توصیف سیستم G/M/۱/K با در نظر گرفتن صف محدود و وجود زمان start up نمایی و یک شیوه حل بازگشتی

۱ و نویسنده مسئول - *ابوالفضل روحانی: مربی، عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران ،ایران ،دانشجوی دکتری مهندسی صنایع دانشگاه تهران* abolfazl_rohani@yahoo.com
۲- فرهاد صالحیان : *مشاور ریاست سازمان راهداری کشور، دانشجوی دکتری مهندسی صنایع دانشگاه تهران*
۳- فریبرز جولای: *استاد ، عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع دانشکده فنی دانشگاه تهران*

چکیده:

در این مقاله بعد از معرفی سیستم صفG/M/۱ با ظرفیت محدود K و مفهوم F-policy یعنی عدم اجازه ورود مشتریان وقتی تعداد آنان در صف به عدد مشخصی می‌رسد، مدل با استفاده از تکنیک متغیر اضافی به عنوان زمان باقیمانده بین دو ورودی که یک روش بازگشتی می‌باشد، حل شده است.برای تشریح و فهم بهتر مطالب سه مثال از زمان بین دو ورودی نمایی،ارلنگ درجه سوم و قطعی مطرح شده و در پایان آنالیز حساسیت و نقاط قوت و ضعف طرح بیان شده است.از آن جایی که تابع توزیع ورودی به صورت عمومی تعریف شده لذا این مدل از وسعت دامنه حل خوبی برخوردار است.همچنین نظر به محدودیت ظرفیت سیستم که خاص دنیای واقعی می‌باشد، کاربردی بوده لذا با کنترل نمودن تعداد مشتریان ورودی ، مدیریت بهینه در حداقل سازی هزینه‌ها می‌نماید.از نتایج این مدل میتوان در مهندسی ترافیک و حمل ونقل،تعمیرات و نگهداری و برخی دیگر از سیستم‌های صف استفاده نمود.

کلید واژه: سیستم صف G/M/۱ ، تکنیک متغیر اضافی، روش بازگشتی، تابع توزیع

۱- مقدمه

در این مقاله از تکنیک متغیر اضافی برای آنالیز کنترل بهینه سیستم صفF-policy G/M/۱/K در حالتی که سرور به یک زمان start up قبل از اجازه دادن به مشتریان برای ورود به سیستم نیاز دارد. K که کمتر از بی نهایت است ماکزیمم ظرفیت سیستم را بیان می کند. تمرکز روش کنترل کردن ورودی ها بر کم کردن تعداد مشتریان در سیستم می باشد. مدل ارائه شده این مقاله به علت اینکه کنترل کردن مشتریان ورودی را در نظر گرفته است، برای موقعیت های واقعی بسیار مفید می باشد.

راه حل تحلیلی حالت پایدار سیستم صف F-policy M/M/۱/K با زمان start up نهایی برای اولین بار توسط Gupta انجام شده است. اگرچه، راه حل های تحلیلی حالت پایدار سیستم های صف F-policy با توزیع نوع کلی زمان های بین ورود و یا توزیع زمان های سرویس بدست نیامده است. بدست آوردن عباراتی واضح برای توزیع احتمال تعداد مشتریان در سیستم در حالت پایدار بسیار مشکل است. البته بدست آوردن عباراتی واضح برای توزیع احتمال تعداد مشتریان در سیستم در حالت پایدار آسان می شود وقتی که از تکنیک متغیر اضافی در سیستم صف غیرمارکفی که دارای زمان های بین ورود با توزیع کلی و یا زمان های سرویس با توزیع کلی است، استفاده شود. CoX اولین فردی بود که تکنیک متغیر اضافی را معرفی نمود. بر اساس این تکنیک، Gupta و Rao یک روش بازگشتی به ترتیب برای توسعه دادن توزیع احتمالی در حالت پایدار تعداد ماشین های از کار افتاده در مسائل تعمیر ماشین بدون ماشین یدکی M/G/۱ و همچنین مسائل تعمیر ماشین Cold-Stand by M/G/۱ ارائه کرده اند.

کارهای انجام شده در گذشته در رابطه با صف را می توان به ۲ گروه با توجه به اینکه سیستم تصور شده است که سرویس را کنترل کند یا ورودی ها را، تقسیم نمود. در گروه اول که سرویس را کنترل می کنند، سیستم صف N-policy M/M/۱ بدون زمان start up اولین بار توسط Yadin و Naor ارائه شد. گسترش این مدل توسط Bell, Heymar, Kimura, Teghem, Wang وKe انجام شده است.

Wang و Ke یک روش بازگشتی بوجود آورده اند و از تکنیک متغیر اضافی برای توسعه دادن توزیع احتمالی حالت پایدار تعداد مشتریان در سیستم صف N-policy M/G/۱/L استفاده کرده اند. Ke و Wang یک روش بازگشتی ارائه کرده اند و تکنیک متغیر اضافی را به کار برده اند تا توزیع احتمالی حالت پایدار تعداد مشتریان برای سیستم صف N-policy G/M/۱/L را بدست آورند.

Start up سرور مشابه با کار مقدماتی سرور قبل از شروع کردن سرویس است. در بعضی حالات واقعی، اغلب سرور نیاز به زمان start up قبل از شروع کردن به سرویس دارد. برخی پژوهشگران تحقیقاتی بر روی سیستم های صف با زمان start up مخصوصا N-policy M/G/۱ انجام داده اند. Baker اولین کسی بود که بر روی سیستم صف N-policy M/M/۱ با یک زمان start up نمایی مطالعه کرد. Borthakur مدل Baker را با زمان start up کلی گسترش داد. بر روی سیستم صف N-policy M/G/۱با زمان start up برخی محققان نظیر Medhi, Templeton, Takugi, Lee, Park, Hur, Paik و Krishna تحقیقاتی انجام داده اند. Ke یک روش بازگشتی ارائه کرده است که در آن از تکنیک متغیر اضافی برای محاسبه کردن خصوصیات عملیاتی سیستم صف N-policy G/M/۱/L با زمان start up نمایی، استفاده شده است. در گروه دوم که ورودی ها را کنترل می کند، توسعه تحلیلی برای کنترل کردن ورودی ها در مسائل صف بسیار کم در مقالات یافت می شود. و از بین مقالات موجود زمان سرویس یا زمان بین ورودی بیشتر آنها توزیع کلی دارد. اکثر کارهای انجام شده در گذشته بر روی سیستم مارکف تمرکز داشته است. Gupta اولین کسی بود که راه حل های تحلیلی حالت پایدار سیستم صف F-Policy M/M/۱/K با زمان start up نمایی را ارائه داد. ارتباط بین عمل کردن N-policy و F-policy نیز توسط Gupta ایجاد گردید.

در عمل، خاصیت عدم حافظگی فرآیندهای ورودی همیشه با نیازهای کاربردها مواجه نمی شود چرا که برای زمان بین دو ورودی توزیع کلی نسبت به توزیع نمایی مناسب تر و منطقی تر به نظر می رسد. توزیع کلی می تواند حالات خاصی مانند نمایی، ارلنگ، فوق نمایی، قطعی و ... را در بر بگیرید. اگرچه جدا از مباحث تئوریتیکی، بعضی از حالات واقعی فرض های شرایط مارکفی برای زمان سرویس را برآورده می نماید.

در بخش ۲، مدل صف به صورت مختصر توصیف شده است. توجیه عملی مدل نیز در این بخش آورده شده است. بخش ۳ یک روش بازگشتی ارائه کرده است که در آن از تکنیک متغیر اضافی استفاده شده است. متغیر اضافی به عنوان زمان باقی مانده بین دو ورودی معرفی شده است تا با کمک این تکنیک توزیع احتمالی حالت پایدار تعداد مشتریان در سیستم صف F-policy G/M/۱/K بدست آید. همچنین برای الگوریتم حل سه مثال با توزیع زمان های بین ورودی مختلف: نمایی، ارلنگ نوع ۳ و قطعی آورده شده است. در بخش ۴، معیارهای کارایی مختلف سیستم ارائه شده است. تابع هزینه مورد انتظار کل در هر واحد زمانی برای سیستم صف F-policy G/M/۱/K با زمان های start up بررسی شده است. نتایج عددی و مقایسه ای در بخش ۵ نشان داده شده است. در پایان، بخش ۶ شامل تعدادی نکات می باشد.

۱- توصیف سیستم

در این مقاله گروه کنترل کردن ورودی ها برای سیستم صف F-policy G/M/۱/K با زمان start up نمایی در نظر گرفته شده است.

در اینجا فرض شده است که زمان های سپری شده بین دو ورود موفق از یکدیگر مستقل هستند و متغیرهای تصادفی تابع کلی A(v) (v>۰)، تابع چگالی احتمال a(v) (v>۰) و میانگین زمان بین دو ورودی b_1دارند. زمان های سرویس مشتریان که متغیر تصادفی مستقل هستند، توزیع نمایی با میانگین $1/\mu$ دارد. در اینجا فرض شده است که مشتریان از طریق یک کانال وارد سرور می شوند و ترتیب سرویس شدنشان بر اساس ترتیب ورودشان می باشد. که این همان قاعده FCFS است. همچنین در نظر بگیرید سرور فقط می تواند در هر لحظه یک مشتری را سرویس کند و سرویس از ورود مشتریان مستقل است. اگر مشتریان ورودی به خدمات سرویس هنگام ورود مشاهده کردند سرویس در حال فعالیت است باید در صف صبر کنند تا سرور در دسترس گردد. Gupta در ابتدا مفهوم F-policy را بیان کرده است. مفهوم F-policy به شرح زیر می باشد: وقتی که تعداد مشتریان در سیستم به K (ظرفیت سیستم) می رسد (یعنی سیستم پر می شود)، دیگر اجازه ورود به هیچ مشتری دیگری داده نمی شود مگر اینکه تعداد معینی از مشتریان در سیستم سرویس شوند به گونه ای که تعداد مشتریان فعلی در سیستم به یک حد آستانه ای مانند F کاهش یابد ($0 \le F < K - 1$). در این زمان، سرور باید زمان start upی با پارامتر β را صرف کند تا بتواند به مشتریان جدید اجازه ورود به سیستم را بدهد. بنابر این سیستم به صورت عادی کار می کند تا هنگامی که دوباره تعداد مشتریان در سیستم به ظرفیت سیستم برسد. در این هنگام روند بالا دوباره تکرار می گردد.

۱،۲- توجیه عملی مدل

تعدادی از مسائل عملی بوجود آمده، ممکن است نیاز به یک زمان start up داشته باشد تا اجازه ورود مشتریان را به سیستم بعد از آن زمان بدهد. چنین مدل هایی پتانسیل مفید بودن در زندگی واقعی کاربردی را دارا هستند. برای مثال، در فرآیند کامپیوتر و سیستم های سرویس، پیام ها به کامپیوترها (پروسسورها) فرستاده می شود. اگر پروسسور خالی باشد پیام پذیرفته می شود در غیر این صورت پیام به طور موقت در یک بافری ذخیره می شود تا چند لحظه بعد ارائه گردد. وقتی که بافر پر است، برای پیام

های در حال رسیدن محدودیت ورود وجود دارد تا اینکه تعداد پیام ها به یک حد آستانه ای کاهش یابد. وقتی که بافر سیستم به حد آستانه ای کاهش یافت، پیام ها فورا برای ورود به سیستم پذیرفته می شوند.

این روش از over-load شدن سیستم جلوگیری می کند. کاربرد دیگر مدل ارائه شده در مسائل حمل و نقل است. برای جلوگیری کردن از ترافیک سنگین بوجود آمده از بازگشت موتور سواران در روز thanksgiving، رمپ های ورودی در طول بزرگراه با یک سیستمی کنترل می شود. وقتی جریان ترافیک متراکم است، رمپ های ورودی برای روان سازی ترافیک بزرگراه بسته می شوند. وسایل نقلیه پس از این که ترافیک بهبود یابد مجددا اجازه ورود می یابند. رمپ های ورودی ممکن است به نگهداری نیاز داشته باشند که در این صورت ممکن است موقتا غیر فعال گردد.

۲،۲- Notation

نماد های مورد استفاده در مقاله به همراه تعاریف آنها در زیر آمده است:

F: سطح حد آستانه ای (سطحی که در آن اجازه ورود به سیستم داده شود)

K: ظرفیت سیستم $K > F + 1$

A: متغیر تصادفی زمان بین دو ورودی

V: متغیر تصادفی زمان باقیمانده بین دو ورودی

A(v): تابع توزیع A

a(v): تابع چگالی احتمال A

$a^*(\theta)$: تبدیل Laplace-stieltjes(LST)، A

$a^{*(l)}(\theta)$: L امین مشتق $a^*(\theta)$ نسبت به θ

$P_{\cdot,\cdot}(t)$: احتمال اینکه هیچ کس در سیستم در زمان t نباشد وقتی که ورودی ها اجازه ورود به سیستم را ندارند.

$P_{\cdot,n}(t)$: احتمال اینکه n نفر در سیستم در زمان t باشد وقتی که ورودی ها اجازه ورود به سیستم را ندارند.

$P_{1,\cdot}(t)$: احتمال اینکه هیچ کس در سیستم در زمان t نباشد وقتی که ورودی ها اجازه ورود به سیستم را دارند.

$P_{1,n}(t)$: احتمال اینکه n نفر در سیستم در زمان t باشد وقتی که ورودی ها اجازه ورود به سیستم را دارند.

۲- نتایج حالت پایدار

در زمان t برای سیستم عبارات زیر را تعریف کنیم.

$N(t)$: تعداد مشتریان در سیستم

V(t): زمان باقیمانده بین دو ورودی برای مشتریانی که در حال رسیدن هستند.

حال تعریف می کنیم:

$$\geqslant 0,\ n = 0, 1, \ldots, F,$$
$$\geqslant 0,\ n = 0, 1, \ldots, K-1,$$

در حالت پایدار تعریف می کنیم:

$$P_{0,n} = \lim_{t\to\infty} P_{0,n}(t), \quad n = 0, 1, \ldots, K,$$
$$P_{1,n} = \lim_{t\to\infty} P_{0,n}(t), \quad n = 0, 1, \ldots, K-1,$$
$$P_{0,n}(v) = \lim_{t\to\infty} P_{0,n}(v,t), \quad n = 0, 1, \ldots, F,$$
$$P_{1,n}(v) = \lim_{t\to\infty} P_{1,n}(v,t), \quad n = 0, 1, \ldots, K-1$$

و تعریف بیشتر

$$P_{0,n}(v) = P_{0,n}a(v), \quad n = 0, 1, \ldots, F. \tag{1}$$

برای سیستم صف F-policy G/M/۱/K با سرور دارای start up، ما می توانیم به آسانی معادلات حالت پایدار را از طریق زیر بدست آوریم:

$$0 = -\beta P_{0,0} + \mu P_{0,1}, \tag{2}$$
$$0 = -(\beta+\mu)P_{0,n} + \mu P_{0,n+1}, \quad 1 \leqslant n \leqslant F, \tag{3}$$
$$0 = -\mu P_{0,n} + \mu P_{0,n+1}, \quad F+1 \leqslant n \leqslant K-1, \tag{4}$$
$$0 = -\mu P_{0,K} + P_{1,K-1}(0), \tag{5}$$

(6)

(7)

(8)

(9)

ما تبدیل *Laplace-stieltjes(LST)* را اینگونه بیان می کنیم:

$$a^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta v} dA(v) = \int_0^\infty e^{-\theta v} a(v) dv,$$
$$P^*_{i,n}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta v} P_{i,n}(v) dv, \quad i = 0, 1,$$
$$P_{i,n} = P^*_{i,n}(0) = \int_0^\infty P_{i,n}(v) dv, \quad i = 0, 1,$$
$$\int_0^\infty e^{-\theta v} \frac{\partial}{\partial u} P_{i,n}(v) dv = \theta P^*_{i,n}(\theta) - P_{i,n}(0), \quad i = 0, 1.$$

با قرار دادن *LST* در دو طرف معادلات ۶ تا ۹ معادلات زیر بدست می آید:

$$-\theta P^*_{1,0}(\theta) = \beta P_{0,0}a^*(\theta) + \mu P^*_{1,1}(\theta) - P_{1,0}(0), \tag{10}$$

$$(\mu-\theta)P^*_{1,n}(\theta) = \beta P_{0,n}a^*(\theta) + \mu P^*_{1,n+1}(\theta) + P_{1,n-1}(0)a^*(\theta) - P_{1,n}(0), \quad 1 \leqslant n \leqslant F, \tag{11}$$

$$(\mu-\theta)P^*_{1,n}(\theta) = \mu P^*_{1,n+1}(\theta) + P_{1,n-1}(0)a^*(\theta) - P_{1,n}(0), \quad F+1 \leqslant n \leqslant K-2, \tag{12}$$

$$(\mu-\theta)P^*_{1,K-1}(\theta) = P_{1,K-2}(0)a^*(\theta) - P_{1,K-1}(0). \tag{13}$$

۱,۳- روش بازگشتی

کار اصلی ما توسعه دادن احتمالات حالت پایدار $P^*_{\cdot,n}(\cdot)$ و $P^*_{1,n}(\cdot)$ در حالتی که $1 \le n \le K$ است، می باشد. الگوریتم راه حل ما ابتدا $P^*_{\cdot,n}(\cdot)$ را بدست می آورد.

با استفاده کردن از معادلات ۲ تا ۵ داریم:

$$P^*_{0,n}(0) = \phi_n P_{0,0}, \quad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{14}$$

$$P_{1,K-1}(0) = \mu\phi_{F+1}P_{0,0}, \tag{15}$$

که در آن

$$\phi_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \dfrac{\beta}{\mu}\left(1+\dfrac{\beta}{\mu}\right)^{\zeta_{n-1}}, & 1 \leqslant n \leqslant K, \end{cases} \tag{16}$$

و

$$\zeta_n = \begin{cases} n, & 0 \leqslant n \leqslant F-1, \\ F, & F \leqslant n \leqslant K. \end{cases}$$

بنابر این با استفاده از معادله ۱۴ $P^*_{\cdot,1}(\cdot)$،$P^*_{\cdot,2}(\cdot)$،...،$P^*_{\cdot,k}(\cdot)$ را می توان بدست آورد.

سپس ما عبارت $P_{1,n}(\cdot)$ $(\cdot \le n \le K-2)$ را بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست می آوریم. با استفاده از معادلات ۱۴ و ۱۵ و قرار دادن آنها در معادلات ۱۱ تا ۱۳ و همچنین جایگزینی $\theta = \mu$ در این معادلات داریم:

$$P_{1,n}(0) = \frac{P_{1,n+1}(0) - \mu P^*_{1,n+2}(\mu) - \beta\varphi_{n+1,F}\phi_{n+1}P_{0,0}a^*(\mu)}{a^*(\mu)}, \quad 0 \leqslant n \leqslant K-3, \tag{17}$$

که در آن

$$\varphi_{n,F} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant n \leqslant F, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$P_{1,K-2}(0) = \frac{\mu\phi_{F+1}}{a^*(\mu)}P_{0,0}. \tag{18}$$

برای بدست آوردن $P^{*}_{1,n+2}(\mu)$ $(0 \le n \le K-3)$ در معادله ۱۷، رابطه های بدست آمده در معادلات ۱۴ و ۱۸ را در معادلات ۱۱ تا ۱۳ قرار داده سپس (l-۱) مرتبه از معادلات ۱۱ تا ۱۳ نسبت به θ مشتق می گیریم و در پایان به جای θ، μ می گذاریم. در نتیجه داریم:

$$P_{1,n}^{*(l-1)}(\mu) = -\frac{1}{l}[P_{1,n-1}(0)a^{*(l)}(\mu) + \beta\varphi_{n,F}\phi_n P_{0,0}a^{*(l)}(\mu) + \mu P_{1,n+1}^{*(l)}(\mu)], \tag{19}$$

where $2 \leqslant n \leqslant K-2,\ l = 1, \ldots, K-n-1,$

$$P_{1,K-1}^{*}(\mu) = -\frac{\mu\phi_{F+1}a^{*(1)}(\mu)}{a^{*}(\mu)}P_{0,0}, \tag{20}$$

where $P_{1,n}^{*(0)}(\mu) = P_{1,n}^{*}(\mu)$.

$$P_{1,n}^{*}(\mu) = -\frac{\beta\varphi_{n+2,F}a^{*}(\mu)}{\mu}\sum_{i=\zeta_{n+2}}^{F}\ell_{n-i-1}\phi_i P_{0,0} - \frac{a^{*}(\mu)}{\mu}\sum_{i=n+2}^{K-1}\ell_{n-i-1}P_{1,i-1}(0), \quad 2 \leqslant n \leqslant K-2, \tag{21}$$

حل کردن معادلات ۱۹ و ۲۰ به صورت بازگشتی در نهایت خواهیم داشت:

که در آن

$$\ell_n = \begin{cases} -\dfrac{(-\mu)^n a^{*(n)}(\mu)}{n!a^{*}(\mu)}, & 1 \leqslant n \leqslant K-1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{22}$$

با قرار دادن رابطه های ۲۰ و ۲۱ در معادله ۱۷ بدست خواهیم آورد:

$$P_{1,n}(0) = \frac{P_{1,n+1}(0)}{a^{*}(\mu)} + \sum_{i=n+2}^{K-1}\ell_{i-n-1}P_{1,i-1}(0) + \beta\left[\varphi_{n+2,F}\sum_{i=\zeta_{n+2}}^{F}\ell_{i-n-1}\phi_i - \varphi_{n+1,F}\phi_{n+1}\right]P_{0,0}, \quad 0 \leqslant n \leqslant K-3. \tag{23}$$

همچنین تعریف می کنیم:

$$\Psi_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\ \sum\limits_{\substack{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_k=n \\ \tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k \in \{1,2,\cdots,n\}}} \kappa_{\tau_1}\kappa_{\tau_2}\cdots\kappa_{\tau_k}, & n = 1, 2, \ldots, K-2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{24}$$

که در آن

$$\kappa_n = \begin{cases} \dfrac{1}{a^{*}(\mu)} + \ell_1, & n = 1, \\ \ell_n, & n = 2, 3, \ldots, K-2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{25}$$

است:

$$\Psi_4 = \kappa_4 + \kappa_3\kappa_1 + \kappa_2\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2\kappa_1 + \kappa_2\kappa_1\kappa_1 + \kappa_1\kappa_1\kappa_1\kappa_1 = \kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_1 + \kappa_2^2 + 3\kappa_1^2\kappa_2 + \kappa_1^4. \quad (26)$$

با استفاده از معادلات ۲۴ و ۲۵ برای حل معادله ۲۳ به صورت بازگشتی و همچنین استفاده از معادله ۱۸ در نهایت داریم:

$$P_{1,n}(0) = \sum_{i=1}^{K-n-1} \Psi_{K-n-i-1} \Lambda(K-i-1) P_{0,0}, \quad 0 \leqslant n \leqslant K-2, \quad (27)$$

که در آن

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \beta\varphi_{n+2,F} \sum\limits_{i=\zeta_{n+2}}^{F} \ell_{i-n-1}\phi_i - \beta\varphi_{n+1,F}\phi_{n+1}, & 0 \leqslant n \leqslant K-3, \\ \dfrac{\mu\phi_{F+1}}{a^*(\mu)}, & n = K-2. \end{cases} \quad (28)$$

در انتها، احتمالات $P^*_{1,n}(\cdot)$ بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ را توسعه می دهیم. با قرار دادن $\theta = 0$ در معادلات ۱۰ تا ۱۳ داریم:

$$P^*_{1,n}(0) = \frac{1}{\mu}\left[P_{1,n-1}(0) - \beta\sum_{i=0}^{\zeta_{n-1}} \phi_i P_{0,0}\right], \quad 1 \leqslant n \leqslant K-1. \quad (29)$$

هر زمان که $P_{1,1}(\cdot), P_{1,2}(\cdot), \ldots, P_{1,k-1}(\cdot)$ بدست آیند، $P^*_{1,1}(\cdot), P^*_{1,2}(\cdot), \ldots, P^*_{1,k-1}(\cdot)$ می توانند به صورت بازگشتی با استفاده از معادله ۲۹ بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آیند.

اکنون فقط مقدار $P^*_{1,\cdot}(\cdot)$ نامشخص است که می توان به کمک معادلات ۱۰ تا ۱۳ آن را بدست آورد. برای این کار، از معادلات ۱۰ تا ۱۳ نسبت به θ مشتق می گیریم و سپس $\theta = 0$ قرار می دهیم. بدست می آوریم:

$$P^*_{1,0}(0) = -\beta P_{0,0} a^{*(1)}(0) - \mu P^{*(1)}_{1,1}(0), \quad (30)$$

$$P^{*(1)}_{1,n}(0) = \frac{P_{1,n} + \beta\varphi_{n,F}\phi_n P_{0,0} a^{*(1)}(0) + \mu P^{*(1)}_{1,n+1}(0) + P_{1,n-1}(0) a^{*(1)}(0)}{\mu}, \quad 1 \leqslant n \leqslant K-1. \quad (31)$$

مقدار $P^{*(1)}_{1,n}(\cdot)$ برای $n = 1,2,\ldots,K-1$ را می توان از معادله ۳۱ به صورت بازگشتی به دست آورد. بنابر این بدست می آوریم:

$$P^*_{1,0}(0) = -\left[\beta a^{*(1)}(0) \sum_{i=0}^{F} \phi_n P_{0,0} + \sum_{i=1}^{K-1} P_{1,i} + a^{*(1)}(0) \sum_{i=0}^{K-2} P_{1,i}(0)\right]. \quad (32)$$

لذا $P^*_{1,\cdot}(\cdot), P^*_{1,1}(\cdot), \ldots, P^*_{1,k-1}(\cdot)$ نیز بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست می آیند. حال که همه مقادیر احتمال بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آمدند می توان با استفاده از معادله زیر $P_{\cdot,\cdot}$ را بدست آورد.

$$\sum_{i=0}^{K} P_{0,i} + \sum_{i=0}^{K-1} P_{1,i} = 1. \quad (33)$$

۲,۳- الگوریتم حل

مراحل الگوریتم حل به شرح زیر بیان شده اند:

گام ۱: با استفاده از معادله ۱۶ برای $n = 0,1,\dots,K$ ، $\emptyset_{\mathrm{n}}$ را محاسبه نمایید.

گام ۲: با استفاده از معادله ۱۴ برای $n = 1,2,\dots,K$ ، $P^{*}_{\cdot,\mathrm{n}}(0)$ را بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آورید.

گام ۳: با استفاده از معادلات ۲۲ و ۲۵ l_{n} $(1 \le n \le K-2)$ و κ_{n} $(1 \le n \le K-2)$ را به ترتیب محاسبه نمایید.

گام ۴: با استفاده از معادله ۲۴ برای $n = 0,1,\dots,K-2$، Ψ_{n} را محاسبه نمایید.

گام ۵: با استفاده از معادله ۲۸ برای $n = 0,1,\dots,K-2$، $\Lambda(n)$ را محاسبه نمایید.

گام ۶: با استفاده از معادله ۲۷ برای $n = 0,1,\dots,K-2$ ، $P_{1,\mathrm{n}}(0)$ را بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آورید.

گام ۷: با استفاده از معادله ۲۹ برای $n = 1,2,\dots,K-1$ ، $P^{*}_{1,\mathrm{n}}(0)$ را بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آورید.

گام ۸: با استفاده از معادله ۳۲، $P^{*}_{1,\cdot}(0)$ را بر حسب $P_{\cdot,\cdot}$ بدست آورید.

گام ۹: $P_{\cdot,\cdot}$ را با استفاده از معادله ۳۳ بدست آورید. سپس $P^{*}_{\cdot,\mathrm{n}}(0)$ $(n = 1,2,\dots,K)$ از گام ۲ و $P^{*}_{1,\mathrm{n}}(0)$ $(n = 0,1,\dots,K-1)$ از گام های ۷ و ۸ بدست آورده می شوند.

F-policy بهینه

بعضی از مقیاس های مهم کارایی سیستم صف F-policy G/M/1/K *با زمان* start up *این گونه تعریف می شوند:*

L_s: تعداد مشتریان مورد انتظار در سیستم

P_b: احتمال اینکه سرور مشغول باشد

P_s: احتمال اینکه سرور نیاز به یک زمان ***start up*** قبل از شروع سرویس داشته باشد

P_{bl}: احتمال اینکه سرور بلاک شده باشد

عبارات L_s، P_b، P_s و P_{bl} از طریق زیر بدست می آیند:

$$L_s = \sum_{n=1}^{K} nP_{0,n} + \sum_{n=1}^{K-1} nP_{1,n},$$

$$P_b = \sum_{n=0}^{K} P_{0,n} + \sum_{n=0}^{K-1} P_{1,n},$$

$$P_s = \sum_{n=0}^{F} P_{0,n},$$

$$P_{bl} = \sum_{n=0}^{K} P_{0,n}.$$

سپس ما تابع هزینه مورد انتظار کل در هر واحد زمانی برای سیستم صف *F-policy G/M/۱/K* با زمان های *start up* که در آن *F* متغیر تصمیم است را بسط می دهیم.

هدف اصلی این مقاله تعیین کردن *F-policy* عملیاتی بهینه است به طوری که این تابع هزینه مورد انتظار کل را کمینه نماید. حال تعریف می کنیم:

C_h: هزینه نگهداری در هر واحد زمانی برای هر مشتری حاضر در سیستم

C_b: هزینه برای یک سرور مشغول در هر واحد زمانی

C_s: هزینه *start up* در هر واحد زمانی برای فعالیت آماده سازی سرور قبل از شروع شدن سرویس

C_{bl}: هزینه ثابت برای هر مشتری از دست رفته وقتی که سیستم بلاک است

با استفاده کردن از تعاریف هر عنصر هزینه ارائه شده در بالا، تابع هزینه مورد انتظار کل در هر واحد زمانی بدست می آید:

$$\mathrm{TC}(F) = C_h L_s + C_b P_b + C_s P_s + C_{bl} \lambda P_{bl}. \tag{34}$$

مقدار بهینه *F*، F^* از طریق نامساوی زیر تعیین می گردد.

$$\mathrm{TC}(F^*-1) \geqslant \mathrm{TC}(F^*) \quad \text{and} \quad \mathrm{TC}(F^*+1) \geqslant \mathrm{TC}(F^*). \tag{35}$$

۳- مقایسات عددی

ظرفیت سیستم را *k*=۱۵ در نظر می گیریم. با تغییر دادن مقادیر معین پارامترهای سیستم، آنالیز حساسیت برای تغییرات حاصل در مقدار بهینه F^* را انجام می دهیم. در اینجا سه مثال ساده با سه توزیع زمان بین دو ورودی مختلف (نمایی، ارلنگ درجه ۳ و قطعی) را در نظر می گیریم. عناصر هزینه زیر به کار گرفته شده است:

Case 1: $C_h = 10,\ C_b = 200,\ C_s = 250,\ C_{bl} = 350.$
Case 2: $C_h = 10,\ C_b = 200,\ C_s = 250,\ C_{bl} = 400.$
Case 3: $C_h = 10,\ C_b = 200,\ C_s = 300,\ C_{bl} = 400.$
Case 4: $C_h = 10,\ C_b = 225,\ C_s = 300,\ C_{bl} = 400.$
Case 5: $C_h = 15,\ C_b = 225,\ C_s = 300,\ C_{bl} = 400.$

Table 1
The optimal value of F and its minimum expected cost for exponential interarrival time

		$(\mu,\beta)=(1.0,3.0)$			$(\lambda,\beta)=(0.7,3.0)$			$(\lambda,\mu)=(0.7,1.0)$		
		λ			μ			β		
		0.55	0.65	0.75	1.0	1.1	1.2	2.0	4.0	5.0
Case 1	F^*	6	4	3	4	6	8	4	4	4
	TC(F^*)	122.209	148.361	177.914	162.635	144.660	130.652	162.654	162.626	162.620
Case 2	F^*	8	6	5	5	8	11	5	5	5
	TC(F^*)	122.215	148.425	178.303	162.803	144.705	130.663	162.823	162.793	162.787
Case 3	F^*	8	6	5	5	8	11	5	5	5
	TC(F^*)	122.216	148.428	178.318	162.810	144.708	130.664	162.834	162.798	162.791
Case 4	F^*	7	5	4	4	7	10	5	4	4
	TC(F^*)	135.963	164.647	196.879	180.230	160.598	145.243	180.253	180.218	180.211
Case 5	F^*	4	3	2	2	4	6	2	2	2
	TC(F^*)	142.056	173.713	210.174	191.254	169.196	152.207	191.276	191.242	191.235

Table 2
The optimal value of F and its minimum expected cost for 3-stage Erlang interarrival time

		$(\mu,\beta)=(1.0,3.0)$			$(\lambda,\beta)=(0.7,3.0)$			$(\lambda,\mu)=(0.7,1.0)$		
		λ			μ			β		
		0.55	0.65	0.75	1.0	1.1	1.2	2.0	4.0	5.0
Case 1	F^*	7	5	4	4	7	9	4	4	4
	TC(F^*)	118.991	143.288	170.687	156.448	139.842	126.868	156.450	156.447	156.447
Case 2	F^*	9	7	5	6	9	12	6	6	6
	TC(F^*)	118.991	143.291	170.747	156.463	139.844	126.868	156.465	156.462	156.462
Case 3	F^*	9	7	5	6	9	11	6	6	6
	TC(F^*)	118.991	143.291	170.750	156.464	139.844	126.868	156.466	156.463	156.462
Case 4	F^*	8	6	4	5	8	11	5	5	5
	TC(F^*)	132.741	159.539	189.471	173.957	155.752	141.451	173.959	173.956	173.955
Case 5	F^*	5	4	3	3	5	7	3	3	3
	TC(F^*)	137.236	166.178	199.711	182.155	162.033	146.552	182.157	182.153	182.153

Table 3
The optimal value of F and its minimum expected cost for deterministic interarrival time

		$(\mu,\beta)=(1.0,3.0)$			$(\lambda,\beta)=(0.7,3.0)$			$(\lambda,\mu)=(0.7,1.0)$		
		λ			μ			β		
		0.55	0.65	0.75	1.0	1.1	1.2	2.0	4.0	5.0
Case 1	F^*	10	6	4	5	7	10	5	5	5
	TC(F^*)	117.440	140.710	166.469	153.130	137.435	125.030	153.130	153.129	153.129
Case 2	F^*	10	7	5	6	9	12	6	6	6
	TC(F^*)	117.440	140.710	166.477	153.131	137.435	125.030	153.131	153.130	153.130
Case 3	F^*	12	7	5	6	9	12	6	6	6
	TC(F^*)	117.440	140.710	166.478	153.131	137.435	125.030	153.131	153.131	153.130
Case 4	F^*	9	6	5	5	8	11	6	5	5
	TC(F^*)	131.190	156.960	185.224	170.630	153.344	139.613	170.630	170.630	170.630
Case 5	F^*	6	4	3	4	6	8	4	4	4
	TC(F^*)	134.911	162.315	193.445	177.193	158.425	143.794	177.193	177.193	177.193

مقادیر مختلفی انتخاب شد. سپس مقدار $(\lambda,\beta)=(۰.۷,۳)$ را ثابت در نظر گرفتیم و برای μ=۱, ۱.۱, ۱.۲ مقادیر مختلفی در نظر گرفته شد. در انتها نیز $(\lambda,\mu)=(۰.۷,۱)$ ثابت در نظر گرفته شد و مقادیر مختلفی از $\beta=۲,۴,۵$ انتخاب شد.

مقدار بهینه F، F^*، و $TC(F^*)$ هزینه مورد انتظار کمینه برای ۵ مورد بالا در جدول ۱-۳ نشان داده شده است. برای مقادیر ثابت (μ,β) و مقادیر مختلف λ در جداول ۱-۳، پی می بریم که ۱) برای هر حالت با افزایش λ $TC(F^*)$ افزایش می یابد ۲) برای هر حالت با افزایش λ، F^* کاهش می یابد. برای مقادیر ثابت (λ,β) و مقادیر مختلف μ در جدول ۱-۳، فهمیدیم که ۱) برای هر حالت با افزایش μ، $TC(F^*)$ کاهش می یابد ۲) برای هر حالت با افزایش μ، F^* افزایش می یابد. دوباره، برای مقادیر ثابت (λ,μ) و مقادیر مختلف β در جداول ۱-۳، پی بردیم که ۱) برای هر حالت با افزایش β، $TC(F^*)$ به کندی کاهش می یابد و ۲) برای هر حالت با افزایش β از ۲ تا ۵، F^* تغییر نمی کند. بنابر این F^* نسبت به تغییرات β غیرحساس می باشد.

براحتی می توان از جداول ۱-۳ پی برد که ۱) با کاهش C_h، F^* افزایش می یابد (حالات ۴ و ۵ را ببینید) و ۲) C_h نسبت به C_s,C_{bl} و C_b تاثیر بیشتری بر روی F^* دارد (حالات ۳و۴، حالات ۲و۳ و حالات ۱و۲ را ببینید).

۵- نتیجه گیری

نتایج تحلیلی حالت پایدار توسعه یافته در این مقاله مفید خواهند بود چرا که برای شاغلان و طراحان سیستم معنی دار است. هدف های اصلی این مقاله در طی سه مرحله بدست آمده است. ما در ابتدا یک روش بازگشتی برای بدست آوردن توزیع احتمال حالت پایدار تعداد مشتریان در سیستم ارائه نموده ایم. سپس، مثالی برای روشن شدن بحث بر اساس سه توزیع مختلف زمان بین ورودی ها ارائه شده است: نمائی، ارلنگ نوع سوم و قطعی. به علاوه ما یک الگوریتم حل بسیار موثر برای بدست آوردن حد آستانه ای F^* بهینه با توجه به حداقل هزینه ارائه نموده ایم.

در پایان، آنالیز حساسیت میان ارزش بهینه F، ارزش های مشخص پارامترهای سیستم و عناصر هزینه انجام شده است. برای کار بیشتر، سیستم های کنترل ورودی توسعه یافته در این مقاله می تواند بعضی سیستم های کیفیت و سرویس را در دنیای واقعی مدل نماید.

نقاط قوت مقاله

* موردی که در مقاله بررسی شده است یک موضوع صرف تئوری نیست بلکه این حالت در واقعیت و زندگی روزمره نیز وجود دارد. لذا بی شک این یکی از نقاط قوت این مقاله می باشد. دلیل این ادعا این است که

۱) ظرفیت سیستم محدود است که بسیاری از مدل های واقعیت این گونه هستند.

۲) F-policy در فرض مقاله گنجانده شده است و این خود با بعضی حالات واقعی مطابقت دارد. برای مثال در اتوبانی که جریان ترافیک سنگین وجود دارد اگر تعداد اتومبیل های موجود در اتوبان به K برسد رمپ های ورودی به اتوبان را می بندند و حال اگر تعداد اتومبیل ها به F کاهش یابد، دوباره اجازه ورود به اتوبان را می دهند. یا سیستمی که پیام دریافت می کند اگر به یک حدی تعداد پیام ها برسد بلاک می شود و بعد از این که تعدادی از آنها از سیستم خارج شدند دوباره اجازه ورود به سیستم را می دهد.

۳) پس از رسیدن تعداد مشتریان داخل سیستم به یک میزان مشخصی سرور نیاز به یک زمان *start up* برای اجازه ورود مجدد مشتریان به سیستم دارد که این در بسیاری از حالات واقعی وجود دارد. مثلا برای مثال های فوق زمان تعمیرات، نگهداری یا زمان بالا رفتن مانع جلو اتومبیل ها در ابتدای رمپ و ... است.

۴) تابع توزیع ورود عمومی تعریف شده است لذا هر تابع توزیع ورودی را می تواند در بر بگیرد که این خود دامنه کاربرد این مقاله را گسترش می دهد.

۵) تمرکز روش کنترل کردن ورودی ها بر کم کردن تعداد مشتریان در سیستم می باشد. مدل ارائه شده این مقاله به علت اینکه کنترل کردن مشتریان ورودی را در نظر گرفته است، برای موقعیت های واقعی بسیار مفید است.

* یکی از دیگر نکات خوب مقاله این است که با توجه به تمامی هزینه هایی که برای یک سیستم وجود دارد از قبیل هزینه وجود هر مشتری در سیستم، هزینه بلاک شدن سیستم، هزینه سرویس هر مشتری و هزینه *start up*، نویسنده از طریق روابط موجود مقدار F بهینه را بدست آورده است تا در آن مقدار کمترین هزینه برای سیستم مورد تصور باشد.

* روابط احتمالی که در انتها پس از یک سری محاسبات سنگین و پیچیده بدست آمده است بسیار ساده می باشد و به راحتی با پیروی از الگوریتم داده شده و با هر تابع توزیعی قابل محاسبه می باشد.

* در این مقاله سعی به کنترل ورودی ها شده است در حالیکه اکثر مقالات قبلی سرویس را که راحت تر بود کنترل می کردند.

* از آنجایی که بسیاری از سیستم ها زمان *start up* در آنها وجود دارد، می توان با قرار دادن $B=0$ مساله را برای آن حالات نیز حل کرد.

نقاط ضعف

- برای محاسبه F بهینه، از یک تابع هزینه ای استفاده شده است که سعی شده هر F ی که با آن تابع کمتر شد، F بهینه معرفی شود. در این تابع از مقیاس های کارایی نظیر متوسط تعداد افراد در سیستم، احتمال مشغول بودن سرور، احتمال نیاز به زمان *start up* و احتمال بلاک شدن استفاده شده است.
  اما در انتخاب F، مدت زمانی که افراد سیستم در صف می ایستند به همراه هزینه هر واحد آن، دخیل نشده است که شاید یک نقطه ضعفی برای این روش انتخاب F بهینه باشد.
- در بخش آنالیز حساسیت، از سه عامل موجود هر بار دو تا را ثابت گرفته و یکی دیگر را متغیر و بعد از روی آن نتیجه گیری مورد نظر صورت گرفته است. بهتر بود اثر تغییرات توام متغیرها نیز بررسی می گشت چرا که در حال حاضر با نتایج فعلی نمی توان نتیجه حاصل از کاهش یک متغیر و افزایش متغیر دیگری را بدست آورد.

منابع

[١] S.M. Gupta, Interrelationship between controlling arrival and service in queueing systems, Comput. Oper. Res. ٢٢ (١٩٩٥) ١٠٠٥–١٠١٤. [٢] D.R. Cox, The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, in: Proceedings

Cambridge Philosophical Society ٥١ (١٩٥٥) ٤٣٣–٤٤١.

[٣] U.C. Gupta, T.S.S. Srinivasa Rao, A recursive method to compute the steady state probabilities of the machine interference model:

(M/G/١)/K, Comput. Oper. Res. ٢١ (١٩٩٤) ٥٩٧–٦٠٥.

[٤] U.C. Gupta, T.S.S. Srinivasa Rao, On the M/G/١ machine interference model with spares, Eur. J. Oper. Res. ٨٩ (١٩٩٦) ١٦٤–١٧١.

[٥] M. Yadin, P. Naor, Queueing systems with a removable service station, Oper. Res. Quart. ١٤ (١٩٦٣) ٣٩٣–٤٠٥.

[٦] C.E. Bell, Characterization and computation of optimal policies for operating an M/G/١ queueing system with removable server,

Oper. Res. ١٩ (١٩٧١) ٢٠٨–٢١٨.

[٧] C.E. Bell, Optimal operation of an M/G/١ priority queue with removable server, Oper. Res. ٢١ (١٩٧٢) ١٢٨١–١٢٨٩.

[٨] D.P. Heyman, Optimal operating policies for M/G/١ queuing system, Oper. Res. ١٦ (١٩٦٨) ٣٦٢–٣٨٢.

[٩] T. Kimura, Optimal control of an M/G/١ queueing system with removable server via diffusion approximation, Eur. J. Oper. Res. ٨

(١٩٨١) ٣٩٠–٣٩٨.

[١٠] J. Teghem Jr., Optimal control of a removable server in an M/G/١ queue with finite capacity, Eur. J. Oper. Res. ٣١ (١٩٨٧) ٣٥٨–٣٦٧.

[١١] K.-H. Wang, J.-C. Ke, A recursive method to the optimal control of an M/G/١ queueing system with finite capacity and infinite

capacity, Appl. Math. Modell. ٢٤ (٢٠٠٠) ٨٩٩–٩١٤.

[۱۲] J.-C. Ke, K.-H. Wang, A recursive method for N-policy G/M/۱ queueing system with finite capacity, Eur. J. Oper. Res. ۱٤۲ (۲۰۰۲)

٥۷۷–٥۹٤.

[۱۳] K.R. Baker, A note on operating policies for the queue M/M/۱ with exponential startups, INFOR ۱۱ (۱۹۷۳) ۷۱–۷۲.

[۱٤] A. Borthahur, J. Medhi, R. Gohain, Poisson input queueing systems with startup time and under control operating policy, Comput.

Oper. Res. ۱٤ (۱۹۸۷) ۳۳–٤۰.

[۱٥] J. Medhi, J.G.C. Templeton, A Poisson input queue under N-policy and with a general start up time, Comput. Oper. Res. ۱۹ (۱۹۹۲)

۳٥–٤۱.

[۱٦] H. Takagi, An M/G/۱/K queues with N-policy and setup times, Queueing Syst. ۱٤ (۱۹۹۳) ۷۹–۹۸.

[۱۷] H.W. Lee, J.O. Park, Optimal strategy in N-policy production system with early set-up, J. Oper. Res. Soc. ٤۸ (۱۹۹۷) ۳۰٦–۳۱۳.

[۱۸] S. Hur, S.J. Paik, The effect of different arrival rates on the N-policy of M/G/۱ with server setup, Appl. Math. Modell. ۲۳ (۱۹۹۹) ۲۸۹–

۲۹۹.

[۱۹] G.V. Reddy Krishna, R. Nadarajan, R. Arumuganathan, Analysis of a bulk queue with N-policy multiple vacations and setup times,

Comput. Oper. Res. ۲٥ (۱۹۹۸) ۹٥۷–۹٦۷.

[۲۰] J.-C. Ke, The operating characteristic analysis on a general input queue with N-policy and a startup time, Math. Methods Oper. Res.٥۷ (۲۰۰۳) ۲۳٥–۲٥٤.