دهمین همایش بین المللی سواحل، بنادر و سازه های دریایی
۲۹ آبان لغایت ۱ آذر ۹۱ (تهران-ایران)

ICOPMAS

مدل‌سازی عددی ۱- بعدی جریان و آلودگی در کانال با روش تفاضلات محدود و با مدل Uncoupled

محسن مهرمطلق[1]

کلید واژه: مدل‌سازی عددی، روش تفاضلات محدود، منقطع سازی، آلودگی، کانال، مدل Uncoupled.

چکیده

هنگامی که آلودگی از یک منبع نقطه ای به محیطی تخلیه می‌شود، در ابتدا بر حسب خصوصیت آن آلاینده، دمای محیط، غلظت سایر مواد درون آب و وزش باد و دیگر عوامل آلودگی تخلیه شده به محیط شروع به پخش شدگی در راستای افقی و عمودی می‌کند، که این پدیده را در سطح انتشار می‌نامند. همزمان با این پدیده، جریان محیط نیز آلودگی وارد شده را با خود حمل کرده و در جهت حرکت آب جلو می‌برد، این پدیده که فقط تحت تاثیر جریان محیط صورت می‌گیرد را انتقال می‌نامند.

از آنجا که معادلات حاکم بر حرکت سیال بصورت دستگاه معادلات غیر خطی می‌باشد، حل تحلیلی آنها جز در حالت‌های بسیار ساده، ممکن نیست و بنابراین باید این معادلات را بصورت عددی حل نمود. روش تفاضلات محدود یکی از روش‌های کاربردی در حل معادلات غیر خطی است. اساس روش تفاضلات محدود، سری تیلور است. در تحقیق حاضر، با بخش آلودگی مصنوعی در ابتدای یک کانال، ماژول‌های هیدرولیک و آلودگی به صورت Uncoupled بررسی قرار گرفته‌اند. در این روش، هر معادله بطور جداگانه حل شده و فرض می‌شود در هر گام زمانی، جریان ماندگار است و سرعت‌ها تغییری نمی‌کنند. ابتدا ماژول هیدرولیک حل شده و سرعت‌ها در کانال بدست می‌آید. آنگاه سرعت‌ها بر اساس نیاز شبکه ماژول آلودگی در ماژول سرعت متوسط، بدست می‌آیند. سپس سرعت‌ها در ماژول آلودگی قرار گرفته و در نهایت مقدار غلظت در طول کانال بدست می‌آید. با افزایش گام زمانی، مراحل ذکر شده دوباره تکرار می‌شوند تا زمان شبیه سازی به انتها برسد. از برنامه ریزی در نرم افزار MATLAB برای شبیه سازی مسئله، استفاده شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که الگوریتم ماژول سرعت متوسط ابداعی، دارای کارایی بالایی می‌باشد بطوریکه با تخفیف مقدار کوچک خطا در روند عملیات، هزینه محاسبات را بسیار پایین آورده و روند محاسبات را برای کامپیوترهای متداول، بسیار سریع‌تر می‌نماید.

مقدمه

هنگامی که آلودگی از یک منبع نقطه ای به محیطی تخلیه می‌شود، در ابتدا بر حسب خصوصیت آن آلاینده، دمای محیط، غلظت سایر مواد درون آب و وزش باد و دیگر عوامل آلودگی تخلیه شده به محیط شروع به پخش شدگی در راستای افقی و عمودی می‌کند، که این پدیده را در سطح انتشار می‌نامند که در آن پخش شدگی ذرات یا لکه آلودگی در اثر ترکیبی از اثرات برشی و اختلاف پتانسیل است. البته پخش شدگی آلودگی در راستای عمق نیز صورت می‌گیرد که همان پخش شدگی آلاینده در آب است که به مرور زمان غلظت ماده کم می‌شود، ولی مرکز جرم آن بطور تقریبی ثابت می‌ماند و علت آن حرکات تصادفی آب می‌باشد. این پخش در حالت مولکولی پخش شدگی ناشی از حرکت براونی مولکول‌های آب و در حالت آشفتگی ناشی از حرکت متلاطم خود آب می‌باشد. همزمان با این پدیده، جریان محیط نیز آلودگی وارد شده را با خود حمل کرده و در جهت حرکت آب جلو می‌برد، این پدیده که فقط تحت تاثیر جریان محیط صورت می‌گیرد را انتقال می‌نامند. انتقال آلاینده

[1] مهندس ناظر شرکت مهندسین مشاور یکم، کارشناس ارشد سازه های دریایی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، پروژه سد مخزنی شهر بیجار، M۳_Motlagh@yahoo.com

به صورت یک بعدی که ماهیت ماده آلاینده تغییر نیابد. در واقع در این حالت جرم از یک موقعیت به موقعیت دیگر منتقل می‌شود. برای مشاهده چگونگی اثر این پدیده بر آلودگی، نیاز به مطالعه معادلات حاکم بر آنها و شبیه سازی ریاضی خواهیم داشت [۱].

از آنجا که معادلات حاکم بر حرکت سیال بصورت دستگاه معادلات غیر خطی می‌باشد، حل تحلیلی آنها جز در حالت‌های بسیار ساده، ممکن نیست و بنابراین باید این معادلات را بصورت عددی حل نمود. روش‌های متفاوتی برای حل این معادلات وجود دارد که عبارتند از: روش تفاضلات محدود[۲]، روش احجام محدود[۳]، روش اجزای محدود[۴]، روش اجزای مرزی[۵] و روش طیفی[۶] [۲].

روش تفاضلات محدود یکی از روش‌های کاربردی در حل معادلات غیر خطی است. اساس روش تفاضلات محدود، سری تیلور است. در واقع هر تابع دیفرانسیلی پیوسته را می‌توان توسط سری تیلور نمایش داد.

با استفاده از سری تیلور، مقدار تابع f در نقطه $x_0+\Delta x$ بر اساس مقادیر تابع f و مشتقات آن در نقطه x_0 بصورت زیر نوشته می‌شود [۳]:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0}+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x_0}+\cdots+\frac{\Delta x^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Big|_{x_0}+\cdots \qquad (۱)$$

معادلات حاکم بر مسئله به دو ماژول هیدرولیک و آلودگی تقسیم شده‌اند. برای حل از مدل Uncoupled استفاده شده است. شمای الگوریتم حل مسئله مطابق شکل ۲ است. در این روش هر معادله بطور جداگانه حل شده و فرض می‌شود در هر گام زمانی، جریان ماندگار است و سرعت‌ها تغییری نمی‌کنند. ابتدا ماژول هیدرولیک حل شده و سرعت‌ها در کانال بدست می‌آید. آنگاه سرعت‌ها بر اساس نیاز شبکه ماژول آلودگی در ماژول سرعت متوسط، بدست می‌آیند. سپس سرعت‌ها در ماژول آلودگی قرار گرفته و در نهایت مقدار غلظت در طول کانال بدست می‌آید. با افزایش گام زمانی، مراحل ذکر شده دوباره تکرار می‌شوند تا زمان شبیه سازی به انتها برسد. برای شبیه سازی موضوع از نرم افزار MATLAB ۷,٦,۰ (۲۰۰۸) استفاده شده است.

مدل ریاضی مسئله

ماژول هیدرولیک

این ماژول شامل دو معادله اصلی حاکم بر جریان سیال در کانال ۱ – بعدی یعنی معادلات پیوستگی و ممنتوم به ترتیب زیر می‌باشد [۴]:

معادله پیوستگی:

$$B\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (۲)$$

معادله ممنتوم:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial h}{\partial x}+gA(S_f-S_0)=0 \qquad (۳)$$

A: مساحت مقطع عرضی کانال

B: عرض کانال

g: شتاب گرانش

h: ارتفاع آب

Q: دبی کانال

S_0: شیب کف کانال

S_f: شیب خط انرژی

t: زمان

x: محور طولی

---

[۲] Finite Difference Method (FDM)

[۳] Finite Volume Method (FVM)

[۴] Finite Element Method (FEM)

[۵] Boundary Element Method

[۶] Spectral Method

این معادلات برای کانال با مقطع مستطیلی بصورت زیر ساده می‌شوند [۴]. برای کانال با مقطع مستطیلی افقی، $S_0 = 0$ خواهد شد.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right)+\frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}+gh\left(\frac{q^2n^2}{h^{10/3}}-S_0\right)=0 \qquad (۵)$$

q: دبی کانال در واحد عرض
n: ضریب زبری کانال[۵]

ماژول انتقال آلودگی

این ماژول شامل معادله انتقال – انتشار به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial uc}{\partial x}=\varepsilon\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] \qquad (۶)$$

c: سرعت جریان در راستای محور طولی
ε: ضریب انتشار مولکولی

منقطع سازی معادلات [۶]

ماژول هیدرولیک

معادله پیوستگی

منقطع سازی این معادله به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و پیشرو در مکان (FTFS[۷]) و در حالت صریح[۸] به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{h_i^{m+1}-h_i^m}{\Delta t}+\frac{q_{i+1}^{m+1}-q_i^m}{\Delta x}=0 \qquad (۷)$$

$$h_i^{m+1}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}(q_{i+1}^m-q_i^m)+h_i^m \qquad (۸)$$

در سطح زمانی m+۱ همه h ها بدست می‌آیند.

معادله ممنتوم

منقطع سازی این معادله به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و مرکزی در مکان (FTCS[۹]) و در حالت ضمنی[۱۰] بر حسب بخش‌های مختلف آن، به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{q_{i+1}^m-\overline{q}_i^m}{\Delta t} \qquad (۹)$$

برای پایداری حل و طبق تجربه، رابطه زیر پیشنهاد می‌شود :

$$\overline{q}_i^m=\frac{q_1^m-q_3^m}{2} \qquad (۱۰)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{q_i^{m+1}-\overline{q}_i^m}{\Delta t}=\frac{q_i^{m+1}-(\frac{q_i^m+q_{i-1}^m}{2}+\frac{q_i^m+q_{i+1}^m}{2})/2}{\Delta t}=\frac{q_i^{m+1}}{\Delta t}-\frac{q_{i-1}^m+2q_i^m+q_{i+1}^m}{4\Delta t} \qquad (۱۱)$$

---

[۷] Forward Time Forward Space
[۸] Explicit
[۹] Forward Time Centered Space
[۱۰] Implicit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{q^2}{h}\Big|_3^{m+1}-\frac{q^2}{h}\Big|_1^{m+1}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\left(\frac{q_i^{m+1}+q_{i+1}^{m+1}}{2}\right)^2}{h_3^{m+1/2}}-\frac{\left(\frac{q_i^{m+1}+q_{i-1}^{m+1}}{2}\right)^2}{h_1^{m+1/2}}\right] \tag{۱۲}$$

$$\frac{g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}=\frac{g}{2}\left(\frac{h^2|_3-h^2|_1}{\Delta x}\right)=\frac{g}{2}\left(\frac{\left(h_3^{m+1/2}\right)^2-\left(h_1^{m+1/2}\right)^2}{\Delta x}\right) \tag{۱۳}$$

$$gh\left(\frac{q^2n^2}{h^{10/3}}-S_0\right)=gh|_2\left(\frac{q^2|_i^{m+1}n^2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)=g\left(\frac{h_1^{m+1/2}+h_3^{m+1/2}}{2}\right)\left[\frac{q_i^{m+1^2}n^2}{\left(\frac{h_1^{m+1/2}+h_3^{m+1/2}}{2}\right)^{10/3}}-S_0\right] \tag{۱۴}$$

در معادلات بالا از تعاریف زیر استفاده شده است :

$$h|_1=h_1^{m+1/2}=\frac{h_i^m+h_i^{m+1}}{2} \tag{۱۵}$$

$$h|_3=h_3^{m+1/2}=\frac{h_{i+1}^m+h_{i+1}^{m+1}}{2} \tag{۱۶}$$

$$h|_2=\frac{h|_1+h|_3}{2} \tag{۱۷}$$

$$\overline{q}_i^m=\frac{\frac{q_i^m+q_{i-1}^m}{2}+\frac{q_i^m+q_{i+1}^m}{2}}{2}=\frac{q_{i-1}^m+2q_i^m+q_{i+1}^m}{4} \tag{۱۸}$$

برای پایداری حل و طبق تجربه در رابطه های ۱۲، ۱۳ و ۱۴، مقادیر h در حالت نیمه ضمنی[۱۱]، منقطع سازی شده‌اند. با کنار هم گذاشتن تک تک جملات منقطع شده داریم :

$$\frac{q_i^{m+1}-\overline{q}_i^m}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{q^2}{h}\Big|_3^{m+1}-\frac{q^2}{h}\Big|_1^{m+1}\right)+\frac{g}{2}\left(\frac{h^2|_3-h^2|_1}{\Delta x}\right)+gh\Big|_2\left(\frac{q^2|_i^{m+1}n^2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)=0 \tag{۱۹}$$

$$q_i^{m+1}-\overline{q}_i^m+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{\left(\frac{q_i^{m+1}+q_{i+1}^{m+1}}{2}\right)^2}{h|_3}-\frac{\left(\frac{q_i^{m+1}+q_{i-1}^{m+1}}{2}\right)^2}{h|_1}\right]+\frac{g\Delta t}{2}\left(\frac{h^2|_3-h^2|_1}{\Delta x}\right)+g\Delta t.h\Big|_2\left(\frac{q_i^{m+1^2}n^2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)=0 \tag{۲۰}$$

$$q_i^{m+1}-\overline{q}_i^m+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{q_i^{m+1^2}+q_{i+1}^{m+1^2}+2q_i^{m+1}q_{i+1}^{m+1}}{4h|_3}-\frac{q_i^{m+1^2}+q_{i-1}^{m+1^2}+2q_i^{m+1}q_{i-1}^{m+1}}{4h|_1}\right] \tag{۲۱}$$

$$+\frac{g\Delta t}{2}\left(\frac{h^2|_3-h^2|_1}{\Delta x}\right)+g\Delta t.h\Big|_2\left(\frac{n^2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)q_i^{m+1^2}-S_0.g\Delta t.h|_2=0$$

$$\left(-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{q_{i-1}^{m+1}}{4h|_1}\right)q_{i-1}^{m+1}+\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{q_i^{m+1}+2q_{i+1}^{m+1}}{4h|_3}-\frac{q_i^{m+1}+2q_{i-1}^{m+1}}{4h|_1}\right)+g\Delta t.n^2\left(\frac{h|_2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)q_i^{m+1}\right)q_i^{m+1} \tag{۲۲}$$

---

[۱۱] Semi-Implicit

$$+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{q_{i+1}^{m+1}}{4h|_3}\right)q_{i+1}^{m+1}=\overline{q}_i^m-\frac{g}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^2|_3-h^2|_1\right)+S_0.g\Delta t.h|_2 \quad (۲۳)$$

طبق آخرین معادله، مشاهده می‌شود که ضرایب متغیرهای q همان ضرایب مقادیر مجهول ماتریس سه قطری (روش توماس) هستند که به شرح زیر می‌باشند.

$$A=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{q_{i-1}^{m+1}}{4h|_1} \quad (۲۴)$$

$$B=1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{q_i^{m+1}+2q_{i+1}^{m+1}}{4h|_3}-\frac{q_i^{m+1}+2q_{i-1}^{m+1}}{4h|_1}\right)+g\Delta t.n^2\left(\frac{h|_2}{h^{10/3}|_2}-S_0\right)q_i^{m+1} \quad (۲۵)$$

$$C=\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{q_{i+1}^{m+1}}{4h|_3} \quad (۲۶)$$

$$D=\overline{q}_i^m-\frac{g}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h^2|_3-h^2|_1\right)+S_0.g\Delta t.h|_2 \quad (۲۷)$$

این معادله حالت عمومی تعیین مقدار دبی در طول کانال بوده که بصورت زیر ساده می‌شود.

$$Aq_{i-1}^{m+1}+Bq_i^{m+1}+Cq_{i+1}^{m+1}=D \quad (۲۸)$$

مقدار دبی در مرز سمت چپ، طبق هیدروگراف بالادست مشخص است. بنابراین معادلات بالا به شرح زیر ساده می‌شوند.

$$q_{i-1}^{m+1}=q_{Hydrograph}^{m+1} \quad (۲۹)$$

$$Bq_i^{m+1}+Cq_{i+1}^{m+1}=D-Aq_{Hydrograph}^{m+1} \quad (۳۰)$$

ماژول انتقال آلودگی

معادله انتقال – انتشار

منقطع سازی معادله انتقال – انتشار به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و مرکزی در مکان (FTCS) و در حالت ضمنی، به شرح زیر می‌باشد.

$$c_i^{m+1}\left(1+\frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}\right)=c_{i-1}^{m+1}\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right)+c_i^m+c_{i+1}^{m+1}\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right) \quad (۳۱)$$

طبق معادله زیر، مشاهده می‌شود که ضرایب متغیرهای c همان ضرایب مقادیر مجهول ماتریس سه قطری (روش توماس) هستند که به شرح زیر می‌باشند :

$$\left(-\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right)c_{i-1}^{m+1}+\left(1+\frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}\right)c_i^{m+1}+\left(-\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right)c_{i+1}^{m+1}=c_i^m \quad (۳۲)$$

$$A=-\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x} \quad (۳۳)$$

$$B=1+\frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} \quad (۳۴)$$

$$C=-\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x} \quad (۳۵)$$

$$D=c_i^m \quad (۳۶)$$

این معادله حالت عمومی تعیین مقدار غلظت در طول کانال بوده که بصورت زیر ساده می‌شود.

$$Ac_{i-1}^{m+1}+Bc_i^{m+1}+Cc_{i+1}^{m+1}=D \quad (۳۷)$$

مقدار غلظت در مرز سمت چپ، طبق الگوی اعمال غلظت بدست می‌آید. بنابراین معادلات بالا به شرح زیر ساده می‌شوند.

$$c_{i-1}^{m+1} = c_0 \tag{۳۸}$$

$$Bc_i^{m+1} + Cc_{i+1}^{m+1} = D - Ac_0 \tag{۳۹}$$

البته مقدار c_0 نیز ثابت نبوده و از تابع زیر پیروی می‌کند :

$$c_0 \begin{cases} 100 & T_1 \le t \le T_2 \\ 0 & \text{Other times} \end{cases} \tag{۴۰}$$

در مرز سمت راست با فرض اینکه شرایط مرزی اثرگذارنده روی بالادست نداریم، تغییرات غلظت در گره آخر برابر گره های سمت چپ آن است و رابطه زیر برقرار است :

$$c_{i+1}^{m+1} = 2c_i^{m+1} - c_{i-1}^{m+1} \tag{۴۱}$$

$$(A - C)c_{i-1}^{m+1} + (B + 2C)c_i^{m+1} = D \tag{۴۲}$$

شرط پایداری

ماژول هیدرولیک

طبق معادلات منقطع شده، متغیرهای دو معادله پیوستگی و ممنتوم به یکدیگر وابسته هستند و حل پی در پی معادلات مزبور، جواب مسئله را ارایه می‌دهند. البته ضرایب Δt، Δx، g و n همگی مثبت هستند و همانطوریکه در قسمت منقطع سازی معادلات ذکر شد، برای پایداری حل از حالت نیمه ضمنی[۱۲] نیز استفاده شده است. بنابراین بررسی پایداری حل معادلات مزبور به سادگی ممکن نبوده و تنها راه بررسی عدم منفی شدن مقادیر ارتفاع (h) و پیوستگی (Q) در برنامه طی روندهای تکراری است. در صورتیکه متغیرهای در نظر گرفته شده برای Δt و Δx صحیح باشند، در کلیه زمان‌ها جواب‌های درستی از برنامه نتیجه می‌شود. روند تعیین Δt و Δx نیز به یکدیگر وابسته می‌باشند. بطور نمونه طبق معادله منقطع شده پیوستگی، اگر مقدار q_{i+1} بزرگتر از مقدار q_i باشد آنگاه ممکن است که مقدار h_i منفی شود! این حالت در زمانی احتمال رخداد دارد که پیک هیدروگراف از نقطه i گذشته و به نقطه $i+1$ رسیده باشد.

$$h_i^{m+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_{i+1}^m - q_i^m\right) + h_i^m \tag{۴۳}$$

بررسی این حالت برای معادله ممنتوم به سادگی معادله پیوستگی نبوده و به جملات بیشتری وابستگی دارد. البته این نتیجه به مقادیر Δt، Δx بستگی دارد. در صورتیکه دقت مسئله، گام‌های مکانی Δx را به ما دیکته کند، مقدار Δt نباید از حدی بزرگتر شود که حاصل این معادله منفی شود و این حالت باید در طول زمان اجرای برنامه تعیین شود. اما هر چقدر مقدار Δt یا Δx کاهش یابد، زمان اجرای برنامه طولانی‌تر می‌شود و برعکس.

ماژول انتقال آلودگی

منقطع سازی معادله انتقال – انتشار به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و مرکزی در مکان (FTCS) و در حالت صریح، به شرح زیر می‌باشد.

$$c_i^{m+1} = c_{i-1}^m\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right) + c_i^m\left(1 - \frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}\right) + c_{i+1}^m\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right) \tag{۴۴}$$

نظر به اینکه کلیه متغیرهای ε، u، Δx و Δt مثبت می‌باشند، بنابراین کافی است شرط پایداری را برای ضرایب زیر بیابیم :

$$\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u_i\Delta t}{2\Delta x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x < \frac{2\varepsilon}{u_i} \tag{۴۵}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{2\varepsilon}{u_i^2} \tag{۴۶}$$

[۱۲] Semi-Implicit

منقطع سازی معادله انتقال – انتشار به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و مرکزی در مکان (FTCS) و در حالت ضمنی، به شرح زیر می‌باشد.

$$c_i^{m+1}\left(1+\frac{2\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}\right)=c_{i-1}^{m+1}\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right)+c_i^m+c_{i+1}^{m+1}\left(\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}\right) \qquad (۴۷)$$

نظر به اینکه کلیه متغیرهای ε، u، Δx و Δt مثبت می‌باشند، بنابراین فقط کافی است شرط پایداری را برای ضریب زیر بیابیم :

$$\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{u_i\Delta t}{2\Delta x}>0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x<\frac{2\varepsilon}{u_i} \qquad (۴۸)$$

مزیت روش ضمنی نسبت به صریح، در تامین ساده تر شرط پایداری می‌باشد. پایداری روش صریح نیازمند ایجاد محدودیت برای دو عامل Δx و Δt بوده درحالی‌که پایداری روش ضمنی فقط به محدودیت عامل Δx بستگی دارد. بنابراین از روش ضمنی برای منقطع سازی معادله انتقال – انتشار استفاده شده است. طبق شرط پایداری معادله انتقال – انتشار در حالت ضمنی، رابطه زیر می‌بایست برقرار باشد. با فرض مقـادیر ε و u به شرح زیر داریم :

$$\varepsilon = 0.2 \qquad (۴۹)$$

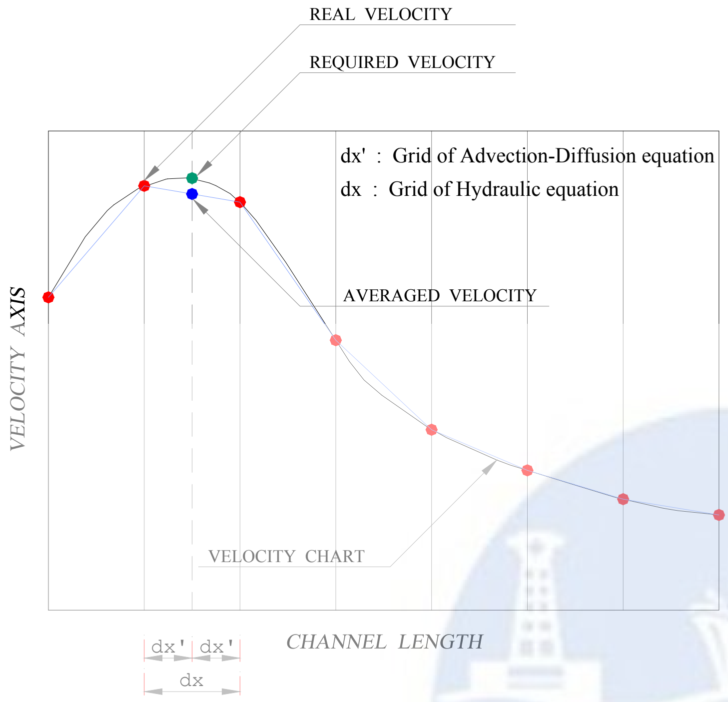
$$u = 10 \ \ m/s \qquad (۵۰)$$

$$\Delta x<\frac{2\varepsilon}{u_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta x<0.04 \ \ m \qquad (۵۱)$$

مقدار محاسبه شده برای Δx، بسیار کوچک بوده و با توجه به طول ۳۰ کیلومتری کانال، زمان محاسبه ماژول هیـدرولیک بـرای تعیـین مقـادیر سرعت را بسیار افزایش می‌دهد. برای دستیابی به مقادیر سرعت با دقت کافی و زمان تحلیل مناسب، از روش به شرح زیر استفاده شد.

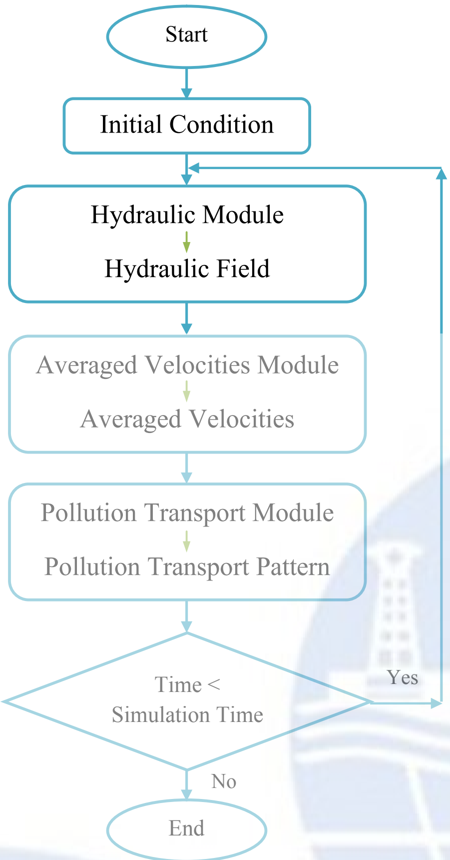
در شکل ۱، نمودار نمونه سرعت محاسبه شده طبق ماژول هیدرولیک ارایه شده است. سرعت‌های محاسباتی طبـق مـاژول هیـدرولیک در گـره های شبکه فرضی معادله هیدرولیک (dx) مشخص شده‌اند. مقادیر سرعت لازم می‌بایست در شبکه معادله انتقال – انتشار (با گام 'dx) بدسـت آیند. ولی مقادیر سرعت در این نقاط محاسبه نشده‌اند. بنابراین از مقدار متوسط گیری شده شبکه های (معادله هیدرولیک) اطراف جهـت تعیـین مقدار سرعت در نقطه مورد نظر استفاده می‌شود. هرچند این روش دارای خطا بوده ولی مقدار آن ناچیز است.

روند کار بدین گونه است که اندازه شبکه معادله هیدرولیک (dx) بر اسـاس مضـربی از معادلـه انتقـال – انتشـار ('dx) در نظـر گرفتـه شـده و الگوریتم مورد نظر (Averaged Velocities Module) بصورت خطی، مقادیر سرعت مورد نظر را درون‌یابی می‌کند.



شکل ۱) نحوه بدست آوردن سرعت متوسط معادله انتقال – انتشار بر اساس سرعت محاسبه شده طبق ماژول هیدرولیک

برای حل از مدل Uncoupled استفاده شده است. شمای الگوریتم حل مسئله مطابق شکل ۲ است. در این روش هر معادله بطور جداگانه حل شده و فرض می‌شود در هر گام زمانی، جریان ماندگار است و سرعت‌ها تغییری نمی‌کنند. ابتدا ماژول هیدرولیک حل شده و سرعت‌ها در کانال بدست می‌آید. آنگاه سرعت‌ها بر اساس نیاز شبکه ماژول آلودگی در ماژول سرعت متوسط، بدست می‌آیند. سپس سرعت‌ها در ماژول آلودگی قرار گرفته و در نهایت مقدار غلظت در طول کانال بدست می‌آید. با افزایش گام زمانی، مراحل ذکر شده دوباره تکرار می‌شوند تا زمان شبیه سازی به انتها برسد.



شکل ۲) شمای الگوریتم حل مسئله با استفاده از مدل Uncoupled

در ابتدای کار، مقادیر اولیه در قسمت Initial conditions برنامه جاگذاری می‌شوند. برنامه محاسبات را برای تعیین مقدار ارتفاع (h) طبق معادله منقطع شده پیوستگی در تمامی نقاط شبکه انجام می‌دهد. سپس بر اساس معادله منقطع شده ممنتوم، مقدار دبی (q) در تمامی نقاط شبکه بدست می‌آید. البته روند تعیین دبی به سادگی حالت صریح نبوده و نیازمند حل معادلات ضمنی است. طبق معادلات منقطع شده، مشاهده می‌شود که متغیرهای درجه دوم نیز در جمله‌ها وجود دارند. برای استفاده از روش ماتریس سه قطری (توماس) به متغیرهایی از درجه یک نیازمندیم. بنابراین از خطی سازی معادلات استفاده می‌کنیم. روش خطی سازی بدین گونه می‌باشد که از متغیرهای مجهول از درجه یک بر حسب سایر جملات، فاکتورگیری می‌کنیم و ماتریس سه قطری را تشکیل می‌دهیم. بدیهی است که بعضی از متغیرهای مسئله در ضرایب مقادیر مجهول (A, B, C) نیز موجود می‌باشند. حل چنین مسئله ای نیازمند حل‌های تکراری است. روش کار بدین گونه است که ابتدا مقادیر اولیه ای برای دبی (q) نقاط کانال فرض کرده، آنگاه بر اساس این فرضیه، ضرایب مقادیر مجهول (A, B, C) ماتریس سه قطری را تشکیل داده و سپس ماتریس سه قطری را حل می‌کنیم. با حل ماتریس سه قطری، مقادیر جدید دبی (q) بدست می‌آیند. حال دوباره بر اساس مقادیر جدید دبی، ضرایب مقادیر مجهول (A, B, C) ماتریس سه قطری را تشکیل داده و ماتریس سه قطری را دوباره حل کرده و دبی جدیدتر را می‌یابیم. این روند تکراری در برنامه تا رسیدن اختلاف دو دبی متناظر به یک حد مشخص خطای مجاز[۱۳] ادامه می‌یابد. البته در برنامه ارایه شده، کنترلی برای جلوگیری از حلقه ناتمام نیز در نظر گرفته شده است، بدین صورت که از متغیری به عنوان حداکثر تکرار برای رسیدن به یک اختلاف مجاز استفاده می‌شود. به عنوان مثال، حداکثر تعداد تکرار برای محدود نمودن دو دبی متوالی متناظر، برابر ۱۰ فرض شده است.

برنامه در گام زمانی بعدی، از مقادیر دبی در تعیین مقادیر ارتفاع استفاده کرده و از مقادیر ارتفاع جدید در تعیین دوباره مقادیر دبی استفاده می‌کند. این روند بر اساس تعداد تکرار برای رسیدن به میزان زمان کل تعیین شده، انجام می‌یابد. در ابتدای این حلقه های تکراری (تعیین ارتفاع و دبی)، مقدار دهی نقاط مرزی بطور مرتب صورت می‌گیرد تا با هر بار تکرار، مقادیر این محدوده‌ها بر اساس شرایط مرزی اصلاح شوند.

مرز بالادست

با استفاده از معادله پیوستگی مقدار $h_{\frac{1}{2}}$ بدست می‌آید و آنگاه از هیدروگراف، مقدار q_1 در زمان $m+1$ را می‌توان یافت.

---

۱۳ Tolerance

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad (۵۲)$$

منقطع سازی این معادله به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و پیشرو در مکان (FTFS) و در حالت صریح، به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{h_{1/2}^{m+1}-h_{1/2}^{m}}{\Delta t}+\frac{q_2^m-q_1^m}{\Delta x}=0 \quad (۵۳)$$

و در نهایت

$$h_{1/2}^{m+1}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_2^m-q_1^m\right)+h_{1/2}^{m} \quad (۵۴)$$

مرز پایین دست

با استفاده از معادله پیوستگی و مشخص بودن دبی پایین دست (q_n) در زمان m و $h_{n-½}$ در زمان m، مقدار $h_{n-½}$ در زمان m+۱ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad (۵۵)$$

منقطع سازی این معادله به روش تفاضل محدود از نوع پیشرو در زمان و پیشرو در مکان (FTFS) و در حالت صریح، به شرح زیر می‌باشد.

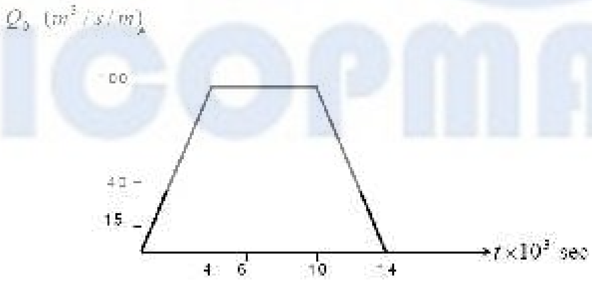
$$\frac{h_{n-1/2}^{m+1}-h_{n-1/2}^{m}}{\Delta t}+\frac{q_n^m-q_{n-1}^m}{\Delta x}=0 \quad (۵۶)$$

و در نهایت

$$h_{n-1/2}^{m+1}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(q_n^m-q_{n-1}^m\right)+h_{n-1/2}^{m} \quad (۵۷)$$

نتایج محاسبات

ارتفاع اولیه در یک کانال مستطیلی ($S_\circ = \cdot$) برابر ۲ متر است. طول کانال ۳۰ کیلومتر و در انتهای کانال، پله در نظر گرفته شده است (در پایین دست شرایط مرزی اثرگذارنده بر روی بالادست نداریم) که منحنی دبی – اشل آن در ادامه داده شده است. دبی اولیه کانال را صفر فرض کنید. شرایط مرزی در بالادست کانال بصورت هیدروگراف نشان داده شده در شکل ۳ می‌باشد.



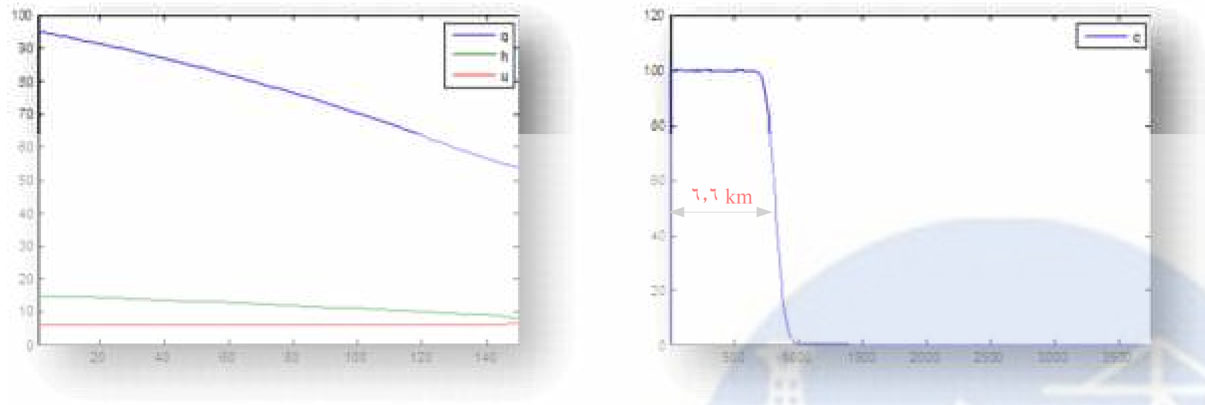
شکل ۳) شرایط مرزی در بالادست کانال

شرایط مرزی در پایین دست کانال عبارتست از :

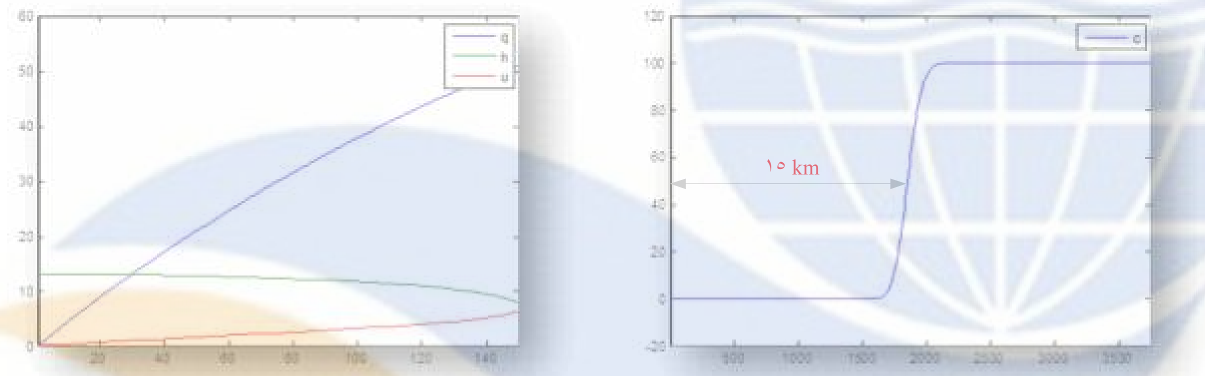
$$Q_i=(h_{i-1}-h_0)\sqrt{g\ h_{i-1}} \quad (۵۸)$$

ورودی غلظت به صورت نقطه ای و در یک زمان معین بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ ثانیه، در ابتدای کانال رها شده است. برای بررسی غلظت آلودگی (c) در طول کانال از نمودارهایی در زمان‌های مختلف استفاده شده است. نمودارهای مورد نظر در شکل‌های ۴ الی ۵ ارایه شده‌اند. زمان مورد

استفاده در نمودارها، شامل افزایش، کاهش هیدروگراف و زمان شروع و خاتمه پخش آلودگی در کانال می‌شود. علاوه بر نمودار غلظت (c)، نمودارهای دبی (q)، ارتفاع سیال (h) و سرعت (u) نیز که از ماژول هیدرولیک بدست آمده‌اند، ارایه شده‌اند که جهت بررسی تحلیلی مسئله بکار می‌روند.



شکل ٤) نمودار دبی (q)، ارتفاع سیال (h)، سرعت (u) و غلظت (c) در طول کانال و در زمان ٦٠٠٠ ثانیه

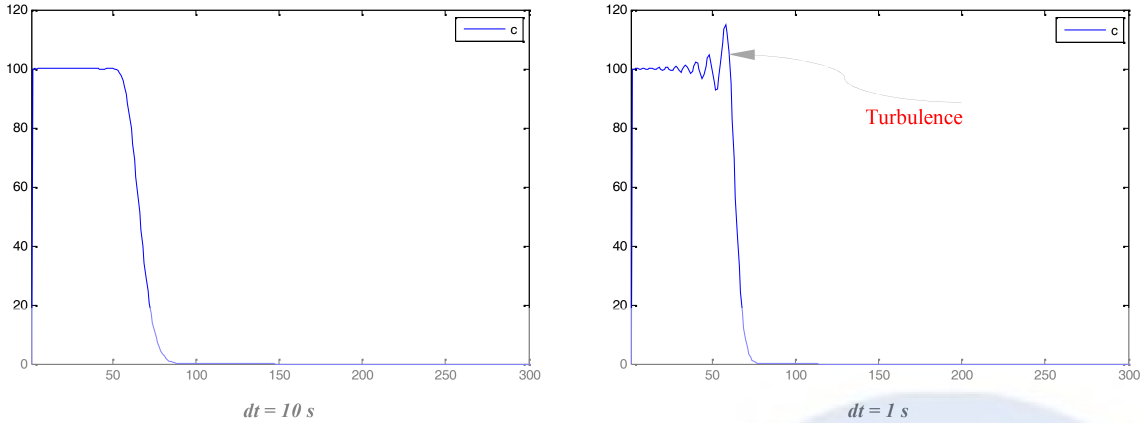


شکل ٥) نمودار دبی (q)، ارتفاع سیال (h)، سرعت (u) و غلظت (c) در طول کانال و در زمان ١٤٠٠٠ ثانیه

تحلیل حساسیت

محاسبات بر اساس بعد شبکه معادله هیدرولیک dx = ٢٠٠ m انجام شده‌اند. در شکل ۶ نمودار غلظت آلودگی (c) در طول کانال و بعد شبکه معادله انتقال – انتشار dx' = ١٠٠ m نمایش داده شده است.

طبق شرط پایداری، بیان شد که شرایط پایداری معادله انتقال – انتشار فقط به میزان بعد شبکه آن (dx') وابسته می‌باشد. البته نتایج تحلیل‌ها نیز شبه ای در این مورد بوجود نمی‌آورند، چون تغییرات گام زمانی (dt) بر معادله هیدرولیک اثر گذار بوده و نتیجه آن در سرعت‌های سیال موجود در کانال، بروز کرده و این باعث می‌شود که شرط پایداری معادله انتقال – انتشار نیز تغییر کند. همانطوریکه در شکل ۶ مشاهده می‌شود با کاهش گام زمانی (dt) اغتشاش بیشتر شده است.



شکل ٦) نمودار غلظت آلودگی (c) در طول کانال و بعد شبکه معادله انتقال – انتشار dx' = ۱۰۰ m

نتیجه گیری

در ماژول انتقال آلودگی، مزیت روش ضمنی نسبت به صریح، در تامین ساده تر شرط پایداری می‌باشد. پایداری روش صریح نیازمند ایجاد محدودیت برای دو عامل Δx و Δt بوده درحالی‌که پایداری روش ضمنی فقط به محدودیت عامل Δx بستگی دارد. بنابراین از روش ضمنی برای منقطع سازی معادله انتقال – انتشار استفاده شده است.

الگوریتم ماژول سرعت متوسط ابداعی، دارای کارایی بالایی می‌باشد بطوریکه با تخفیف مقدار کوچک خطا در روند عملیات، هزینه محاسبات را بسیار پایین آورده و روند محاسبات را برای کامپیوترهای متداول، بسیار سریع‌تر می‌نماید.

همانطوریکه مشاهده می‌شود در صورت افزایش بعد شبکه معادله انتقال – انتشار (dx') میزان آشفتگی نمودار میزان غلظت، افزایش می‌یابد. در این صورت اگر میزان گام زمانی (dt) نیز کاهش یابد، میزان آشفتگی بیشتر می‌شود.

برای افزایش دقت محاسبه، کم نمودن میزان بعد شبکه معادله انتقال – انتشار (dx') راهگشا نبوده و میزان گام زمانی (dt) نیز بر روی آن اثر می‌گذارد.

تشکر و قدردانی

نگارنده بر خود لازم می‌بیند از تلاش‌های همسر مهربانم، سرکار خانم محدثه محمدی که با تشویق، کمک و پیگیری مرا در ارائه این مقاله یاری نمودند، قدردانی نماید.

مراجع

[۱] وفایی، فریدون و درواری، رکسانا و مهدی زاده محلی، سجاد و اردلان، محمد حسین، (۱۳۸۹) بررسی عوامل موثر در پخش آلودگی تالاب‌های ساحلی به منظور مدیریت تصفیه فاضلاب مناطق ساحلی، نهمین همایش بین المللی سواحل، بنادر و سازه های دریایی، ایران، ۸ الی ۱۰ آذر.

[۲] زراتی، امیررضا و هادیان، محمدرضا، (۱۳۸۸) مدل‌های عددی آب‌های کم عمق و کاربرد آنها در مهندسی رودخانه و سواحل (معادلات حاکم و روش‌های حل)، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)، ۵۰۰، ۸۲–۸۱ .

[۳] Hoffman, J. D. (۲۰۰۱), Numerical Methods for Engineers and Scientists, ۲ ed., Marcel Dekker, Inc., ۷-۹.

[۴] کلاهدوزان، مرتضی، (۱۳۸۹) روش های عددی در مهندسی دریا (جزوه درسی مقطع کارشناسی ارشد رشته سازه‌های دریایی)، دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران).

[۵] ابریشمی، جلیل و حسینی، محمود، (۱۳۷۷) هیدرولیک کانال‌های باز، انتشارات دانشگاه امام رضا، چاپ ششم، ۱۲۶–۱۱۹.

[۶] Tannehill, J.C., Anderson, D.A., Pletcher, R.H. (۱۹۹۷), Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, ۲ ed., Taylor & Francis.

One-Dimensional Numerical Modeling of Flow and Pollution in Canal with Finite Difference Method and Uncoupled Model

M.n Mehr Motlagh
Master of Marine Structures, Amir Kabir University
M3_Motlagh@yahoo.com

Abstract:

When pollution discharges to an environment from a point source; first, based on pollutants characteristics, temperature, thickness of the other materials in the water, wind blow, and other factors, it starts distributing in horizontal vertical direction. Simultaneous with this phenomenon, the flow takes the pollution in water movement direction. This phenomenon which only happens under the effect of environmental currents is called transmission. Since, the equations governing the fluid motion are in form of nonlinear system of equations, it will be impossible to analytically solve them; so, these equations must be solved numerically. Finite difference method is one of the practical methods for solving nonlinear equations. Taylor Series is the basis of finite difference method. In the present study, the artificial pollution in entrance of a canal, hydraulic module, and uncoupled pollution are investigated. In this method, every equation is solved separately, and it is supposed that in each timestep, the fluid is perdurable and the speed doesn't change. First, the hydraulic module was solved and the speed in canal was obtained. Then, the speeds were obtained based on the need of pollution module network in average speed module. After that, speeds were put into the pollution module and finally the amount of density was obtained in canal length. With the increase of time step, the above mentioned steps repeat till the simulation time ends. MATLAB software was used for simulation. The investigation reveals that the algorithm of innovative average speed module has high efficiency so that with little error in operation, it highly decreases the calculation costs and accelerates the calculation process for conventional computers.

Key words: numerical modeling, finite difference method, discretization, pollution, Canale, Uncoupled model