



مرکز بررسی‌ها و مطالعات دریایی

سازمان بنادر و دریانوردی به عنوان تنها مرجع حاکمیتی کشور در امور بندری، دریایی و کشتی‌رانی بازرگانی به منظور ایفای نقش مرجعیت دانشی خود و در راستای تحقق راهبردهای کلان نقشه جامع علمی کشور مبنی بر "حمایت از توسعه شبکه‌های تحقیقاتی و تسهیل انتقال و انتشار دانش و سامان‌دهی علمی" از طریق "استانداردسازی و اصلاح فرایندهای تولید، ثبت، داوری و سنجش و ایجاد بانک‌های اطلاعاتی یکپارچه برای نشریات، اختراعات و اکتشافات پژوهشگران"، اقدام به ارایه این اثر در سایت SID می‌نماید.



سازمان بنادر و دریانوردی



دهمین همایش بین المللی سواحل، بنادر و سازه های دریایی  
 ۲۹ آبان لغایت ۱ آذر ۹۱ (تهران- ایران)



شبیه سازی عددی جریان اطراف سیلندر دایره ای به روش SPH

سید میثم کیا<sup>۱</sup>، مهدی شفیعی فر<sup>۲</sup>، علیرضا ولی زاده<sup>۳</sup>، آرش عبد معبودی<sup>۴</sup>

کلیدواژه : SPH، جریان اطراف سیلندر، ضریب درگ، عدد استروهمال

چکیده

در این مقاله با توسعه یک مدل هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) دو بعدی، رژیم و نیروهای ناشی از جریان وارد بر یک سیلندر ثابت در رینولدزهای پایین مورد بررسی قرار گرفته اند. شبیه سازی ها تا رینولدز برابر ۱۰۰ انجام پذیرفته و در هر مورد ضریب درگ و عدد استروهمال به دست آمده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. هیچ مدل آشفتگی لحاظ نشده و نتایج به دست آمده با توجه به رزولوشن انتخابی قابل قبول است.

مقدمه

از زمان توسعه صنعت فراساحل در دهه‌ی شصت میلادی، مطالعه‌ی جریان حول سیلندر که از موضوعات کلاسیک در هیدرودینامیک تلقی می شود، توجه متخصصین عمران و مکانیک را به خود جلب کرده است [۲۰۱]. سادگی هندسه‌ی مساله، وجود رژیم‌های جریان مختلف و اندرکنش سیال و جسم جامد، ویژگی هایی است که این مساله را به موضوع جذابی برای مطالعه و همچنین سنجش اعتبار روش های حل عددی دینامیک سیالات بدل کرده است.

در این مقاله، با استفاده از روش لاگرانژی و بدون شبکه‌ی هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) شبیه سازی عددی جریان در اطراف سیلندر برای رینولدزهای پایین ( $Re < 100$ ) انجام می پذیرد.

جریان حول سیلندر

کمیت های بی بعد توصیف کننده وضعیت جریان در اطراف سیلندر به رینولدز سیلندر بستگی دارند:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $D$  قطر سیلندر،  $U$  سرعت جریان، و  $\mu$  ویسکوزیته سینماتیک هستند.

با تغییر رینولدز و افزایش آن از صفر، رژیم جریان تغییرات قابل توجهی می کند. برای رینولدزهایی تا عدد ۵ هیچ گونه جدایشی اتفاق نمی افتد. در رینولدزهای بین ۵ تا ۴۰ یک جفت گردابه<sup>۵</sup> ثابت به دنبال سیلندر تشکیل می شود. طول این گردابه ها با افزایش رینولدز افزایش می یابد.

با افزایش دوباره رینولدز، محدوده ی پشت سیلندر ناپایدار می شود و پدیده‌ای رخ می دهد که در اصطلاح به آن بیرون شدن گردابه‌ای<sup>۶</sup> می گویند. بدین ترتیب که گردابه‌های تشکیل شده به ترتیب با یک فرکانس خاص از پشت سیلندر خارج می شوند. این حالت تا رینولدز برابر

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، meisam.kia@gmail.com

<sup>۲</sup> استاد، دانشگاه تربیت مدرس، shafiee@modares.ac.ir

<sup>۳</sup> ریسرچ فلو، دانشگاه موناخ، vali802000@gmail.com

<sup>۴</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، a.abd@modares.ac.ir

با ۲۰۰ لایه‌ای<sup>۷</sup>، و از ۲۰۰ تا ۳۰۰ حالت انتقالی پیدا می‌کند. در این وضعیت فرکانس تشکیل گردابه‌ها توسط عدد استروهال<sup>۸</sup> بیان می‌شود که با سرعت و قطر سیلندر نرمال شده است ( $St = \frac{f_v D}{U}$ ). فرکانس و عدد استروهال است. در  $Re = 400$ ، گردابه‌ها حالت سه بعدی به خود می‌گیرند. در رینولدزهای بالاتر از ۳۰۰ تا ۳۰۰۰۰۰ گردابه‌ها کاملاً آشفته‌اند، با وجود این مرز اطراف سیلندر حالت لایه‌ای دارد. به این حالت، رژیم جریان زیربحرانی می‌گویند [۳].

### معادلات حاکم

در SPH که یک روش لاگرانژی است، با جایگزین کردن سیستم مورد نظر با مجموعه‌ای از ذرات (اگر سیستم خود گسسته نباشد)، فرآیند مدل‌سازی عددی آغاز می‌شود و تقریب توابع به کمک تابع درونیایی به نام کرنل انجام می‌پذیرد. معادلات سیال در SPH، به تفصیل توسط Monaghan، ارائه شده است [۴]. فرم کلی معادله پیوستگی و مومنوم در SPH به صورت زیر است:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \sum_j m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (2)$$

$$+ \sum_b (f_{ib} - m_b \Pi_{ib} \nabla_i W_{ib}) + f_i \quad (3)$$

در معادلات فوق،  $i$  و  $j$  اندیس ذره،  $b$  اندیس ذرات مرزی،  $\rho$  چگالی،  $m$  جرم،  $v$  سرعت،  $W_{ij} = W(x_i - x_j, h)$  تابع کرنل،  $\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}$ ،  $r_{ij} = |x_i - x_j|$  و فشار ذرات هستند.

برای درونیایی و تخمین نیروهای سیال از کرنل wendland در چه ۴ استفاده می‌کنیم:

$$W(q, h) = \alpha \begin{cases} (2 - q)^2 (1 + 2q), & 0 \leq q \leq 2, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

که در آن:

$$q = \frac{r}{h} = \frac{|x - x_j|}{h}$$

$h$  طول هموار کرنل یا همان دامنه‌ی درونیایی برای هر ذره است. به طور کلی  $h$  از تست‌های همگرایی به دست می‌آید. به این ترتیب که با تغییر آن دقت و سرعت اجرای مدل سنجیده می‌شود. استفاده از توابع کرنل مختلف این آزمون را تحت تاثیر قرار می‌دهند. برای مثال مرسوم است که برای تابع Wendland، برابر ۱/۵ برابر فاصله‌ی اولیه‌ی ذرات در نظر گرفته شود تا قرار گیری ذرات شکل منظم تری به خود گیرند [۵].

ویسکوزیته مصنوعی در غالب ترم  $\Pi$  در معادله حرکت SPH ظاهر می‌شود [۴]:

$$\Pi_{ij} = - \frac{\alpha v_{sig} v_{ij} \cdot r_{ij}}{\rho_{ij} |r_{ij}|} \quad (5)$$

در رابطه فوق  $\rho_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$ ،  $v_{ij} = v_i - v_j$  و سرعت مشخصه<sup>۹</sup>  $v_{sig}$  از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{sig} = \frac{1}{2} (c_i + c_j) - \frac{v_i \cdot r_{ij}}{|r_{ij}|} \quad (6)$$

$c_i$  در رابطه بالا سرعت صوت در ذره  $i$  است. سرعت مشخصه را می‌توان این چنین تفسیر کرد: سرعتی که یک موج صوتی با آن از ذره  $i$  به موجی صوتی از ذره  $j$  نزدیک می‌شود. ترم دوم حرکت نسبی دو ذره است که در مقابل سرعت صوت ناچیز است و از معادله خارج

<sup>۱</sup> Vortex Shedding

<sup>۷</sup> Laminar

<sup>۸</sup> Strouhal number

<sup>۹</sup> Signal Velocity

می شود. با بینهایت فرض کردن تعداد ذرات و ثابت نگاه داشتن  $h$  می توان محیط پیوسته را شبیه سازی کرد و ویسکوزیته را بر حسب  $\alpha$  به دست آورد. با انجام محاسباتی شبیه به [۴] ویسکوزیته به دست می آید:

$$\nu = \frac{1}{\alpha} \alpha h \nu_{stg} \quad (7)$$

رابطه فوق برای حالتی است که از wendland به عنوان کرنل استفاده شود. در SPH در صورت منفی شدن فشار، ذرات به هم می چسبند<sup>۱۰</sup>. برای جلوگیری از این پدیده غیر فیزیکی، ترم  $R_{ij}$  به معادله مومنتوم اضافه می شود [۶]:

$$R_{ij} = 0.01 \left| \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right| \left( \frac{W_{ij}}{W(\Delta p)} \right)^4 \quad (8)$$

که  $W(\Delta p)$  در آن کرنلی است که بر اساس فاصله اولیه ذرات  $(\Delta p)$  به دست می آید. نیروی دافعه بین ذرات مرزی و سیال است. Kajtar و Monaghan روشی برای تخمین نیروهای ذرات مرزی ارائه کردند که در این تحقیق از آن استفاده شده است [۵]. این نیرو در جهت شعاعی بین ذره مرزی و سیال اعمال می شود. نیروی حاصل از مجموع نیروهای اعمال شده از طرف ذرات مرزی به ذره سیال با دقت فراوانی به شکل مرز بستگی ندارد و عمود بر مرز اعمال می شود. فرم این نیروی شعاعی  $W(r)/(r-d)$  است و  $W$  می تواند هر نوع تابع همواری باشد. تابعی که در این شبیه سازی از آن استفاده شده است، wendland یک بعدی درجه ۵ است:

$$W(q) = \begin{cases} w_0 \left( 1 + \frac{5}{2}q + \frac{3}{2}q^2 \right) (2-q)^5, & q \leq 2, \\ 0, & q > 2, \end{cases} \quad (9)$$

نیروی وارد بر یک ذره سیال، ناشی از ذرات مرزی از رابطه زیر به دست می آید:

$$F_{it} = \frac{m_i}{m_j} \frac{r_{ij}}{(|r_{ij}| - \frac{\Delta p}{\beta})^2} W\left(\frac{r_{ij}}{h}\right) \frac{m_j}{m_i} \frac{r_{ij}}{mb} \quad (10)$$

که  $m_b$  نشانگر جرم ذره مرزی،  $m_i$  جرم ذره سیال و  $\beta$  نسبت فاصله ی اولیه ی ذرات سیال به فاصله ذرات مرزی است.  $k$  معمولاً مجذور حداکثر سرعت پیش بینی شده برای سیال است.

ذرات مرزی باید دارای فواصلی کوچک تر از  $\frac{1}{3}$  فاصله اولیه ذرات سیال باشند تا نسبت نیروی مماسی به نیروی نرمال و نسبت تغییرات نیروی نرمال در یک فاصله ثابت از مرز کمتر از  $10^{-5}$  باشد.

فشار ذره با توجه به رابطه دانسیته محلی ذره و انرژی داخلی آن، از طریق به کار بردن یک معادله حالت<sup>۱۱</sup> محاسبه می گردد. از این رو در حل مسائل مربوط به مایعات تراکم ناپذیر اولین راه حلی که به نظر می رسد این است که سیال را اندکی تراکم پذیر فرض کنیم. معادله ی حالتی که برای محاسبه فشار در جریان سطح آزاد آب مطرح شد، به صورت زیر است:

$$P_i = B \left( \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (11)$$

$\gamma$  ثابتی است که در اغلب تحلیل ها برابر ۷ در نظر گرفته می شود.  $\rho$  چگالی مرجع است که برابر  $1000 \text{ KG/m}^3$  لحاظ می شود و  $B = c^2 \rho_0 / \gamma$ .

برای جلوگیری از نفوذ ذرات در یکدیگر رابطه حرکت به صورت زیر اصلاح کرد تا ذرات هموارتری داشته باشند (XSPH):

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i + \varepsilon \Delta v_i \quad (12)$$

که در آن  $\varepsilon$  برابر ۰/۵ و؛

<sup>۱۰</sup> Particle Clustering

<sup>۱۱</sup> State Equation



$$v_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j - v_i) W_{ij} \quad (13)$$

### مقدار دهی دوباره به چگالی

هر چند شبیه سازی ویژگی‌های دینامیکی سیال توسط SPH به واقعیت نزدیک است، اما میدان فشار نوساناتی را تجربه می‌کند. تلاش‌های مختلفی برای غلبه بر این مشکل و یکنواخت و هموار شدن میدان فشار به ویژه در نزدیکی مرزهای آزاد و بسته، که درونیایی کرنل نیز دچار ناپیوستگی می‌شود، صورت گرفته است. یکی از روش‌های ساده و کم هزینه از نظر محاسباتی اجرای فیلترینگ روی ذرات و مقداردهی دوباره به دانسیته در روند شبیه‌سازی است. در این تحقیق از یک روش ساده مرتبه صفر<sup>۱۳</sup> برای این منظور استفاده می‌شود [۷]:

$$\rho_i = \frac{\sum_j \rho_j W_{ij} V_j}{\sum_j W_{ij} V_j} \quad (14)$$

هر ۴۰ گام زمانی دانسیته ذرات طبق رابطه ی بالا اصلاح می‌شوند.

### مقدار دهی دوباره به چگالی

روش‌های مختلفی برای یافتن حل مساله در زمان برای SPH وجود دارند. بهتر است الگوریتمی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، حداقل دقت مرتبه دوم را داشته باشد. الگوریتم پیش بینی- تصحیح<sup>۱۴</sup>، ورلت<sup>۱۴</sup>، Leap-Frog از جمله روش‌هایی هستند که در SPH به کار برده شده‌اند. در این تحقیق از روش ورلت استفاده شده است. به طور خلاصه این روش برای هر گام زمانی دو مرحله تعیین می‌کند. در مرحله اول مقادیر میانی محاسبه می‌شوند، و در مرحله ی دوم، بعد از این که نیروها به دست آمدند، گام زمانی پایان می‌یابد. کنترل طول گام زمانی توسط شرط Courant-Fredrich-Levy تعیین می‌شود. در این تحقیق این مقدار برابر حداقل  $h/(2c)$  بین همه ذرات در نظر گرفته می‌شود.

برای شبیه سازی جریان و سیلندر، یک کانال ۲/۵ در ۵ متر مدل می‌شود. فاصله ۲/۵ متری بین جدارها پس از انجام مجموعه‌ای از حالات و بررسی تاثیر فاصله آنها تا سیلندر انتخاب شده است. یک سیلندر با قطر ۲۵ سانتی متر در فاصله ی ۲۲۰ سانتی متری از ورودی کانال و در فاصله ای مساوی از دیواره ها قرار می‌گیرد.

در شبیه‌سازی جریان از تکنیک تزریق ذرات به داخل دامنه مساله استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ذراتی ورودی در ابتدا و ذرات خروجی در انتهای دامنه قرار داده می‌شوند. سرعت و فشار بالادست از طریق ذرات ورودی اعمال می‌گردد و ذرات خروجی کمک می‌کنند جریان آزاد در انتهای دامنه برقرار شود. بدین منظور ذراتی که وارد ناحیه خروجی می‌شوند خواص خود را حفظ می‌کنند و سرعت آنها ثابت و برابر با سرعت ورود آنها به ناحیه خروجی نگه داشته می‌شود. اگر قرار باشد موقعیت پایین دست به سیستم اعمال شود، باید خواص ذرات خروجی نیز تعریف شوند. از شتاب جاذبه صرف نظر می‌کنیم و رینولدز را ۲۰ در نظر می‌گیریم. فاصله اولیه ذرات ۲ سانتی متر فرض می‌شود. طبق آزمون‌های مختلف انجام شده، بیشتر شدن نسبت فاصله ذرات به قطر سیلندر از این حالت به کاهش دقت منجر می‌شود.  $\beta$  برابر ۳ قرار داده می‌شود.

سرعت نهایی جریان ۱ متر بر ثانیه و سرعت صوت ۱۰ برابر این مقدار در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه نیروی ذرات مرزی از تابع وندلند یک بعدی درجه ۵ و برای ذرات سیال نیز از تابع وندلند بهره گرفته می‌شود. ۲۵۰۰ گام زمانی میرایی به سیستم اعمال شده و سپس جریان طی ۱۵۰۰۰ گام زمانی به تدریج تزریق می‌شود.

شکل ۱ بردار سرعت ذرات پس از دائمی شدن جریان را نشان می‌دهد. رژیم جریان شامل دو گردابه متقارن است که انطباق خوبی با نتایج تحقیقات گذشته دارد. ضریب درگ متوسط برابر ۲,۱۴ به دست آمده است که ۶ درصد آن در اثر اصطکاک و بقیه در اثر فشار است. این ضریب بر اساس آزمایش برابر ۲,۱۱ محاسبه شده است [۸]. محاسبه ی ضریب درگ، طبق رابطه ی زیر، با داشتن متوسط نیروی وارد بر سیلندر استفاده می‌شود.

$$C_D = \frac{F_D}{\sum \rho D v^2} \quad (15)$$

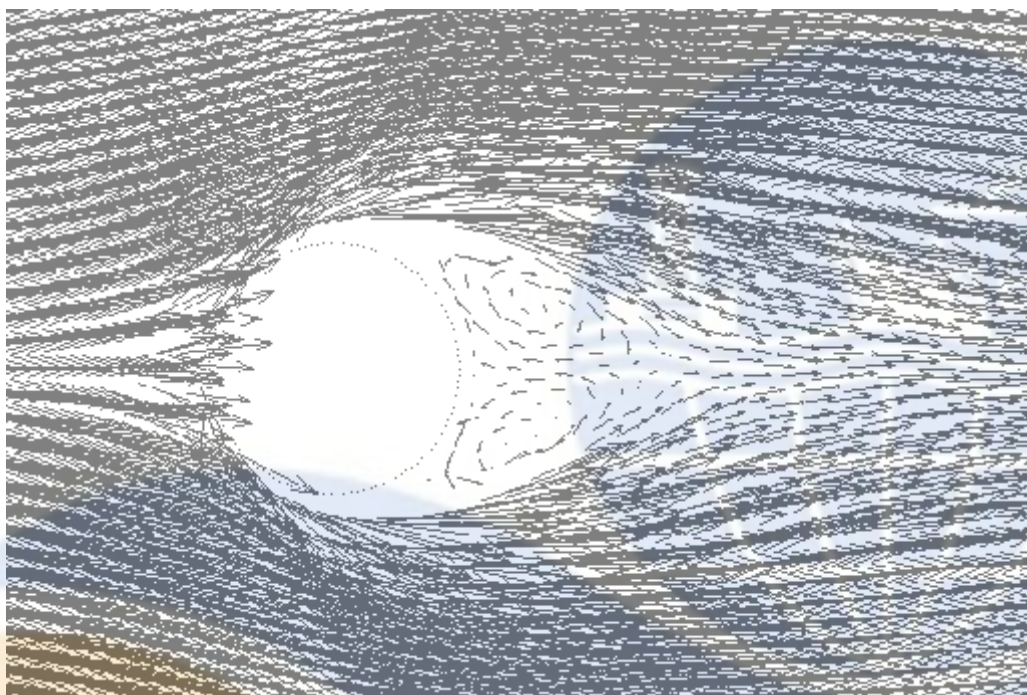
<sup>۱۳</sup> Shephard Filter

<sup>۱۴</sup> Predictor-Corrector

<sup>۱۴</sup> Verlet

نتایج کیفی و کمی مدلسازی‌ها نشان می‌دهد که تا زمانی که بیرون شدن گردابه‌ای به وجود نمی‌آید ( $Re = 40$ ) شبیه سازی دقیق است. معیار سنجش این دقت بردارهای سرعت حاصل از پردازش گرافیکی و ضریب درگ به دست آمده است (شکل ۱ و جدول ۱).

ضرایب درگ و به خصوص اعداد استروهمال به دست آمده برای رینولدزهای بالاتر، در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دقت کمتری دارند (جدول ۲ و ۳). با وجود این تا رینولدز برابر ۸۰ در اثر آشفتگی نتایج عددی با توجه به resolution انتخابی دقت بالایی دارد و دچار گسستگی نمی‌شود (شکل ۴). اما در رینولدزهای بالاتر آشفتگی به خوبی شبیه سازی نمی‌شود هر چند شکل کلی جریان قابل قبول است (شکل ۲ و ۳).



شکل ۱- بردار سرعت در ناحیه اطراف سیلندر  $Re = 20$

جدول ۱- مقایسه ضریب درگ در حالت لایه‌ای

40		30		20		Re
Tritton [۸]	SPH	Tritton [۸]	SPH	Tritton [۸]	SPH	
1,63	1,67	1,84	1,90	2,14	2,11	$C_D$

جدول ۲- مقایسه ضریب درگ در حالت vortex shedding

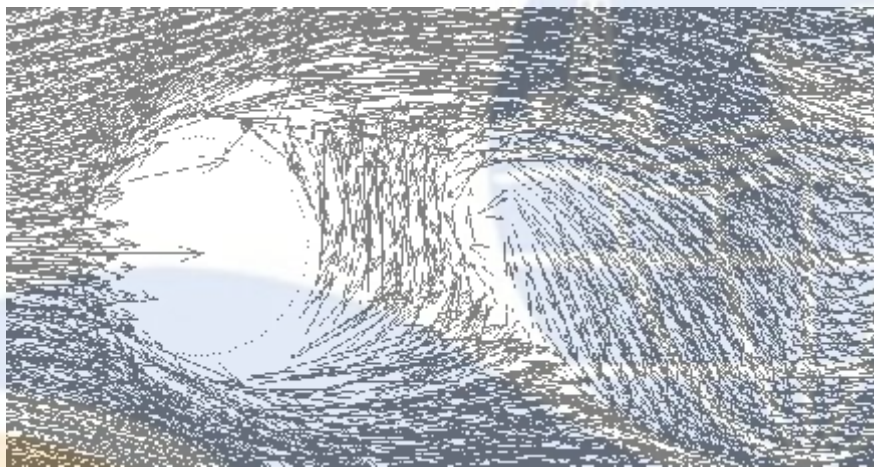
100		80		60		Re
Tritton [۸]	SPH	Tritton [۸]	SPH	Tritton [۸]	SPH	
1,27	1,60	1,32	1,45	1,40	1,47	$C_D$

جدول ۳- مقایسه عدد استروهمال

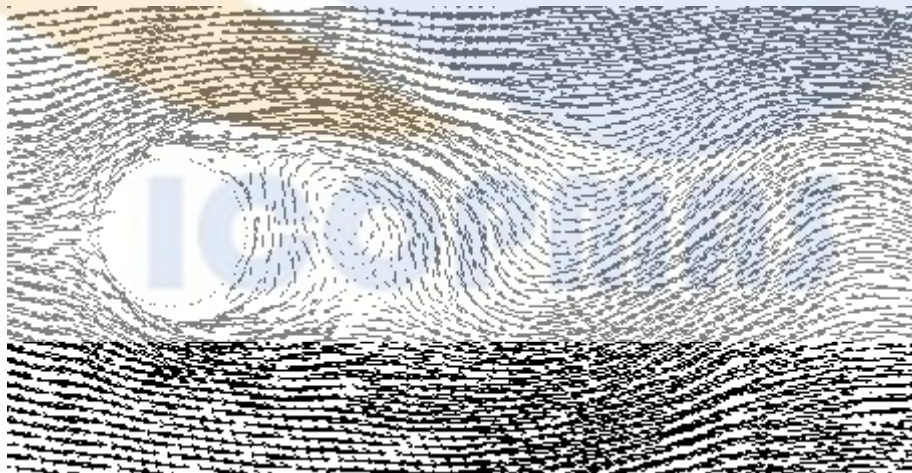
100		80		60		Re
Roshko [۹]	SPH	Roshko [۹]	SPH	Roshko [۹]	SPH	
0,162	0,212	0,149	0,195	0,130	0,172	St



شکل ۲- بروز نایبوستگی در پشت سیلندر در  $Re = 100$



شکل ۳- بردار سرعت در ناحیه اطراف سیلندر  $Re = 100$



شکل ۴- بردار سرعت در ناحیه اطراف سیلندر  $Re = 80$

### نتیجه گیری

در این تحقیق، از یک روش لاگرانژی بدون شبکه (SPH) برای محاسبه نیرو و بررسی اندرکنش میان سیال و مانع بهره گرفته شده است. با استفاده از یک روش نوین در تعیین نیروهای بین ذرات مرزی و سیال، مدل توانسته است به خوبی ای پدیده را در رینولدزهای پایین شبیه سازی کند به طوری که نتایج حاصل برای ضریب درگ و عدد استروهل تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی با شرایط مشابه دارد. شبیه سازی عددی با رزولوشن ثابت برای رینولدزهای مختلف انجام شده است. افزایش رینولدز به کاهش دقت مدل در شبیه سازی می انجامد.



مراجع

- ١) Tritton, D. J. (١٩٥٩), Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at low Reynolds numbers, Journal of Fluid Dynamics, Vol. ٦, No. ٤, pages ٥٤٧-٥٦٧
- ٢) Sheard, G. J., Hourigan, K., Thompson, M. C. (٢٠٠٤), Computation of the Drag Coefficient for Low-Reynolds-Number flow past rings, Journal of Fluid Mechanics, Vol. ٥٢٦, pages ٢٥٧-٢٧٥
- ٣) Bloor, M.S. (١٩٦٤): The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. J. Fluid Mech., ١٩:٢٩٠-٣٠٤.
- ٤) Monaghan, J. J. (٢٠٠٥). Smoothed Particle Hydrodynamics. Reports on Progress in Physics, ٦٨:١٧٠٣-١٧٥٩.
- ٥) Monaghan, J. J., Kajtar, J. B. (٢٠٠٩), SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries, Computer Physics Communications, ١٨٠:١٨١١-١٨٢٠.
- ٦) Monaghan, J. J. (٢٠٠٠). SPH without Tensile Instability. Journal Computational Physics, ١٥٩:٢٩٠-٣١١.
- ٧) Bonet, J. and Kulasegaram, S., (٢٠٠٠), "Corrections and Stabilization of Smoothed Particle Hydrodynamics Methods with Applications in Metal Forming Simulations," International Journal for Numerical Methods in Engineering, ٤٧, pp ١١٨٩-١٢١٤.
- ٨) Triton, D. J. (١٩٥٩). Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds number, J. Fluid Mech. ٦: ٥٤٧.
- ٩) Roshko, A. (١٩٦١). Experiments on the flow past a circular cylinder at high Reynolds number, J. Fluid Mech. ١٠: ٣٤٥-٣٥٦.



ICOPMAS



## Numerical Simulation of Flow around Circular Cylinder using SPH Method

**S. Meysam Kia**

Graduate Student, Tarbiat Modares University

[Meisam.kia@gmail.com](mailto:Meisam.kia@gmail.com)

**M. Shafieefar**

Professor, Tarbiat Modares University

[Shafiee@modares.ac.ir](mailto:Shafiee@modares.ac.ir)

**A. Valizadeh**

Research fellow, Monash University

[Vali802000@gmail.com](mailto:Vali802000@gmail.com)

**A. Abd Mabodi**

Graduate Student, Tarbiat Modares University

[a.abd@modares.ac.ir](mailto:a.abd@modares.ac.ir)

### Abstract:

In this article, by developing a two dimensional Smoothed-particle hydrodynamics model (SPH), the regime and powers which are due to flow exerted on a constant cylinder at low Reynolds have been investigated. The simulations are done to the Reynolds equal to 100, and in each case, the drag coefficient and Strouhal number are compared with the laboratory results. No turbulence models are observed and the results are acceptable regarding the selected resolution.

**Keywords:** SPH, flow around cylinder, drag coefficient, Strouhal number

ICOPMAS