{u+1}$، برابر است با:

$$\begin{aligned} & n(r+1)+j-wt(X_{u+1}^*) \\ &= nr+n+j-wt(X_u^*)-1 \\ &= w_u+(n-1) \end{aligned} \qquad (27)$$

۵-کاربردی از قضیه‌ی اصلی!

تبدیلات PHT، یکی از تبدیلات کاربردی در رمزنگاری هستند که از عملگر جمع پیمانه‌ای استفاده می‌کنند. اگر ورودی‌های این تبدیل در حالت دو عملوند، (x,y) و خروجی‌های آن برابر (x',y') باشد، داریم:

$$(x',y') = (x+y, 2x+y) \qquad (28)$$

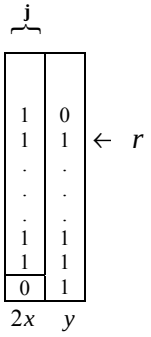
درجه‌ی جبری مؤلفه‌ی اول، در بخش قبلی به دست آمد. در ادامه، درجه‌ی جبری رابطه‌ی دوم را می‌یابیم: برای این منظور، از تابع f، تعریف شده توسط مؤلفه‌ی دوم در (28) استفاده می‌کنیم:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \bigoplus_{\substack{k,k'\ge 0 \\ k+k'=2^u}} (2\bar{x})^k \bar{y}^{k'} \qquad (29)$$

درجات جبری مؤلفه‌ای $2x+y$، به ازای $2^u = 2^0, 2^1, \ldots, 2^{t-1}$ به دست می‌آید. در رابطه‌ی بالا، با توجه به این که بیت کم ارزش $2x$ همواره برابر صفر است، برای به دست آوردن بیشترین درجه، لزوماً باید k عددی زوج باشد. پس برای این منظور، باید جوابی از رابطه‌ی زیر با بیشترین وزن را بیابیم:

$$k+k' = 2^u; \quad k,k' \ge 0,\ k \bmod 2 = 0 \qquad (30)$$

الگوریتم مطلوب را بر جدولی تغییر یافته به صورت شکل۲ اعمال می‌کنیم:



شکل۲

برای به دست آوردن r، داریم:

$$2(2^r-1)-1\le 2^u<2(2^{r+1}-1)-1 \qquad (31)$$

که پس از ساده کردن نامساوی فوق، به رابطه‌ی ذیل برای r دست می‌یابیم:

$$r=\lfloor \log_2(2^u+3)\rfloor-1 \qquad (32)$$

مقدار r برای تمامی حالت‌ها، بجز حالتی که $u=0,1$، به صورت زیر ساده می‌شود:

$$r=u+\left\lfloor \log_2(1+\frac{3}{2^u})\right\rfloor-1=u-1 \qquad (33)$$

مقدار j نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$2(2^r-1)+(j-1)2^r-1<2^u\le 2(2^r-1)+j2^r-1 \qquad (34)$$

و

$$j=2^{u-r}+\lfloor 3.2^{-r}\rfloor-1 \qquad (35)$$

برای تمامی حالت‌ها، بجز حالتی که $u=0,1$، چون $r=u-1$، داریم:

$$j=\lfloor 3.2^{-r}\rfloor+1 \qquad (36)$$

چون $r>0$، پس همواره $j=1,2$ و

$$\begin{aligned} X^* &= 2(2^r-1)-1+j2^r-2^u \\ &= (j+2)2^r-2^u-3 \end{aligned} \qquad (37)$$

برای حالتی که $u\neq 0,1$ و $j=1$، داریم: $X^*=2^{u-1}-3$ و $wt(X^*)=u-2$ و نیز برای $j=2$ داریم: $X^*=2^u-3$ و $wt(X^*)=u-1$.

پس وزن جواب بهینه برای این تبدیل، از رابطه‌ی ذیل محاسبه می‌شود:

$$2r-1-wt(X^*) \qquad (38)$$

که در حالات $u\neq 0,1$ داریم:

$$\begin{cases} 2r-u+1 & j=1 \\ 2r-u & j=2 \end{cases} \qquad (39)$$

به همین طریق، می‌توان درجه جبری تبدیلاتی به صورت $2^l x+y$ و یا $2^{l_1}x+2^{l_2}y$ را که تعمیمی از تبدیلات شبه آدامار هستند، به دست آورد. در ادامه، درجه‌ی جبری تبدیلات شبه آدامار به فرم

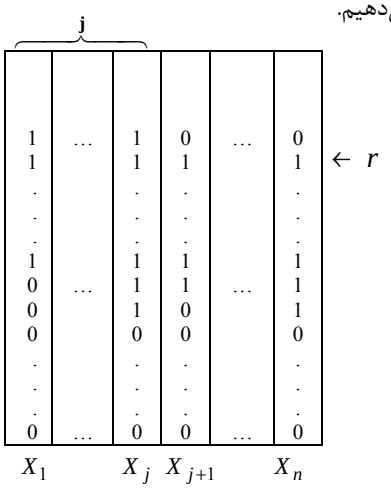
$$\sum_{i=1}^{n}2^{l_i}x_i \qquad (40)$$

را در حالت کلی می‌یابیم. (توجه داشته باشید که باید داشته باشیم $2^u\ge 2^{l_i}$؛ زیرا در غیر این صورت، متغیر X_i نمی‌تواند تأثیری داشته باشد.) برای یافتن درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای این تبدیل، با استفاده از تابع f مناسب، داریم:

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)=\bigoplus_{\substack{k_1,\ldots k_n\ge 0\\ k_1+\ldots+k_n=2^u}}(2^{l_1}\bar{x}_1)^{k_1}\ldots(2^{l_n}\bar{x}_n)^{k_n} \qquad (41)$$

بیشترین درجه، با یافتن جوابی از معادله $k_1+k_2+\ldots+k_n=2^u$ با بیشترین وزن و صادق در قیدهای $k_n>2^{l_n},\ldots,k_1>2^{l_1}$، به دست می‌آید؛ البته، قبل از یافتن درجه جبری، بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم که معادله ساده شده باشد: یعنی عوامل مشترک ضربی از دو طرف معادله حذف شده‌اند. در این قسمت نیز همواره فرض می‌کنیم $n\le 2^u$.

برای یافتن جواب بهینه، از الگوریتم [1]، با جدول تغییر یافته‌ی شکل۳ استفاده می‌کنیم. چون در تبدیل برداری $2^{l_i}X_i$، به تعداد l_i بیت با شروع از بیت کم ارزش برابر صفر است، در جدول، برای ستون متناظر با X_i از سطر پایین تا سطر l_i را برابر صفر قرار می‌دهیم.



شکل۳

حال، مقدار r از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} n(2^r-1)-\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i}-1) &\le 2^u \\ &< n(2^{r+1}-1)-\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i}-1) \end{aligned} \quad (42)$$

که پس از ساده کردن به تساوی زیر می‌رسیم:

$$r=\left\lfloor \log_2(2^u+\sum_{i=1}^{n}2^{l_i})-\log_2 n \right\rfloor \quad (43)$$

$$r=u+\left\lfloor \log_2(1+(\sum_{i=1}^{n}2^{l_i})/2^u)-\log_2 n \right\rfloor \quad (44)$$

چون همواره $n\le 2^u$، پس $u \ge \log_2 n$ و در نتیجه $r\ge 0$ است و زمانی که $\sum_{i=1}^{n}2^{l_i} > 2^u$، آنگاه $r=0$ می‌شود. برای محاسبه‌ی j به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n(2^r-1)-\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i}-1)+(j-1)2^r &< 2^u \\ &\le n(2^r-1)-\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i}-1)+j2^r \end{aligned} \quad (45)$$

پس از ساده کردن، داریم:

$$j=2^{u-r}+[(\sum_{i=1}^{n}2^{l_i})/2^r]-n+1 \quad (46)$$

و مقدار X^* نیز به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} X^* &= n(2^r-1)-\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i}-1)+j2^r-2^u \\ &= (j+n)2^r-\sum_{i=1}^{n}2^{l_i}-2^u \end{aligned} \quad (47)$$

و وزن جواب بهینه برابر است با

$$nr+j-wt(X^*)-\sum_{i=1}^{n}l_i. \quad (48)$$

۶-نتیجه گیری!

در این مقاله، به بررسی خواص جبری جمع پیمانه‌ای به پیمانه‌ی 2^t پرداختیم. بهترین تفسیر جبری یک عملگر عبارت است از به دست آوردن ANF توابع مؤلفه‌ای آن و البته یافتن درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای نیز از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. ما این درجات را برای جمع پیمانه‌ای، در حالت کلی، به دست آوردیم و به عنوان کاربردی از نتایج به دست آمده، درجه‌ی جبری توابع مؤلفه‌ای تبدیلات PHT را مورد بررسی قرار دادیم. روشن است که در ادامه‌ی تحقیق جاری، می‌توان اطلاعات بیشتری از ANF توابع مؤلفه‌ای مذکور را، در حالت کلی، استخراج کرد.

مراجع

[۱] رحیمی‌پور علیرضا، دهنوی سید مجتبی، **"درجه جبری توابع مؤلفه‌ای جمع پیمانه‌ای به پیمانه 2^t با r عملوند"**، ششمین کنفرانس بین المللی انجمن رمز ایران، صفحه‌های ۱-۵، دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۸.

[2] B. Schneier, J. Kelsey, D. Whiting, D. Wagner, C. Hall, N. Ferguson, "Twofish: A 128-Bit Block Cipher", 1998, Available via http://www.counterpane.com/twofish.html.

[3] J. Jonsson and B. S. Kaliski, Jr, "RC6 block cipher", Primitive submitted to NESSIE by RSA, Sept. 2000.

[4] R.L.Rivest, "The RC4 encryption algorithm," RSA Data Security, Inc.,Mar.,1992.

[5] A. Braeken, I. Semaef, "The ANF of Composition of Addition and Multiplication mod 2^n with a Boolean Function", FSE'05, LNCS 2887, pp. 290-306, Springer-Verlag, 2003.