



سازمان بنادر و دریانوردی به عنوان تنها مرجع حاکمیتی کشور در امور بندری، دریایی و کشتی رانی بازرگانی به منظور ایفای نقش مرجعیت دانشی خود و در راستای تحقق راهبردهای کلان نقشه جامع علمی کشور مبنی بر "حمایت از توسعه شبکه‌های تحقیقاتی و تسهیل انتقال و انتشار دانش و سامان‌دهی علمی" از طریق "استانداردسازی و اصلاح فرایندهای تولید، ثبت، داوری و سنجش و ایجاد بانک‌های اطلاعاتی یکپارچه برای نشریات، اختراعات و اکتشافات پژوهشگران"، اقدام به ارایه این اثر در سایت SID می‌نماید.



سازمان بنادر و دریانوردی





نهمین همایش بین المللی سواحل، بنادر و سازه های دریایی
ICOPMAS 2010
 10-8 آذر ماه (تهران)



حل ضمنی معادله پخشیدگی افقی به روش عددی در شبکه بندی سیگما با استفاده از تعریف شبکه بندی پلکانی

رضا عارفی سرشت ، دانشجوی کارشناسی ارشد ، دانشکده فنی-دانشگاه تهران ، re.arefi@gmail.com ،
 پیمان بدیعی ، استادیار ، دانشکده فنی-دانشگاه تهران ، pbadiei@ut.ac.ir

کلید واژه: پخشیدگی افقی، حل ضمنی، شبکه بندی سیگما، شبکه بندی پلکانی، الگوریتم توماس.

1- مقدمه

نقش دریاها در زندگی بشر از دیرباز به گونه ای بوده که بسیاری از نیازهای خود را از طریق آن برآورده می ساخته است. در این میان سواحل و بنادر بعنوان محل ورود و دسترسی به دریاها و اقیانوس ها دارای جایگاه ویژه ای می باشند، به همین دلیل بررسی و مطالعه در زمینه مهندسی سواحل و دریا از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. امروزه برای شناخت بیشتر و مدلسازی فرایندهای دریایی نظیر امواج و جریانات دریایی، انتقال رسوب، پخش آلودگی، شوری، حرارت و محیط زیست دریا، مدل های عددی بسیاری چه بصورت مهندسی و بزرگ مقیاس و چه مدل های کوچک مقیاس و عمدتاً با کاربردهای تحقیقاتی توسعه یافته اند.

در مدل های عددی و به منظور پیش بینی تراز متغیر سطح آزاد سیال، روش های عددی گوناگونی پیشنهاد شده است. روش تبدیل مختصات سیگما و روش های مبتنی بر انتقال حجم سیال نظیر [1] Maker and Cell (MAC) و [2] Volume of Fluid (VOF) از روش های ارائه شده بدین منظور می باشند. شبکه بندی سیگما که اولین بار در سال 1975 [3] معرفی شد، شبکه بندی منحنی الخط غیرمتعامد منطبق با مرزی می باشد که با سطح آزاد آب و بستر محدوده محاسباتی در دو سمت منطبق می شود.

محاسبه صحیح انتقال ناشی از پخشیدگی¹ در مدلسازی پدیده های هیدرولیکی و هیدرودینامیکی از اهمیت بالایی برخوردار می باشد. انتقال ناشی از پخشیدگی مهمترین نقش در توزیع آشفستگی را بازی می کند [4]. انتقال رسوب در سواحل یا کانال ها، تخلیه فاضلاب، پخش آلودگی، میزان کیفیت آب، اختلاط آب شیرین و آب شور و فرایندهای مربوط به محیط زیست بطور مستقیم با انتقال ناشی از پخشیدگی در ارتباط می باشند. تمامی موارد فوق بیانگر نقش مهم ترم پخشیدگی در معادلات حاکم بر فرایندهای فیزیکی و بخصوص فیریک دریا و رودخانه می باشند.

برای حل معادله پخشیدگی در مختصات سیگما نیاز به تبدیل معادلات از دستگاه مختصات کارتزین به سیستم مختصات سیگما می باشد. در این تبدیل، ترم های اضافی ای در معادلات حاصل می گردد که در روش های مرسوم با صرف نظر کردن از برخی از این ترم های اضافه شده، به حل معادلات در سیستم مختصات سیگما پرداخته می شود که باعث ایجاد خطاهای عددی می گردد. برای کاهش خطای بوجود آمده روش های مختلفی پیشنهاد و ارائه شده است. در روش دیگر بدون تبدیل معادلات از سیستم مختصات، تنها با استفاده از شبکه بندی سیگما و حل معادلات در سیستم مختصات کارتزین به حل معادلات پرداخته می شود که در مطالعه حاضر این روش بکار گرفته شده است.

در روش دوم که بدان اشاره شد، می توان مقدار پخشیدگی افقی را در فضای مختصات کارتزین و با استفاده از درونبایی خطی محاسبه کرد [5]. در این روش برای محاسبه مقدار غلظت هم تراز افقی سلول مورد نظر، از درونبایی خطی استفاده می شود که ضمن مزیت خود مبنی بر حفظ تفسیر فیزیکی گرایان افقی دارای نقایصی است که می توان به تولید خطای عددی در مواردی با توزیع غلظت بصورت غیرخطی، اشاره کرد.

در برخی مطالعات، معادلات تبدیل دیگری برای محاسبه مستقیم پخشیدگی افقی در شبکه بندی سیگما مطرح شدند که با تبدیل معادلات پخشیدگی از دستگاه مختصات کارتزین به سیستم مختصات سیگما به حل معادله پخشیدگی افقی پرداخته اند (مانند [6] و [7]). در این روش ترم های اضافی ایجاد شده بدلیل تبدیل و انتقال معادلات از دستگاه مختصات کارتزین به سیستم مختصات سیگما، سبب پیچیدگی در حل معادلات می گردد که برای راحتی کار و بر اساس اهمیت ترم های اضافی بوجود آمده، از برخی از آنها صرف نظر میکنند.

¹ Diffusion

برخی محققین [8] با استفاده از درونیابی چند جمله‌ای لاگرانژی و با بکارگیری روش تفاضل محدود روشی پیشنهاد داده‌اند که خطای حاصل شده در حل معادلات پخشیدگی در سیستم مختصات سیگما را با دقت بسیار خوب کاهش می‌دهد. در این روش برای محاسبه مقدار شار عبوری از مرز سلول‌ها در جهت افقی، ابتدا با استفاده از درونیابی چند جمله‌ای لاگرانژی مقدار غلظت هم‌تراز افقی سلول با سلول مورد نظر، در سمت چپ و راست محاسبه میگردد. سپس مقدار شار عبوری بر اساس اختلاف غلظت سلول مورد نظر با مقدار غلظت محاسبه شده در دو سمت سلول محاسبه می‌گردد.

کارهای اشاره شده در فوق، تماما به ارائه روش‌هایی جهت حل صریح^۱ معادله پخشیدگی می‌پردازند. در مطالعه حاضر علاوه بر ارائه روشی جدید و بر مبنای روش احجام محدود برای افزایش دقت حل معادله، به حل ضمنی^۲ این معادله با استفاده از روش الگوریتم توماس یا الگوریتم جاروی دو مرحله^۳ پرداخته شده است. حل معادله پخشیدگی به روش صریح، انتخاب مقادیر گام زمانی و مکانی را با محدودیت مواجه می‌سازد بطوریکه شرط $\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5$ می‌بایست در تمامی سلول‌ها و در تمام مدت اجرای مدل عددی رعایت گردد که در نهایت معمولا منجر به انتخاب گام زمانی کوچکتر و بالطبع صرف زمان و هزینه بیشتر جهت اجرای برنامه خواهد شد. در رابطه فوق، D ضریب پخشیدگی، Δt گام زمانی و Δx گام مکانی می‌باشد که در ادامه بیشتر توضیح داده خواهد شد.

شبکه‌بندی پلکانی که بصورت یک شبکه متعامد غیر منطبق در گوشه سلول تعریف شده است، روشی است که برای افزایش دقت نتایج، پیشنهاد و بکار گرفته شده است. در انتها با توسعه یک مدل عددی و برای صحت نتایج، غلظت شوری در یک حوضچه بسته با بستری شیب‌دار مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج آزمایشات عددی صورت گرفته، بهبود در محاسبه انتقال ناشی از پخشیدگی را نشان می‌دهد و دقت روش مذکور را تایید می‌نماید.

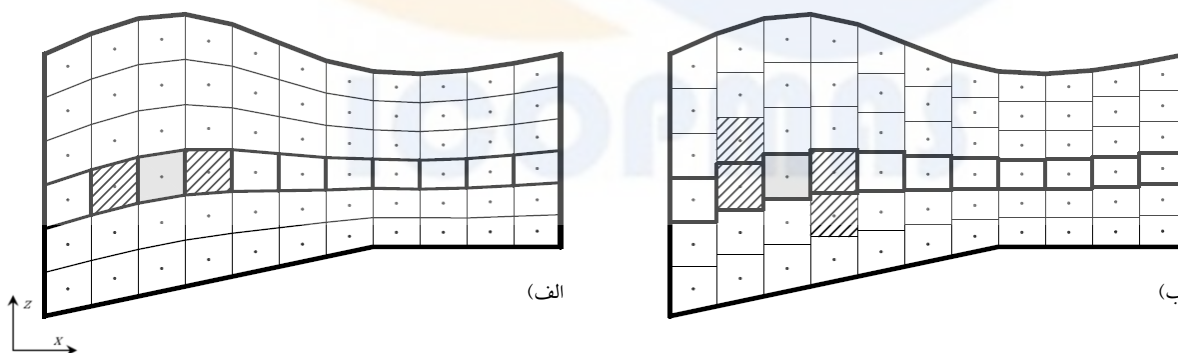
2- تعریف شبکه‌بندی سیگما و پلکانی

شبکه‌بندی سیگما، یک شبکه غیرمتعامد منطبق در گوشه سلول می‌باشد که با سطح آزاد آب و بستر محدوده محاسباتی در دو سمت منطبق می‌شود (شکل 1-الف). مهمترین فرضیات برای این سیستم عبارتست از:

-تعداد ثابت اجزاء شبکه قائم در کل محدوده و

-منحنی الخط بودن، تنها در جهت طولی.

در سیستم مختصات سیگما عمق آب به فواصل مساوی قائم تقسیم می‌شود. در این حالت هر تغییری در تراز آب در هر ستون موجب تغییر در بعد قائم در کل سلولهای آن ستون می‌شود، بطوریکه نسبت بعد سلول شبکه قائم به کل عمق ثابت باقی می‌ماند. در این شبکه‌بندی هر سلول تنها با دو سلول هم‌ردیف خود در راستای افقی و دو سلول هم‌ستون در راستای قائم دارای مرز مشترک می‌باشد. در شبکه‌بندی پلکانی که در این مطالعه تعریف و بکار گرفته شده است، با در نظر گرفتن یک شبکه‌بندی متعامد غیرمنطبق در گوشه سلول، امکان همسایگی بیش از 2 سلول در راستای افقی فراهم می‌شود. شکل 1 مقایسه بین شبکه‌بندی سیگما و شبکه‌بندی پلکانی را نشان می‌دهد.



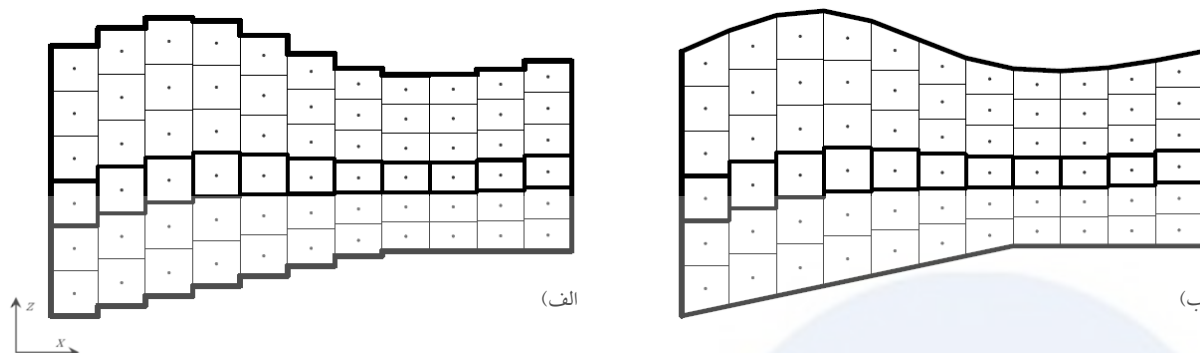
شکل 1) مقایسه شبکه‌بندی سیگما (الف) و شبکه‌بندی پلکانی (ب)

¹ Implicit

² Explicit

³ Double Sweep Algorithm

در این شبکه‌بندی برای شرایط مرزی بستر و تراز سطح آب می‌توان از دو روش استفاده کرد. در روش اول مطابق شکل الف وجه بالایی سلول‌های واقع در ردیف بالا و وجه پایینی در سلول‌های ردیف اول، مشابه دیگر سلول‌ها تعریف می‌شوند. در روش دیگر (شکل 2-ب) مرزهای بالایی و پایینی مشابه شبکه‌بندی سیگما انتخاب می‌گردند. بنابر مطالعات صورت گرفته در این تحقیق، روش دوم دقت بیشتری داشته و این در حالیست که این روش با فیزیک مسئله نیز همخوانی بیشتری دارد چراکه در این روش مرزهای بالا و پایینی نیز بر مرزهای واقعی مسئله منطبق می‌باشند، در حالی که روش اول این ویژگی را دارا نمی‌باشد.



شکل 2) شرایط مرزی بستر و تراز سطح آب در دو حالت مختلف

3- معادله حاکم بر پخشیدگی

در فضای دو بعدی قائم معادله پخشیدگی بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (1)$$

که در آن مقدار غلظت و D_x و D_y بترتیب ضرایب پخشیدگی در جهت افقی و قائم می‌باشند. قسمت اول طرف راست معادله بیانگر پخشیدگی افقی و قسمت دوم، پخشیدگی قائم را بیان می‌کند. در این مطالعه راهکاری برای افزایش دقت و حل ضمنی معادله پخشیدگی افقی بیان گردیده است، بنابراین با در نظر گرفتن قسمت اول معادله فوق، معادله افقی پخشیدگی را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

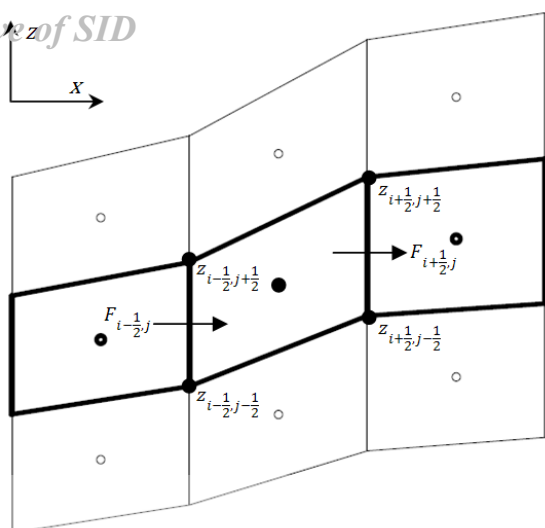
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (2)$$

برای بیان معادله فوق به فرم احجام محدود، عبارت داخل پرانتز در رابطه شماره 2 را بصورت شار¹ عبوری از مرز سلول در نظر می‌گیریم. با این تعریف، رابطه فوق بیان می‌دارد که تغییرات نسبت به زمان برای غلظت c در یک سلول برابر با اختلاف شار عبوری و خروجی از مرزهای سلول مورد نظر می‌باشد. با تعریف فوق و با گسسته‌سازی رابطه شماره 2 خواهیم داشت:

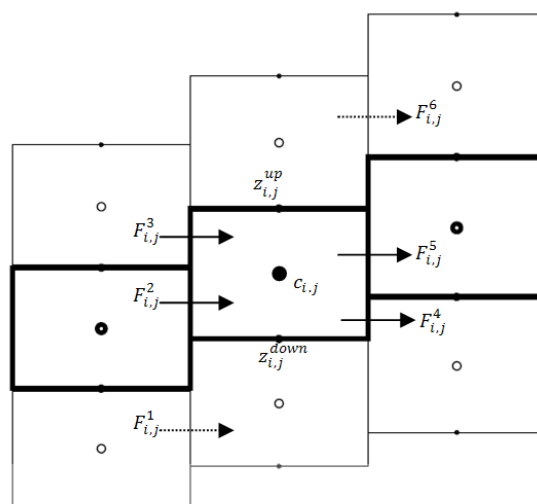
$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Flux_{i+1/2,j} - Flux_{i-1/2,j}) \quad (3)$$

همانطور که اشاره گردید، در شبکه‌بندی پلکانی این امکان وجود دارد که هر سلول با سه سلول در هر سمت خود در تماس باشد. این در حالیست که در شبکه‌بندی سیگما تماس هر سلول تنها با یک سلول در هر طرف امکان پذیر می‌باشد. بنابراین در شبکه‌بندی پلکانی شار عبوری از مرزهای سمت چپ و راست هر سلول می‌تواند از 6 سلول مجاور صورت گیرد (شکل شماره 3).

¹ Flux



(الف)



(ب)

شکل 3) شار ورودی و خروجی ناشی از پخشیدگی در شبکه بندی سیگما (الف) و شبکه بندی پلکانی (ب)

با توجه به شکل شماره 3، مقادیر شارهای ورودی $Flux_{i-1/2, j}$ و خروجی $Flux_{i+1/2, j}$ در رابطه 3 را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$Flux_{i-1/2, j} = F_{i, j}^1 + F_{i, j}^2 + F_{i, j}^3 \quad (4)$$

$$Flux_{i+1/2, j} = F_{i, j}^4 + F_{i, j}^5 + F_{i, j}^6$$

$F_{i, j}$ ها مقادیر شار وارد یا خارج شده از سلول واقع در ستون i و ردیف j ام می باشند که مطابق شکل 3 تعریف می شوند. در این شکل، شارهای $F_{i, j}^1$ و $F_{i, j}^6$ (که با خط چین نشان داده شده اند) برابر صفر می باشند چراکه مرز مشترکی با سلول مورد نظر ندارند، ولی با توجه به شرایط مختلف بستر و تراز سطح آب، ممکن است تمامی شارها غیر صفر باشند. مقادیر شارها با استفاده از روابط زیر محاسبه می گردند:

$$F_{i, j}^1 = -\alpha_{i, j}^1 D \frac{c_{i, j}^{n+1/2} - c_{i-1, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} \quad (5)$$

$$F_{i, j}^2 = -\alpha_{i, j}^2 D \frac{c_{i, j}^{n+1/2} - c_{i-1, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}$$

$$F_{i, j}^3 = -\alpha_{i, j}^3 D \frac{c_{i, j}^{n+1/2} - c_{i-1, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}}$$

$$F_{i, j}^4 = -\alpha_{i, j}^4 D \frac{c_{i+1, j}^{n+1/2} - c_{i, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}$$

$$F_{i, j}^5 = -\alpha_{i, j}^5 D \frac{c_{i+1, j}^{n+1/2} - c_{i, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}$$

$$F_{i, j}^6 = -\alpha_{i, j}^6 D \frac{c_{i+1, j}^{n+1/2} - c_{i, j}^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}$$

برای حل ضمنی معادلات از $c^{n+1/2}$ استفاده شده است که بصورت درصدی از میزان غلظت در زمان n ام و $n+1$ ام می باشد، یعنی خواهیم داشت:

$$c^{n+1/2} = \varphi c^n + (1 - \varphi) c^{n+1}$$

ضرایب α در معادلات شماره 5، سهم هر سلول از میزان شار عبوری از مرز سلول مورد نظر را نشان می‌دهد و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_{i,j}^1 = \frac{z_{i-1,j}^{down} - z_{i,j}^{down}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \times \delta \left(\frac{z_{i-1,j}^{down} - z_{i,j}^{down}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \right) \quad (6)$$

$$\alpha_{i,j}^3 = \frac{z_{i,j}^{up} - z_{i-1,j}^{up}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \times \delta \left(\frac{z_{i,j}^{up} - z_{i-1,j}^{up}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \right)$$

$$\alpha_{i,j}^2 = 1 - \alpha_{i,j}^1 - \alpha_{i,j}^3$$

$$\alpha_{i,j}^4 = \frac{z_{i+1,j}^{down} - z_{i,j}^{down}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \times \delta \left(\frac{z_{i+1,j}^{down} - z_{i,j}^{down}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \right)$$

$$\alpha_{i,j}^6 = \frac{z_{i,j}^{up} - z_{i+1,j}^{up}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \times \delta \left(\frac{z_{i,j}^{up} - z_{i+1,j}^{up}}{z_{i,j}^{up} - z_{i,j}^{down}} \right)$$

$$\alpha_{i,j}^5 = 1 - \alpha_{i,j}^4 - \alpha_{i,j}^6$$

در معادلات فوق، Z^{up} و Z^{down} بترتیب نشان دهنده تراز قائم مرز بالا و پایینی (شکل شماره 3) و برابر میانگین ترازهای نقاط گوشه‌ای سلول در بالا و پایین می‌باشند. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$z_{i,j}^{up} = (z_{i-1/2,j+1/2} + z_{i+1/2,j+1/2}) / 2 \quad (7)$$

$$z_{i,j}^{down} = (z_{i-1/2,j-1/2} + z_{i+1/2,j-1/2}) / 2$$

δ نیز تابع دلتای کرونکر بوده که داریم:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

4- حل ضمنی معادله پخشیدگی

با جایگذاری روابط 5 و 6 در رابطه 3، معادله گسسته شده‌ی پخشیدگی افقی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\alpha_{i,j}^4 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \varphi \alpha_{i,j}^5 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + (1-\varphi) \alpha_{i,j}^5 \frac{c_{i+1,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \alpha_{i,j}^6 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} \right) - \quad (9)$$

$$\left(\alpha_{i,j}^1 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} + \varphi \alpha_{i,j}^2 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} + (1-\varphi) \alpha_{i,j}^2 \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} + \alpha_{i,j}^3 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right)$$

Δx_i برابر عرض سلول مورد نظر و $\Delta x_{i\pm 1/2}$ فاصله مرکز تا مرکز سلول‌ها می‌باشد که برابر میانگین عرض دو سلول مجاور می‌باشد. در روش الگوریتم توماس، معادله فوق می‌بایست بشکل زیر درآورده شود:

$$A_{i,j}^1 c_{i-1,j}^{n+1} + A_{i,j}^2 c_{i,j}^{n+1} + A_{i,j}^3 c_{i+1,j}^{n+1} = A_{i,j}^0 \quad (10)$$

با تبدیل روابط به فرم فوق، به ماتریسی 3 قطری¹ خواهیم رسید که حل آن با روش‌های عددی بسیار ساده امکان‌پذیر می‌باشد. Archive of SID در رابطه فوق، ضریب A^0 تمامی ضرایبی را دربر می‌گیرد که مربوط به زمان n ام و ضرایب A^1, A^2, A^3 مربوط به زمان $n+1$ ام و موقعیت-های مکانی $i-1$ و $i+1$ ام می‌باشند. برای تبدیل رابطه 9 به فرم رابطه 10 ضرایب A بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j}^1 &= -(1-\varphi) \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \frac{D\alpha_{i,j}^2}{\Delta x_{i-1/2}} & (11) \\
 A_{i,j}^2 &= 1 + (1-\varphi) \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \frac{D\alpha_{i,j}^2}{\Delta x_{i-1/2}} + (1-\varphi) \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \frac{D\alpha_{i,j}^5}{\Delta x_{i+1/2}} \\
 A_{i,j}^3 &= -(1-\varphi) \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \frac{D\alpha_{i,j}^5}{\Delta x_{i+1/2}} \\
 A_{i,j}^0 &= c_{i,j}^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\alpha_{i,j}^4 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \varphi \alpha_{i,j}^5 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \alpha_{i,j}^6 \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} \right) - \\
 & \left(\alpha_{i,j}^1 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} + \varphi \alpha_{i,j}^2 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} + \alpha_{i,j}^3 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right)
 \end{aligned}$$

بسته به صورت مسئله و شرایط فیزیکی حاکم بر مسئله، شرایط مرزی سمت چپ و راست می‌تواند بصورت مقدار غلظت معلوم و یا مقدار شار عبوری معلوم اختیار گردد که در هر دو شرایط حداقل یکی از ضرایب A^1, A^3 مقدار صفر می‌گیرند. در انتها معادلات ما به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 A_{j-1}^1 c_{j-2}^{n+1} + A_{j-1}^2 c_{j-1}^{n+1} + A_{j-1}^3 c_j^{n+1} &= A_{j-1}^0 & (12) \\
 A_j^1 c_{j-1}^{n+1} + A_j^2 c_j^{n+1} + A_j^3 c_{j+1}^{n+1} &= A_j^0 \\
 A_{j+1}^1 c_j^{n+1} + A_{j+1}^2 c_{j+1}^{n+1} + A_{j+1}^3 c_{j+2}^{n+1} &= A_{j+1}^0 \\
 A_{j+2}^1 c_{j+1}^{n+1} + A_{j+2}^2 c_{j+2}^{n+1} + A_{j+2}^3 c_{j+3}^{n+1} &= A_{j+2}^0
 \end{aligned}$$

با دقت در معادله فوق معلوم می‌گردد که ماتریس ضرایب ما بصورت یک ماتریس 3 قطری می‌باشد. روش الگوریتم توماس برای ماتریس‌های 3 قطری بدینگونه می‌باشد که با دو بار جاروب کردن² اعضای قطری بگونه‌ای که در جاروب اول، از بالا به پایین و محاسبه مقادیر C^{n+1} ها برحسب یکدیگر، و در جاروب دوم از پایین به بالا و محاسبه نهایی مقادیر غلظت‌ها (C^{n+1} ها)، به حل ماتریس‌های قطری می‌پردازد. برای ماتریس‌های قطری درجات بالاتر نیز با تعداد بیشتر جاروب‌های متوالی امکان حل با استفاده از این الگوریتم وجود دارد.

در این مطالعه با توجه به استفاده از روش الگوریتم توماس برای حل ضمنی معادله پخشیدگی و رسیدن به معادله 3 قطری مذکور، در استخراج رابطه 9، تنها شارهای مربوط به سلول‌های شماره 2 و 5 در زمان $n+1/2$ در نظر گرفته شده‌اند، چرا که با در نظر گرفتن تمامی شارها بصورت ضمنی، در رابطه 10 ضرایب دیگری وارد رابطه شده که معادلات را از حالت 3 قطری خارج کرده و استفاده از روش الگوریتم توماس را غیر ممکن می‌سازد. البته ماتریس حاصله بدین روش بصورت 3 قطری بلوکی درخواهد آمد و امکان حل این ماتریس به روش‌های کمی پیچیده‌تر میسر می‌باشد که بدلیل وقت‌گیر و پرهزینه بودن آنها بکارگیری آن در روش‌های عددی و برای حل معادلات پخشیدگی مطلوب نخواهد بود ([9] و [10]). روند الگوریتم توماس در زیر آمده است:

¹ Tridiagonal

² Double sweeping

$$E_j = E_{j-1} + F_j$$

(13)

$$c_{j-1} = E_{j-1}c_j + F_{j-1}$$

$$A_j^1 c_{j-1} + A_j^2 c_j + A_j^3 c_{j+1} = A_j^0$$

$$A_j^1 (E_{j-1}c_j + F_{j-1}) + A_j^2 c_j + A_j^3 c_{j+1} = A_j^0$$

$$(A_j^1 E_{j-1} + A_j^2) c_j + A_j^3 c_{j+1} = A_j^0 - A_j^1 F_{j-1}$$

$$c_j = -\frac{A_j^3}{(A_j^1 E_{j-1} + A_j^2)} c_{j+1} + \frac{A_j^0 - A_j^1 F_{j-1}}{(A_j^1 E_{j-1} + A_j^2)}$$

$$E_j = -\frac{A_j^3}{(A_j^1 E_{j-1} + A_j^2)}$$

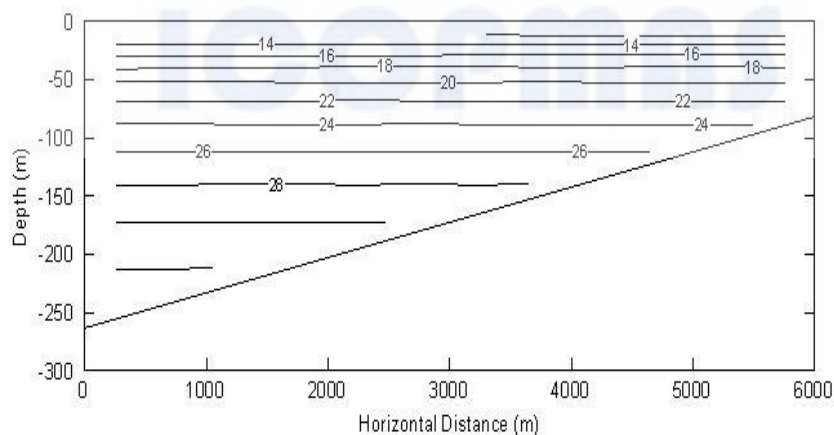
$$F_j = \frac{A_j^0 - A_j^1 F_{j-1}}{(A_j^1 E_{j-1} + A_j^2)}$$

5- نتایج حل عددی

یکی از بهترین مسائلی که برای صحت روش حل معادله پخشیدگی بکار گرفته می‌شود، مدل‌سازی شوری با غلظتی متغیر در عمق در یک حوضچه بسته با بستری شیب‌دار می‌باشد در صورتی که ضریب پخشیدگی در جهت قائم را برابر صفر در نظر بگیریم، انتظار می‌رود غلظت شوری پس از گذشت زمان ثابت باقی بماند. این در حالیست که بدلیل خطاهای روش‌های عددی این توزیع غلظت پس از گذشت زمان دستخوش تغییر می‌گردد. پس از گذشت زمان، هرچه توزیع غلظت به شرایط اولیه نزدیکتر باشد نشان از دقت بیشتر روش عددی می‌باشد. در این مطالعه حوضچه‌ای بسته با بستری با شیب 0/03 با طول 6000 متر و عمق متغیر 80 تا 260 متر و با توزیع اولیه شوری مطابق رابطه 14 در نظر گرفته شده است (شکل 4).

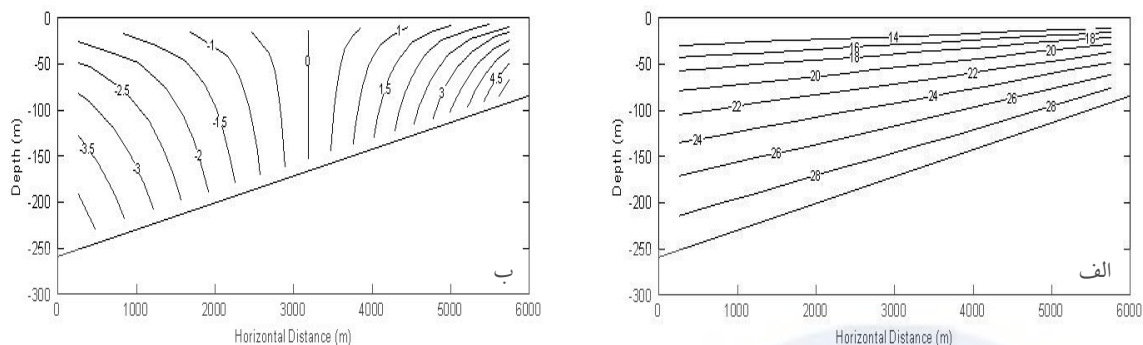
$$S(x, z) = \left(\frac{z}{H_{max}} \right)^{1/3} S_{max} \quad (14)$$

در رابطه بالا H_{max} عمق حداکثر حوضچه و S_{max} شوری حداکثر (که در اینجا برابر 34 واحد در نظر گرفته شده است) می‌باشند. ضرایب پخشیدگی در جهت افق و قائم به ترتیب 5 و صفر مترمربع بر ثانیه در نظر گرفته شده‌اند. دامنه محاسباتی به 12 سلول در جهت افق در 7 لایه تقسیم شده است. گام زمانی برابر 50000 ثانیه اختیار و در مرزهای سمت چپ و راست و همچنین مرزهای بالا و پایین شرایط عبور شار صفر در نظر گرفته شده است، بنابراین انتظار می‌رود شرایط شوری نسبت به زمان تغییر نکند.



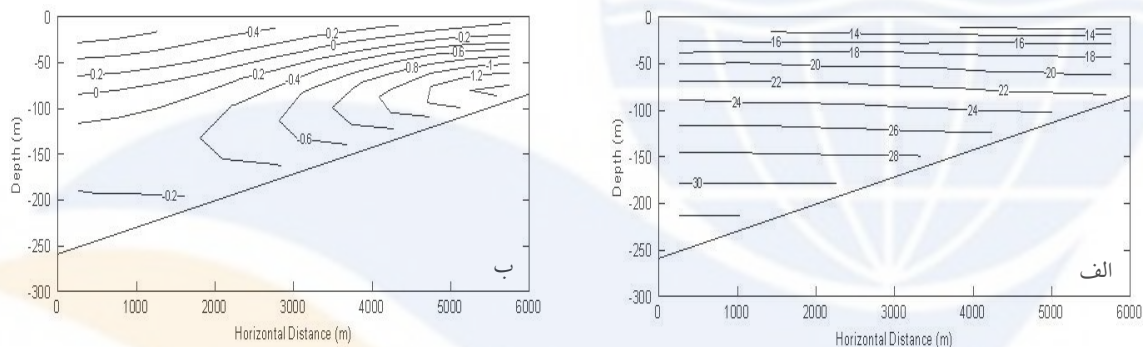
شکل 4) توزیع اولیه غلظت شوری

شکل 5-الف توزیع شوری پس از 30 روز را در حالتی نشان می‌دهد که از شبکه‌بندی سیگما و حل مستقیم معادله پخشیدگی بدون در نظر داشتن تمهیدات خاصی استفاده شده است و شکل 5-ب اختلاف شوری در روز 30 ام با روز اول را نشان می‌دهد. همانطور که پیشتر اشاره گردید انتظار می‌رود که توزیع شوری نسبت به زمان ثابت باشد در حالیکه با استفاده از شبکه‌بندی سیگما اختلاف قابل ملاحظه‌ای در توزیع شوری رخ داده است.



شکل 5) نتایج شبیه‌سازی با استفاده از شبکه‌بندی سیگما
الف) توزیع شوری پس از 30 روز و ب) اختلاف بین توزیع روز 30 ام با روز اول

شکل 6 نشان می‌دهد که استفاده از شبکه‌بندی پله‌ای خطای ناشی از شیب‌دار بودن لایه‌ها را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش داده است.



شکل 6) نتایج شبیه‌سازی با استفاده از شبکه‌بندی پله‌ای
الف) توزیع شوری پس از 30 روز و ب) اختلاف بین توزیع روز 30 ام با روز اول

همانطور که در شکل 6-ب مشاهده می‌شود میزان خطا پس از 30 روز در حدود 1/4 واحد می‌باشد، این در حالیست که در شبکه‌بندی سیگما خطای بوجود آمده بیش از 4/5 واحد می‌باشد (شکل 5-ب). در صورت استفاده از روش حل صریح، در انتخاب گام زمانی با محدودیت مواجه خواهیم بود و همانطور که اشاره گردید باید گام زمانی انتخاب شده شرط $\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5$ را ارضاء نماید و با مقادیر انتخاب شده‌ی گام مکانی و ضریب پخشیدگی در مسئله مذکور، گام زمانی می‌بایست کوچکتر از 25000 ثانیه باشد. این در حالیست که در روش حل ضمنی ارائه شده با این محدودیت مواجه نبوده و مقادیر گام زمانی بزرگتر از این مقدار نیز جوابگو بوده و منجر به ناپایداری برنامه نشده است.

6- نتیجه گیری

امروزه با افزایش فعالیت‌های مربوط به سواحل، دریاها و کانال‌های آبی، نیاز به شناخت هرچه بیشتر این محیط آبی اهمیت بیشتری پیدا کرده است. برای شناخت بهتر و امکان مدلسازی فرایندهای دریایی نظیر جریانات دریایی، امواج، رسوبات و محیط زیست دریا مدل‌های عددی زیادی توسعه یافته‌اند. در اکثر مدل‌های عددی توسعه یافته، حل معادله پخشیدگی یکی از ارکان اصلی روند کار بحساب می‌آید. مدلسازی عددی پدیده‌هایی نظیر انتقال رسوب، پخش آلودگی، حرارت و شوری در دریا و رودخانه، امواج و جریانات دریایی مستقیماً با حل معادله پخشیدگی در

ارتباط می‌باشند. بسیاری از مدل‌های سه بعدی هیدرودینامیکی از شبکه‌بندی سیگما بهره می‌برند که در مقایسه با مدل‌هایی که از روش‌های مبتنی بر انتقال حجم سیال استفاده می‌کنند، بسیار کم هزینه‌تر می‌باشند. روش‌های مرسوم در حل معادلات افقی پخشیدگی در شبکه‌بندی سیگما، مقادیر شار عبوری نادرستی را سبب می‌گردد. استفاده از شبکه‌بندی پلکانی که در این مطالعه معرفی گردید، دقت حل معادله پخشیدگی در جهت افق را بطور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده است و آزمایش عددی انجام گرفته در این مطالعه دقت روش انجام شده را تایید می‌نماید. انتخاب صحیح مقادیر گام زمانی و مکانی در مدلسازی‌های عددی، یکی از دغدغه‌های پیش رو برای مهندسين و برنامه‌نویسان بوده است. روش‌های حل ضمنی معادلات، بعضاً باعث از بین رفتن این محدودیت‌ها می‌گردد. در روش حل صریح معادله پخشیدگی، مقادیر گام‌های مکانی و زمانی می‌بایست طوری اختیار گردند که شرط $\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5$ ارضاء گردد. در روش ارائه شده در این مطالعه، ضمن تعریف و استفاده از شبکه‌بندی پلکانی که سبب افزایش دقت در حل معادله پخشیدگی شده است، به ارائه روشی ضمنی برای حل این معادله پرداخته شده که ما را در انتخاب مقادیر گام‌های مکانی و زمانی، بی‌نیاز به رعایت شرط فوق می‌نماید. در انتها برای صحت از عملکرد روش ارائه شده به حل آزمایشی پرداخته شده است که در این آزمایش غلظت شوری در یک حوضچه بسته با بستری شیب‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. پس از شبیه‌سازی 30 روزه توزیع شوری همانطور که انتظار می‌رفت تقریباً بدون تغییر باقی مانده است، این در حالیست که با استفاده از روش‌های مرسوم این توزیع کاملاً از حالت اولیه خود خارج گردیده است. اگرچه در این مطالعه توزیع غلظت شوری مورد بررسی قرار گرفته است، روش مذکور می‌تواند در مدلسازی انتقال رسوب، آلودگی و دیگر پدیده‌های هیدرولیکی نیز بکار گرفته شود. همچنین می‌توان از روش پیشنهاد شده در این مطالعه در محاسبه مقدار شار عبوری ناشی از انتقال¹ نیز استفاده نمود.

7- مراجع

- [1]- Park J.C., Kim M.H., Miyata H., (1999). "Fully non-linear free-surface simulations by a 3D viscous numerical wave tank", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29 (6), 685-703.
- [2]- Hur D.S., Mizutani N., (2003). "Numerical estimation of the wave forces acting on a three-dimensional body on submerged breakwater", *Coastal Engineering*, 47, 329-345.
- [3]- Ting F.C.K., Kirby J.T., (1996). "Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker", *Coastal Engineering*, 27 (1996) 131-160
- [4]- Phillips, N.A., (1957), "A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting", *Journal of Meteorology*, Vol. 14, 184-185.
- [5]- Fortunato, A., Baptista, A., (1994), "Localized sigma coordinates for the vertical structure of hydrodynamic models", In: Spaulding, M.L. et al. (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Estuarine and Coastal Modeling*. ASCE, New York.
- [6]- Mellor, G.L., Blumberg, A.F., (1985), "Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system", *Monthly Weather Review* 113, 1379-1383.
- [7]- Huang, W., Spaulding, M., (1996), "Modeling horizontal diffusion with sigma coordinate system", *Journal of Hydraulic Engineering* 122 (6), 349-352.
- [8]- Huang, W., Spaulding, M., (2002), "Reducing horizontal diffusion errors in sigma coordinate coastal ocean models with a second order Lagrangian-interpolation finite-difference scheme", *Ocean Engineering* 29, 495-512.
- [9]- Yuan H.L., Wu C.H., (2004), "An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46, pp 709-733.
- [10]- Yuan H.L., Wu C.H., (2006), "Fully non-hydrostatic modeling of surface waves. *Journal of Engineering Mechanics*", 132(4), pp 447-456.

¹ Advection