



مرکز بررسی اطلاعات و پژوهش

سازمان بنادر و دریانوردی به عنوان تنها مرجع حاکمیتی کشور در امور بندری، دریایی و کشتی رانی بازرگانی به منظور ایفای نقش مرجعیت دانشی خود و در راستای تحقق راهبردهای کلان نقشه جامع علمی کشور مبنی بر "حمایت از توسعه شبکه‌های تحقیقاتی و تسهیل انتقال و انتشار دانش و سامان‌دهی علمی" از طریق "استانداردسازی و اصلاح فرایندهای تولید، ثبت، داوری و سنجش و ایجاد بانک‌های اطلاعاتی یکپارچه برای نشریات، اختراعات و اکتشافات پژوهشگران"، اقدام به ارایه این اثر در سایت SID می‌نماید.



سازمان بنادر و دریانوردی





نهمین همایش بین المللی سواحل، بنادر و سازه های دریایی  
**ICOPMAS 2010**  
 10-8 آذر ماه ( تهران )



## حل تحلیلی shoaling موج بر اساس تئوری موج کنوئیدال

هادی صادقیان، دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه تهران، [hadi.sadeghian1982@gmail.com](mailto:hadi.sadeghian1982@gmail.com)

پیمان بدیعی، استادیار، دانشگاه تهران، [pbadiee@ut.ac.ir](mailto:pbadiee@ut.ac.ir)

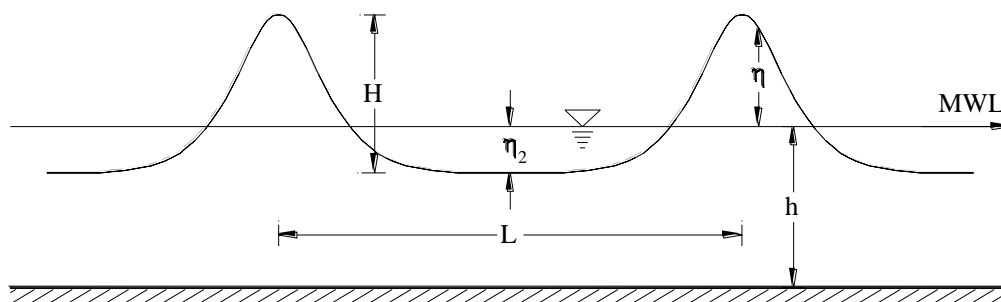
کلید واژه‌ها: موج کنوئیدال، موج بوزینسک، حل تحلیلی، shoaling

### 1- مقدمه

تئوری موج کنوئیدال که از معادلات ارائه شده توسط Korteweg و de Vries برای امواج با شکل ثابت استخراج شده است، خصوصیات امواج را بر حسب توابع بیضوی ژاکوبی توصیف می‌نماید. حد موج کنوئیدال در آب عمیق، تئوری موج دامنه کوتاه و حد آن در آب‌های کم عمق، تئوری موج یکتایی (solitary) می‌باشد [1]. مزیت تئوری موج کنوئیدال داشتن حل تحلیلی برای امواج بوزینسک غیرخطی (weakly nonlinear) با شکل ثابت می‌باشد. بنابراین، با استفاده از تئوری موج کنوئیدال می‌توان برخی از خصوصیات امواج بوزینسک را استخراج نمود. در تئوری موج کنوئیدال بر خلاف تئوری موج خطی، خصوصیات موج مانند طول موج و سرعت ظاهری موج نه تنها به پریرود موج و عمق آب بلکه به ارتفاع موج نیز وابسته است [2]. در این مقاله حل تحلیلی تغییر ارتفاع موج کنوئیدال در اثر کم شدن عمق آب به دست آمده است. به عبارت دیگر، shoaling امواج کنوئیدال با صرف نظر از اتلاف انرژی و بر اساس اصل بقای انرژی برای حالتی که امواج به صورت عمود بر ساحل با شیب ملایم و خطوط تراز مستقیم و موازی می‌تابند، به صورت تحلیلی به دست آمده است [3 و 4]. حل تحلیلی shoaling امواج کنوئیدال و خطی برای یک حالت خاص مقایسه شده است که نشانگر افزایش حدود 5 درصدی ارتفاع موج بر اساس تئوری موج کنوئیدال نسبت به تئوری موج خطی در انتهای شیب می‌باشد. نتیجه حل تحلیلی همچنین با حل عددی معادلات بوزینسک در مایک 21 مقایسه شده است که انطباق قابل قبولی مشاهده می‌شود.

### 2- روابط حاکم بر تئوری موج کنوئیدال

بر اساس طرح نشان داده شده (شکل 1)، برخی روابط حاکم برای مشخصات امواج در تئوری موج کنوئیدال مانند پروفیل سطح آب و طول موج ارائه شده است.



شکل 1) مشخصات امواج در تئوری موج کنوئیدال

پروفیل سطح آب ( $\eta$ ) بوسیله رابطه (1) بیان می‌گردد [2]:

Archive of SID

$$\eta = \eta_2 + H cn^2 \left( 2K \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right), m \right) \quad (1)$$

$$\eta_2 = H \left[ \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{E}{K} \right) - 1 \right] \quad (2)$$

که:

$\eta_2$ : مقدار تراز سطح آب در قعر موج

H: ارتفاع موج

T: پریود موج

L: طول موج

h: عمق آب

cn: تابع بیضوی ژاکوبی

K: انتگرال کامل بیضوی نوع اول

E: انتگرال کامل بیضوی نوع دوم

و پارامتر m تابعی از عدد اورسل بوده که از رابطه (3) به دست می آید [2]:

$$U_r = \frac{HL^2}{h^3} = \frac{16}{3} mK^2 \quad (3)$$

K و E تابعی از m و در نتیجه تابعی از عدد اورسل می باشند. در پیوست (الف) روابط ارائه شده برای به دست آوردن K و E ارائه شده است.

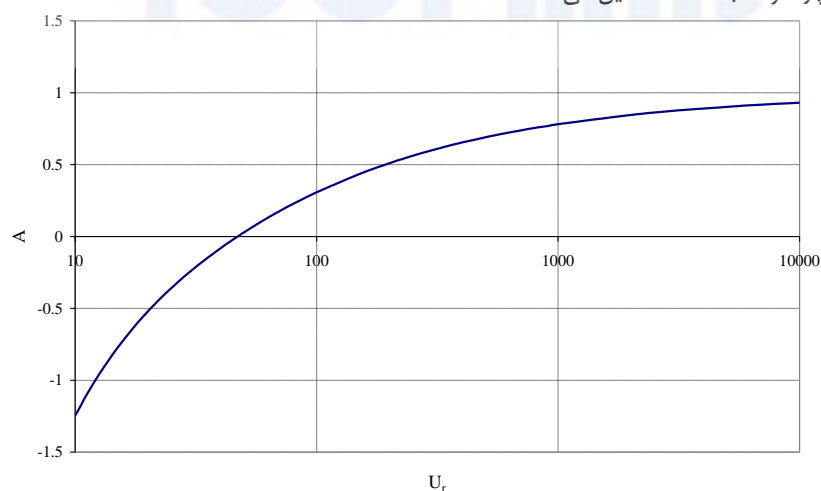
سرعت ظاهری (c) و طول موج نیز از روابط (4) و (6) به دست می آیند [2]:

$$\frac{c^2}{gh} = 1 + \frac{H}{h} A \quad (4)$$

$$A = \frac{2}{m} - 1 - \frac{3E}{mK} \quad (5)$$

$$L = cT \quad (6)$$

پارامتر A نیز از طریق توابع K و E و متغیر m تابعی از عدد اورسل می باشد. تغییرات پارامتر A در مقابل عدد اورسل در (شکل 2) رسم شده است. همانطور که مشاهده می گردد به ازای اعداد اورسل کوچکتر از 47 مقدار A منفی و  $c < \sqrt{gh}$  می باشد. همچنین به ازای اعداد اورسل بسیار بالا ( $U_r \rightarrow \infty$ ) پارامتر A به سمت 1 میل می کند.



در روابط بالا به دلیل اینکه توابع K و E و پارامتر A به طور صریح و مستقیم تابعی از m نمی باشند، به دست آوردن c و L از روی مشخصات موج یعنی T، H و h نیاز به یک روند صحیح و خطا و تکرار دارد که این روند در پیوست (الف) ارائه گردیده است. عبارت کامل برای شار انرژی متوسط گیری شده بوسیله رابطه (7) بیان می گردد [2]:

$$E_f = \overline{\int_{-h}^{\eta} \left\{ p_D + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \right\} u dz} \quad (7)$$

که علامت - بیانگر متوسط زمانی در یک پریود می باشد. در رابطه (7)،  $p_D$  و u و w به ترتیب فشار دینامیکی، سرعت افقی و قائم ذرات سیال می باشند. همچنین ترم  $p_D u$  ترم اصلی در رابطه (7) می باشد. بنابراین:

$$E_f = \overline{\int_{-h}^{\eta} p_D u dz} \quad (8)$$

که  $p_D$  و u از روابط (9) و (10) به دست می آیند [2]:

$$p_D = \rho g \eta + \frac{1}{2} \rho g h^2 \left( 1 - \frac{(z+h)^2}{h^2} \right) \eta_{xx} \quad (9)$$

$$u = c \frac{\eta}{h} - c \left( \frac{\eta^2}{h^2} - \frac{\eta^2}{h^2} \right) + \frac{1}{2} c h \left( \frac{1}{3} - \frac{(z+h)^2}{h^2} \right) \eta_{xx} \quad (10)$$

همچنین در معادلات (9) و (10) مشاهده می گردد که ترم اصلی برای  $p_D$  و u به ترتیب  $\rho g \eta$  و  $c \frac{\eta}{h}$  می باشد. با تقریب و جایگزینی  $\eta$  با 0 در حد بالای انتگرال نتیجه می شود:

$$E_f = \overline{\int_{-h}^0 \rho g \eta \frac{c \eta}{h} dz} = \overline{\rho g c \eta^2} \quad (11)$$

با جایگزینی (1) برای  $\eta$  داریم [2]:

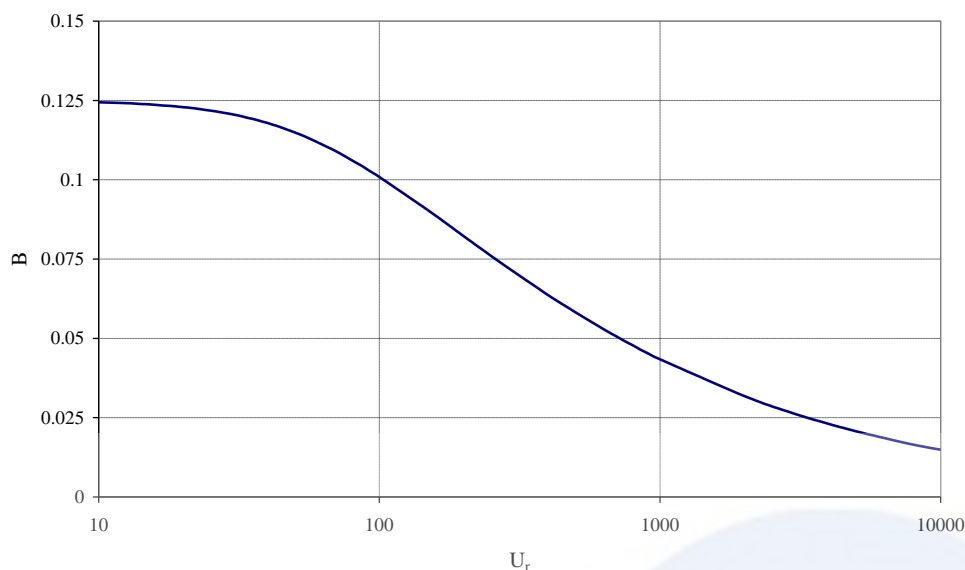
$$\overline{\eta^2} = B H^2 \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{3} \left( 3m^2 - 5m + 2 + (4m - 2) \frac{E}{K} \right) - \left( 1 - m - \frac{E}{K} \right)^2 \right] \quad (13)$$

با جایگذاری (12) در (11)، شار انرژی متوسط گیری شده بوسیله رابطه (14) بیان می گردد:

$$E_f = \rho g c H^2 B \quad (14)$$

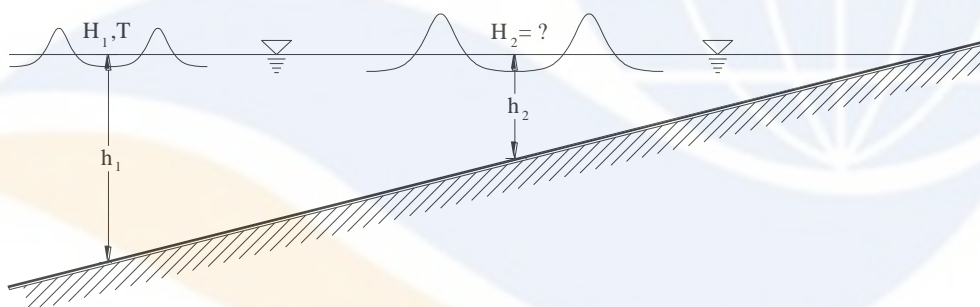
تغییرات پارامتر B در مقابل عدد اورسل در (شکل 3) رسم شده است. جالب است که به تفاوت پارامتر B در تئوری کنوئیدال با مقدار 0/125 در تئوری خطی توجه گردد زیرا همانطور که مشاهده می شود مقدار B از 0/125 به ازای مقادیر کوچک عدد اورسل تا 0 به ازای مقادیر بزرگ عدد اورسل متغیر است. مقدار شار انرژی از رابطه (14) به ازای B برابر 0/125، با مقدار شار انرژی از تئوری خطی در آب کم عمق برابر



شکل 3) تغییرات پارامتر B در مقابل عدد اورسل [2]

### 3- به دست آوردن رابطه shoaling برای امواج کنوئیدال

با فرض اینکه امواج به صورت عمود به سمت ساحل با شیب ملایم و خطوط تراز مستقیم و موازی انتشار یافته و هنگام انتشار نیز موجی از بستر انعکاس نمی‌یابد، شار انرژی در واحد طول راستای ساحل ثابت می‌باشد [3 و 4]. همانطور که در (شکل 4) نشان داده شده است، ارتفاع موج در عمق  $h_2$  مجهول بوده که می‌بایست به دست آید.



شکل 4) شکل شماتیک تغییرات ارتفاع موج کنوئیدال در اثر shoaling

اصل بقاء انرژی، رابطه (14)، ایجاب می‌کند [5]:

$$E_{f_1} = E_{f_2} \Rightarrow \rho g c_1 H_1^2 B_1 = \rho g c_2 H_2^2 B_2 \quad (15)$$

می‌توانیم معادله (15) را برای ارتفاع موج  $H_2$  حل نماییم:

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{c_1 B_1}{c_2 B_2}} \Rightarrow H_2 = H_1 \cdot K_s \quad (16)$$

که  $K_s$  ضریب کاهش عمق می‌باشد. قابل توجه است که در سمت راست رابطه (16)،  $c_2$  مستقیماً و  $B_2$  نیز از طریق عدد اورسل تابعی از  $H_2$  می‌باشد. بنابراین با فرض  $H_2$  و محاسبه  $c_2$  و  $B_2$  بر اساس آن، مقدار جدید  $H_2$  از رابطه (16) به دست می‌آید. این روند تکراری تا زمانی که  $H_2$  به مقدار دقیق خود میل کند ادامه می‌یابد. روند تکراری برای به دست آوردن  $H_2$  بر اساس گام‌های زیر صورت می‌پذیرد:

(1)  $(m_1)_1$  ،  $(K(m_1))_1$  ،  $(E(m_1))_1$  و  $c_1$  بر اساس روابط و روند ارائه شده در پیوست (الف) و  $B_1$  از رابطه (13) به دست می آید.

(2) مقداری برای  $H_{2,a}$  بر اساس تئوری خطی فرض می گردد.

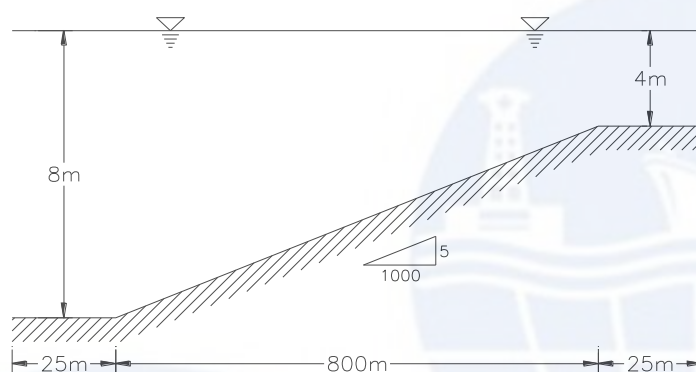
(3)  $(m_1)_2$  ،  $(K(m_1))_2$  ،  $(E(m_1))_2$  ،  $c_2$  و  $B_2$  بر اساس مقادیر  $T$  ،  $H_{2,a}$  و  $h_2$  همانند گام اول محاسبه می گردد.

(4) مقدار  $H_{2,c}$  از رابطه (16) محاسبه می گردد.

(5)  $H_{2,c}$  با  $H_{2,a}$  جایگزین شده و تمامی مراحل از گام دوم به بعد تکرار می گردد. این روند تکراری تا زمانی که  $H_2$  به مقدار دقیق خود میل کند، ادامه می یابد.

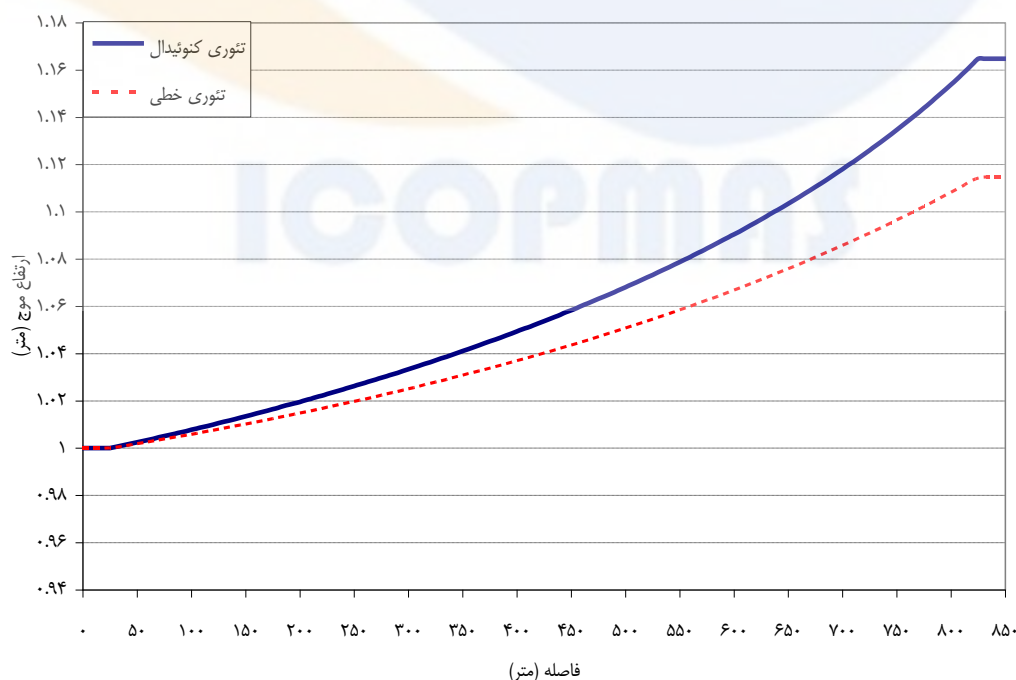
#### 4- مقایسه حل تحلیلی تغییرات ارتفاع امواج در اثر shoaling بر اساس تئوری موج کنوئیدال و تئوری موج خطی

حل تحلیلی موج کنوئیدال با تئوری موج خطی برای توپوگرافی نشان داده شده در (شکل 5) مقایسه شده است. عمق آب در قسمت کم عمق طوری انتخاب شده است که شکست موج اتفاق نمی افتد. ارتفاع و پربود موج در قسمت عمیق تر به ترتیب 1 متر و 8 ثانیه می باشد.



شکل 5) توپوگرافی بستر برای مقایسه تغییر ارتفاع امواج به علت کم شدن عمق آب

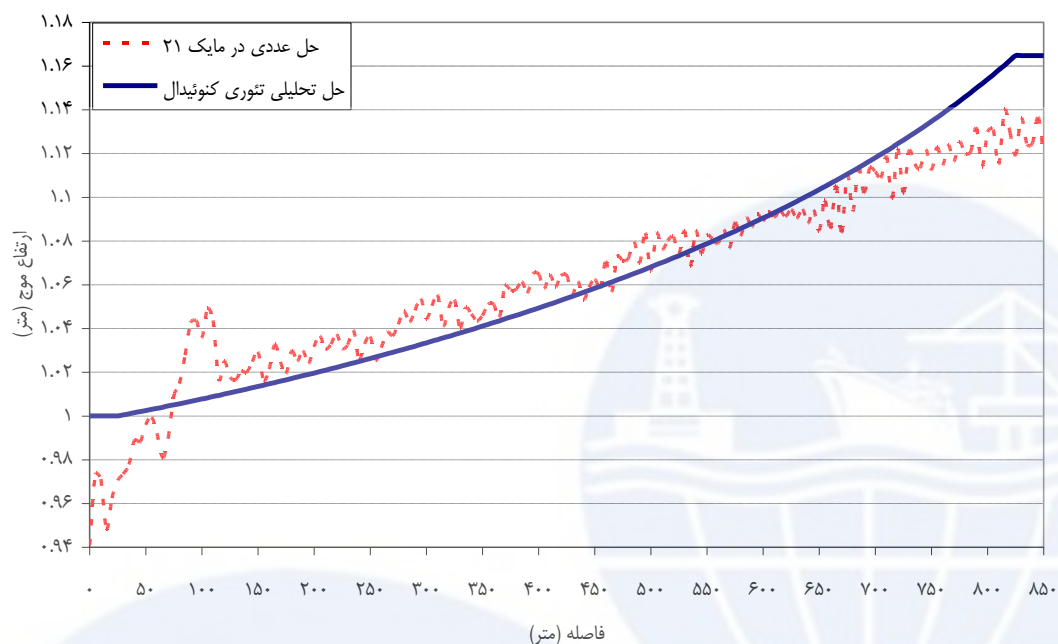
نتیجه این مقایسه در (شکل 6) نشان داده شده است که نشانگر افزایش حدود 5 درصدی ارتفاع موج بر اساس تئوری موج کنوئیدال نسبت به تئوری موج خطی در انتهای شیب می باشد.



شکل 6) مقایسه تغییرات ارتفاع موج بر روی بستر شیبدار بر اساس حل تحلیلی تئوری موج کنوئیدال و خطی

## 5- صحت‌سنجی حل تحلیلی تغییرات ارتفاع امواج کنوئیدال در اثر shoaling

به‌منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده، همانطور که در (شکل 7) مشاهده می‌شود، نتایج حل تحلیلی تغییرات ارتفاع امواج کنوئیدال با حل عددی معادلات بوزینسک در مایک 21 نیز مقایسه شده است. شرط مرزی مدل در قسمت عمیق، تراز سطح آب بر اساس تئوری موج کنوئیدال برای شرایط  $h=8\text{m}$  و  $T=8\text{s}$ ,  $H=1\text{m}$  می‌باشد. شایان ذکر است که تغییرات ارتفاع امواج بر اساس حل عددی، با استفاده از مدل بوزینسک یک بعدی و دو بعدی مایک 21 به‌دست آمده است که در نتایج مدل دو بعدی انطباق قابل قبول تری مشاهده می‌شود. اختلاف نتایج حل تحلیلی و عددی که بیشتر در ابتدا و انتهای مدل مشاهده می‌گردد، به علت اثرات لایه Sponge که در ابتدا و انتهای مدل تعریف شده است، می‌باشد.



شکل 7) مقایسه تغییرات ارتفاع امواج کنوئیدال بر روی بستر شبیدار بر اساس حل تحلیلی و حل عددی

## 6- نتیجه گیری

از جمله نتایج مهم این مطالعه می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- مقدار ارتفاع موج  $H_2$  در عمق  $h_2$  بر اساس تئوری موج کنوئیدال با شرایط اولیه یکسان ( $H_1$ ,  $h_1$  و  $T$ )، بیشتر از تئوری موج خطی می‌باشد.
- با افزایش پرپود امواج، اختلاف ارتفاع امواج به‌دست آمده از حل تحلیلی تئوری کنوئیدال و تئوری خطی بیشتر می‌گردد.
- در محدوده آب کم‌عمق و میاناب ارتفاع امواج به‌دست آمده از تئوری موج خطی کمتر از مقدار واقعی بوده و توصیه می‌گردد برای تعیین دقیق ارتفاع امواج در این محدوده‌ها از تئوری‌های غیرخطی مانند تئوری موج کنوئیدال استفاده گردد.
- توصیه می‌گردد برای بررسی اثر کم شدن عمق آب بر تغییر ارتفاع امواج کنوئیدال از مدل دو بعدی MIKE 21-BW استفاده گردد.
- نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی و عددی تغییرات ارتفاع موج کنوئیدال در اثر کم شدن عمق آب تا حد زیادی بر هم منطبق می‌باشند. اختلاف نتایج حل تحلیلی و عددی که بیشتر در ابتدا و انتهای مدل مشاهده می‌گردد، به علت اثرات لایه Sponge که در ابتدا و انتهای مدل تعریف شده است، می‌باشد.

- [1]- Sorensen, R. M. (2006), Basic Coastal Engineering, Springer Science and Business Media, Inc, 324 p.  
 [2]- Svendsen, I. A., 2006, Introduction to nearshore hydrodynamics, Advanced Series on Ocean Engineering, Singapore, World Scientific, 24, 722 p.  
 [3]- Isob, M. (1985), Calculation and Application of First-Order Cnoidal Wave Theory, Coastal Engineering Journal, Vol. 9, 309-325.  
 [4]- Svendsen, I. A., Hansen, J. B. (1977), The Wave Height Variation for Regular Waves in Shoaling Water, Coastal Engineering Journal, Vol. 1, 261-284.  
 [5]- Dean, R. G., Dalrymple, R. A. (1984), Water wave mechanics for engineers and scientists, Advanced Series on Ocean Engineering, Singapore, World Scientific, 2, 353 p.  
 [6]- Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1970), Handbook of mathematical functions, Dover Publications, New York, 1045 p.

### پیوست (الف): حل عددی برای به دست آوردن مشخصات امواج کنوئیدال (L و c)

در این پیوست الگوریتم عددی و ساده برای به دست آوردن L و c از روی مشخصات موج (H, T و h) به صورت خلاصه ارائه شده است. روند تکراری برای به دست آوردن c و L بر اساس گام‌های زیر صورت می‌پذیرد:

(1) مقدار  $A=1$  فرض می‌گردد.

(2) مقدار L/h از رابطه (الف-1) محاسبه می‌گردد:

$$\frac{c^2}{gh} = 1 + \frac{H}{h}A \rightarrow c = \sqrt{gh} \sqrt{1 + \frac{H}{h}A} \xrightarrow{L=cT} L = T \sqrt{gh} \sqrt{1 + \frac{H}{h}A} \rightarrow \frac{L}{h} = T \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{1 + \frac{H}{h}A} \quad (\text{الف-1})$$

(3) عدد اورسل با استفاده از رابطه (الف-2) محاسبه می‌گردد:

$$U_r = \left(\frac{L}{h}\right)^2 \left(\frac{H}{h}\right) = \frac{HL^2}{h^3} \quad (\text{الف-2})$$

(4) مقدار  $m_1$  ( $m_1=1-m$ ) با حل معادله (الف-3) به صورت صحیح و خطا همان گونه که در ادامه توضیح داده می‌شود، به دست می‌آید:

$$U_r = \frac{16}{3} m K^2(m) \rightarrow U_r = \frac{16}{3} (1-m_1) \cdot K^2(m_1) \quad (\text{الف-3})$$

که  $K(m_1)$  انتگرال کامل بیضوی نوع اول بوده و بر اساس تعریف از رابطه (الف-4) به دست می‌آید [6]:

$$K(m_1) = \int_0^{\pi/2} (1 - m_1 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (\text{الف-4})$$

$K(m_1)$  با دقت بسیار زیادی با رابطه (الف-5) تقریب زده می‌شود:

$$K(m_1) = \left[ a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2 \right] - \left[ b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2 \right] \cdot \ln m_1 + \varepsilon(m_1) \quad (\text{الف-5})$$

که



Archive of SID  $b_0 = 1.3862944$  ;  $b_0 = 0.5$

$a_1 = 0.1119723$  ;  $b_1 = 0.1213478$

$a_2 = 0.0725296$  ;  $b_2 = 0.0288729$

(الف-6)

و.  $\varepsilon < 3.10^{-5}$

رابطه (الف-3) می تواند به صورت رابطه (الف-7) نوشته شود:

$$f(m_1) = 1 - m_1 - \frac{3U_r}{16K^2(m_1)} \quad \text{(الف-7)}$$

با حل معادله  $f(m_1) = 0$  مقدار  $m_1$  به دست می آید. برای به دست آوردن  $m_1$  از روش نیوتن-رافسون استفاده می گردد که بر اساس آن روش:

$$m_{1,i+1} = m_{1,i} - \frac{f(m_{1,i})}{f'(m_{1,i})} \quad \text{(الف-8)}$$

که  $f'$  مستقیماً با مشتق گیری از رابطه (الف-7) حاصل می گردد:

$$f'(m_1) = \frac{3}{8} \frac{U_r}{K^3(m_1)} \frac{dK(m_1)}{dm_1} - 1 \quad \text{(الف-9)}$$

و

$$\frac{dK(m_1)}{dm_1} = a_1 + 2a_2m_1 - [b_1 + 2b_2m_1] \cdot \ln m_1 - [b_0 + b_1m_1 + b_2m_1^2] \frac{1}{m_1} \quad \text{(الف-10)}$$

با تخمین مناسب اولیه برای  $m_1$ ،  $f(m_1)$  بسیار سریع به سمت صفر میل می کند. تخمین اولیه برای  $m_1$  با استفاده از رابطه (الف-3) و با جایگزینی رابطه (الف-5) برای  $K(m_1)$  و با فرض  $m_1 \ll 1$  به دست می آید:

$$U_r \square \frac{16}{3} [a_0 - b_0 \cdot \ln m_1]^2 \quad \text{(الف-11)}$$

یا

$$m_1 \square \exp \left( \frac{a_0 - \left( \frac{3}{16} U_r \right)^{1/2}}{b_0} \right) \quad \text{(الف-12)}$$

با تعیین  $m_1$ ،  $K(m_1)$  از رابطه (الف-5) حاصل می شود.

(5) پارامتر A با استفاده از رابطه (الف-13) به دست می آید:

$$A = \frac{2}{m} - 1 - \frac{3E(m_1)}{m \cdot K(m_1)} \Rightarrow A(m_1) = \frac{2}{1-m_1} - 1 - \frac{3E(m_1)}{(1-m_1) \cdot K(m_1)} \quad \text{(الف-13)}$$

که  $E(m_1)$  انتگرال کامل بیضوی نوع دوم بوده و بر اساس تعریف از رابطه (الف-14) به دست می آید [6]:

$$E(m_1) = \int_0^{\pi/2} (1 - m_1 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (\text{الف-14})$$

$E(m_1)$  با دقت بسیار زیادی با رابطه (الف-15) تقریب زده می شود:

$$E(m_1) = [1 + e_1 m_1 + e_2 m_1^2] - [f_1 m_1 + f_2 m_1^2] \cdot \ln m_1 + \varepsilon(m_1) \quad (\text{الف-15})$$

که

$$\begin{aligned} e_1 &= 0.4630151 ; f_1 = 0.2452727 \\ e_2 &= 0.1077812 ; f_2 = 0.0412496 \end{aligned} \quad (\text{الف-16})$$

$$\varepsilon < 4.10^{-5} \text{ و.}$$

(6) مقدار A با مقدار جدید A که از رابطه (الف-13) به دست آمده است، جایگزین شده و تمامی مراحل از گام دوم به بعد تکرار می شود. این روند تکراری تا زمانی که A به مقدار دقیق خود میل کند ادامه می یابد.

