آنالیز ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو بر بستر ارتجاعی دو پارامتری با مصالح متغیر طول تیر

محمد ذاکری [1]، حمیدرضا رحمانی [2]، رضاعطارنژاد[3]

1- دانشجوی فوق لیسانس، عمران سازه، دانشگاه تهران، تهران، ایران
mohammad_Zakeri@ ut.ac.ir

2- دانشجوی فوق لیسانس، عمران سازهای هیدورلیکی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
hamidrahmani@ut.ac.ir

3- دانشیار دانشگاه تهران ، عمران سازه، دانشگاه تهران، تهران، ایران
attarnjd@ut.ac.ir

چکیده

این مقاله به تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو قرار گرفته بر بستر ارتجاعی دو پارامتری و تأثیر فاکتورهای مقطع متغیر ، مصالح متغیر و بستر ارتجاعی را بر فرکانس ارتعاش آزاد عرضی تیر می‌پردازد. در حل این مساله از یک روش عددی کار آمد و سریع به نام DTEM(Differential Transform Element Method) استفاده می‌شود .در بررسی این تیر فرض برآن است که توزیع مدول الاستیسته ، چگالی به صورت یک چند جمله‌ای در طول تیر تغییر می‌کند. در نهایت به منظور صحت سنجی و دقت و همگرایی نتاایج حاصل از آن، به مقایسه‌ی نتایج بدست آمده حاصل از این روش را با سایر محققین پرداخته شده است. لازم به ذکر است که این نوع تیر معمولاً در صنایع ساختمان، ساخت کوره ها و راه آهن کاربرد فراوان دارند.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش آزاد عرضی، تیر تیموشنکو، تیر با مصالح متغیر در طول، روش DTEM.

1. مقدمه

یک روش قدرتمند برای حل مسائل ارتعاش دینامیکی در سازه های مهندسی، روش DTEM است؛ بخصوص در مواردی که دقت بیشتر و فرکانس های طبیعی بالاتری مورد نیاز می باشد. این روش به عنوان یک روش دقیق مرسوم است؛ چرا که برخلاف روش های اجزای محدود سنتی و دیگر روش های تقریبی، با این روش می توان تعداد نامحدودی از فرکانس‌های طبیعی و مدهای ارتعاشی سازه ها را با دقت بالا محاسبه کرد. این روش، صرفنظر از تعداد المان‌هایی که در تحلیل در نظر گرفته می‌شود، نتایج دقیقی را ارائه می‌کند. هدف این مقاله ، بدست آوردن فرکانس ارتعاش آزاد عرضی تیموشنکو می‌باشد.[2]

2) آنالیز ارتعاش آزاد تیر:

در تئوری تیر تیموشنکو تغییر مکان محوری و تغییر مکان عرضی از رابطه زیر بدست می آید.[3]

$$W(x,y,z,t)=w(x,t) \quad ، \quad U(x,y,z,t)=-z\theta\left(x,t\right) \tag{2-1}$$

که x,y,z مختصات نقاط را نشان می دهد، t زمان را نشان می دهد، θ و w به ترتیب دوران خمشی و تغییر مکان عرضی را نشان می دهد. کرنش از روابط زیر بدست می آیند.

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}-\theta \quad , \quad \varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{4-3}$$

تنش با استفاده از جملات کرنش برابر است با:

$$\sigma_{xx}=E\left(x\right)\varepsilon_{xx} \quad , \quad \tau_{xz}=G\left(x\right)\gamma_{xz} \tag{6-5}$$

که در این معادلات σ_{xx} و τ_{xz} به ترتیب تنش محوری و تنش برشی را نشان می دهند، Eو G به ترتیب مدل یانگ و مدول برشی را نشان می دهد. که این دو تابع در جهت محور x با تغییرات ویژگی‌های ماده تغییر می کند. به علاوه، انرژی کرنشی (پتانسیل) و انرژی جنبشی المان تیری از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^l\int_A\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}dAdx \tag{7}$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\int_A\rho\left(x\right)\left(\dot{u}^2+\dot{w}^2\right)dAdx \tag{8}$$

که (ʻ) که مشتق نسبت به زمان را نشان می دهد و l نیز طول المان را نشان می دهد، A سطح مقطع تیر ρ نیز تابع چگالی را در طول تیر نشان می دهد. با به کار بردن اصل همیلتون ،معادله حاکم به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\left(x\right)I\left(x\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\kappa G\left(x\right)A\left(x\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)-\rho\left(x\right)I\left(x\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa G\left(x\right)A\left(x\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\right)\right]-\left(P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\rho\left(x\right)A\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{10}$$

نیروی برشی و لنگر خمشی نیز از رابطه زیر بدست می آید.

(11)

$$V(x,t)=\kappa G(x)A(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\varphi\right)$$

(12)

$$M(x,t)=-E(x)I(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

3) روش عددی به کار گرفته شده:

روش DTM ، یک روش عددی است که برای حل معادلات عملی به کار برده می‌شود. در واقع این روش بر گرفته از سری تیلور می‌باشد، که به راحتی قادر به حل معادلات مرتبه بالاتر می‌باشد. این روش، که به روش Differential Transform Methodمشهور است،و در مهندسی شامل دو مرحله است که مرحله اول که به آن تابع انتقال(DT) گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

(13)

$$\overline{F}(x)=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)\Bigg|_{x=x_0}$$

و مرحله دوم شامل تابع انتقال معکوس IDT نیز به صورت زیر تعریف میگردد.

(14)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k\,\overline{F}(k)$$

از معادله بالا نتیجه می‌گیریم که $f(x)$ تابع اصلی ، $\overline{F}(x)$ تابع انتقال یافته که T-function نیز نامیده می شود. در عمل ، تابع $f(x)$ باید تابع محدود بیان می گردد بنابراین از معادله (13) و (14) داریم.

(15)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k f}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

کهm در تابع $\sum_{k=0}^{m}(x-x_0)^k\,\overline{F}(k)$ طوری انتخاب می گردد که سایر جملات قابل صرف نظر کردن باشند. تئوری‌های کلی مربوط به کاربرد DTM در جدول (1) آمده است.

Original Functions	Transformed Functions
$f(x)=g(x)\pm h(x)$	$F(x)=G(k)\pm H(k)$
$f(x)=g(x)h(x)u(x)$	$\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}U(k-k_2)H(k_2-k_1)G(k_1)$
$f(x)=cg(x) \quad ; \quad c=cons$	$F(k)=cG(k)$
$f(x)=\dfrac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F(k)=(k+1)(k+2)\ldots(k+n)G(k+n)$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F(k)=\sum_{i=0}^{k}G(k-i)H(i)$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\delta(k-n)=\begin{cases}0 & if\ \ k\neq 0\\ 1 & if\ \ k=0\end{cases}$

جدول(1). ویژگی‌های روش DT

جدول(2). ویژگی‌های DT برای انواع شرایط مرزی

At $\xi=0$ Original	At $\xi=0$ Transformed	At $\xi=1$ Original	At $\xi=1$ Transformed
$f(0)=c$	$\bar{F}(0)=c$	$f(1)=c$	$\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}(k)=c$
$\frac{df}{d\xi}(0)=c$	$\bar{F}(1)=c$	$\frac{df}{d\xi}(1)=c$	$\sum_{k=0}^{\infty}k\bar{F}(k)=c$
$\frac{d^2f}{d\xi^2}(0)=c$	$2\bar{F}(2)=c$	$\frac{d^2f}{d\xi^2}(1)=c$	$\sum_{k=0}^{\infty}k.(k-1)\bar{F}(k)=c$
$\frac{d^3f}{d\xi^3}(0)=c$	$6\bar{F}(3)=c$	$\frac{d^3f}{d\xi^3}(1)=c$	$\sum_{k=0}^{\infty}k.(k-1).(k-2).\bar{F}(k)=c$

4) معادلات حاکم ارتعاش آزاد عرضی تیر به روشی DTM:

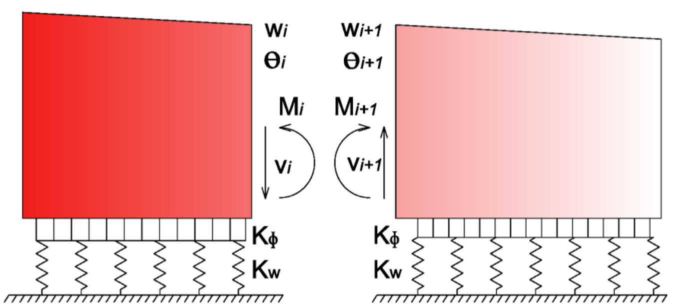
فرض کنید یک تیر با خواص متغیر بر بستر ارتجاعی که تحت یک بار خارجی قرار گرفته است را در نظر بگیرید $Q(x,t)$ همان طور که در شکل نشان داده شده است. طول تیر L ،مقطع تیر $A(x)$ و مدل الاستیسیته $E(x)$، ممان اینرسی $I(x)$ و چگالی نیز برابر $\rho(x)$ در نظر گرفته شده است .[1]

معادله دیفرانسیل حاکم این تیر ناهمگن که بر بستر ارتجاعی قراردارد به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial V}{\partial x}-k_w(x)W+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_\varphi(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right)-\rho A(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=Q(x,t) \qquad (16)$$

$$V-\frac{\partial M}{\partial x}-\rho(x)I(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \qquad (17)$$

که $W(x,t)$ تغییر مکان عرضی، $k_w(x)$ پارامتر بستر ارتجاعی وینکر رانشان می دهد و پارامتر $k_\phi(x)$ بستر ارتجاعی پاسترنک را مطابق شکل (1) نشان می دهد.



شکل(1). تیر تیموشنکو بر بستر ارتجاعی دو پارامتری

با فرض تئوری تیر تیموشنکو برش و خمش از رابطه (11) و (12) بدست می‌آید.
با جایگذاری معادلات (11) و (12) در معادلات (16) و (17) با فرض ارتعاش آزاد تیر $Q(x,t)=0$ و با فرض اینکه $W(x,t)$ و $\varphi(x,t)$ نسبت به زمان به صورت سینوسی عمل می کند داریم که :

(18)

$$W(x,t)=W(x)\sin(\omega t)$$

(19)

$$\varphi(x,t)=\varphi(x)\sin(\omega t)$$

معادله تیر به صورت زیر در می آید .

(20)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa G(x)A(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\phi\right)\right)-P\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-k_w(x)W+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_\phi(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\omega^2\rho(x)A(x)W=0$$

(21)

$$\kappa G(x)A(x)\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)I(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\omega^2\rho(x)I(x)\varphi=0$$

با به کار بردن تئوری های DTM موجود در جدول (1) دو معادله بدست می‌آید.

(22)

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k}\kappa G\bar{A}(k-i)(i+1)(i+2)\bar{W}(i+2)+\sum_{i=0}^{k}\kappa(k-i+1)G\bar{A}(k-i+1)(i+1)\bar{W}(i+1)\\&+\sum_{i=0}^{k}\bar{k}_{\phi}(k-i)(i+1)(i+2)\bar{W}(i+2)+\sum_{i=0}^{k}(k-i+1)\bar{k}_{\phi}(k-i+1)(i+1)\bar{W}(i+1)-\\&L^{2}\sum_{i=0}^{k}\bar{k}_{w}(k-i)\bar{W}(i)-L\sum_{i=0}^{k}\kappa G\bar{A}(k-i)(i+1)\bar{\phi}(i+1)-L\sum_{i=0}^{k}\kappa G(k-i+1)\bar{A}(k-i+1)\ \bar{\phi}(i)+\\&L^{2}\omega^{2}\rho\sum_{i=0}^{k}\ \bar{A}(k-i)(i+1)\bar{W}(i)-\sum_{i=0}^{k}\bar{P}(k-i)(i+1)(i+2)\bar{W}(i+2)=0\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}&L\sum_{i=0}^{k}\kappa G\bar{A}(k-i)(i+1)\bar{W}(i+1)+\sum_{i=0}^{k}E\bar{I}(k-i)(i+1)(i+2)\bar{\varphi}(i+2)+\sum_{i=0}^{k}(k-i+1)E\bar{I}(k-i+1)(i+1)\bar{\varphi}(i+1)\\&-L^{2}\sum_{i=0}^{k}\kappa G\bar{A}(k-i)\bar{\varphi}(i)+L^{2}\omega^{2}\rho\sum_{i=0}^{k}\bar{I}(k-i)\bar{\varphi}(i)=0\end{aligned}$$

سپس با در نظر گرفتن این دو معادله را به صورت برگشت پذیر و چهار شرط مرزی که مربوط به انواع تیر با مصالح متغیر در طول مربوط می‌شود و در جدول (2) ارائه شده است را اعمال می‌کنیم. با اعمال شرایط مرزی چهار معادله بدست می‌آید برای حل این چهار معادله به چهار جمله $\bar{W}(0)$، $\bar{W}(1)$، $\bar{\varphi}(0)$ و $\bar{\varphi}(1)$ احتیاج داریم که این جملات، جملات اساسی معادله بازگشتی نامیده می شود سایر جملات معادله بازگشتی با استفاده از این جملات اساسی قابل محاسبه خواهندبود . باید توجه داشت که برای اعمال شرایط مرزی آنها را باید به فضای DTانتقال داده شده که این انتقال توسط تئوری‌های موجود در جدول (1) انجام می شوند.

با اعمال شرایط مرزی چهار معادله بدست می¬آوریم، که این معادلات را در قالب یک ماتریس می نویسیم:

(24)

$$\left[C_{ij}{}^{m}(\omega)\right]_{4\times4}\begin{Bmatrix}\bar{W}(0)\\\bar{W}(1)\\\bar{\phi}(0)\\\bar{\phi}(1)\end{Bmatrix}=0$$

که بالاوند m نشان دهنده تعداد جملات به کار برده شده در ماتریس می باشد . با گرفتن دترمینان از $C_{ij}{}^{m}(\omega)$ و حل معادله مشخصه فرکانس ارتعاش آزاد تیر بدست می آید. ω_i^m فرکانس ارتعاش آزادی که به ازای m جمله در i امین تخمین محاسبه شده است. ω_i^{m-1} فرکانس ارتعاشی آزادی که در i امین تخمین برای جمله محاسبه شده است. و دقت محاسبات را از طریق معادله زیر مشخص می کنیم که تفاضل دو فرکانس متوالی محاسبه شده از ε کمتر باشد.

$$\left|\omega_i^{m}-\omega_i^{m-1}\right|\le\varepsilon \tag{25}$$

که ε یک مقدار مثبت کوچک است که معمولاً $\varepsilon = 0.001$ فرض میگردد.

تفاوت روش DTM , DTEM دراین است که ابتدا تیر را به ne المان مانند شکل (1) تقسیم می کنیم سپس معادله دیفرانسیل حاکم برای المان را می نویسیم بعد از آن این معادلات دیفرانسیل بدست آمده را باید با هم اسمبل کنیم تا کل بازه تیره بدست آید برای اینکار ابتدا معادله بازگشتی را با استفاده از روش DT مطابق آن روندی که قبلاً انجام گرفت محاسبه می‌شوند و. برای اسمبل کردن تیر مطابق آنچه توزیع داده شد به دو نوع شرط مرزی نیاز است:

(1) شرط مرزی خارجی در دو انتهای تیر

(2) شرایط مرزی داخلی بین دو المان:

(الف) پیوستگی تغییر مکان عرضی $w_{i-1} = w_i$

(ب)پیوستگی در دوران خمشی تیر $\theta_{i-1} = \theta_i$

(ج)تعادل در لنگر خمشی $M_{i-1} = M_i$

(د) تعادل در نیروی برشی $V_{i-1} = V_i$

در حالت کلی $4ne$ شرط مرزی داریم شروط مرزی را به صورت زیر در یک ماتریس قرار می دهیم.

$$[C]\{w\} = 0 \tag{26}$$

که $\{w\}$ که یک بردار $4ne \times 1$ می‌باشد

$\{w\} = \{\bar{W}_1(0)\,\bar{W}_1(1)\,\bar{\theta}_1(0)\,\bar{\theta}_1(1) \quad \ldots \quad \bar{W}_{ne}(0)\,\bar{W}_{ne}(1)\,\bar{\theta}_{ne}(0)\,\bar{\theta}_{ne}(1)\}$ و $[C]$ نیز یک ماتریس $4ne \times 4ne$ ضرایب می باشند. و با برابر صفر قراردادن آن معادله مشخصه تیر بدست می‌آید و با حل این معادله، ریشه‌هایی بدست می‌آیند که همان فرکانس ارتعاش آزاد عرضی تیر می باشند.

5)مثال عددی:

در انتها به بررسی اثر تغییر بستر ارتجاعی بر روی فرکانس ارتعاشی آزاد پرداخته شده است که در این مثال به بررسی تیر قرار گرفته بر بستر ارتجاعی دوپارامتری می پردازد . ($K_w = \dfrac{k_w L^4}{EI}$ ، $K_\phi = \dfrac{k_\phi L^2}{\pi EI}$)

در این تیر سطح مقطع و ممان اینرسی به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$I = I_0(1-cx/L)^{n+2} \quad ، \quad A = A_0(1-cx/L)^n$$

ویژگی‌های تیر در طول تیر با سری توانی مطابق معادله زیر در طول تیرتغییر می‌کنند.

$$T = (T_a - T_Z)\zeta^n + T_Z$$

که T، ρو E هر کدام می تواند باشد a نماد (آلومینیوم) Al و z نماد Zirconia (زیرکونیا) که چگالی آن بر حسب قوانین توانی در طول تیر تغییر می کند ما در این مرحله $n=2$ در نظر گرفته ایم.
(ZrO_2 :E=200GPa, ρ =5700kg/m^3 & Al :E=70GPa, ρ =2702kg/m^3)

جدول (3). فرکانس ارتعاش آزاد تیر مقطع متغیر FG طولی بر بستر ارتجاعی دو پارامتری

First Mode					First Mode				
K_ϕ	0				K_ϕ	1			
α / K_w	0	1	10	100	α / K_w	0	1	10	100
0.3	3.520	5.390	11.525	21.090	0.3	12.200	12.350	13.660	22.510
0.5	3.680	5.869	11.933	21.835	0.5	12.140	12.340	13.988	24.243
0.7	3.943	6.650	12.237	22.766	0.7	12.342	12.618	14.833	26.790
0.8	4.150	7.180	12.340	23.260	0.8	12.660	13.013	15.700	28.500

6) نتیجه گیری :

درنتیجه روش DTEM یک روش قدرتمند و دقیق برای حل مسائل تیر بر بستر ارتجاعی می باشد.

مراجع:

[1] R. Attarnejad, A. Shahba, S. Jandaghi Semnani. Application of differential transform in free vibration analysis of Timoshenko beams resting on two-parameter elastic foundation, The Arabian Journal for Science and Engineering, Vol. 35, pp. 121-128, 2010.

[2] M. A. De Rosa, Free vibration of Timoshenko beams on two- parameter elastic foundation Computers and Structures, 57(1), 151- 156, 1995.

[3] I. Elishakoff, S. Candan, Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beams, International Journal of Solids and Structures, 38, 3411-3441,