تابع α ـ صدک باقیمانده عمر و تحلیل گرافیکی داده‌های خرابی با استفاده از آن

محبوبه اکبری لاکه ـ عبدالحمید رضائی رکن آبادی

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: تابع α ـ صدک باقیمانده عمر یکی از اندازه‌های قابلیت اعتماد می‌باشد که به عنوان راه حلی برای رفع نقص‌های تابع میانگین باقیمانده عمر در کاربردهای عملی، معرفی شده است. لونر[۸] تکنیکی را ارائه نمود که با استفاده از رفتار تابع نرخ خرابی می‌توان نقطه‌ی بهینه‌ی تابع صدک باقیمانده عمر را بدست آورد. تعیین نقاط بهینه‌ی صدک باقیمانده عمر می‌تواند در تعیین نقطه‌ی آب‌بندی یا ضمانت محصول مفید باشد. در این مقاله ضمن بیان تکنیک ارائه شده توسط لونر[۸]، با بکاربردن آن برای یک مجموعه از داده‌های خرابی با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم‌افزار R، به تشریح و کاربرد آن می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: تابع α ـ صدک باقیمانده عمر، تابع صدک باقیمانده عمر نزولی (صعودی)، تابع نرخ خرابی، تابع نرخ خرابی وانی شکل، آب‌بندی

۱ مقدمه

تابع میانگین باقیمانده عمر در صورت وجود ابزار مفیدی برای تحلیل ویژگی‌های مهم متغیرتصادفی طول عمر است، زیرا تابع توزیع را مشخصه‌سازی می‌کند. این تابع ممکن است در کاربردهای عملی با نقص‌هایی همراه باشد، به عنوان مثال در مواردی که داده های سانسور شده باشند یا توزیع طول عمر چوله یا دم‌پهن باشند تابع میانگین باقیمانده عمر تجربی قابل محاسبه نیست. بنابراین تابع میانه باقیمانده عمر (حالت خاصی از تابع α ـ صدک باقیمانده عمر به ازای $\alpha = ۰/۵$) برای رفع نقص‌های تابع میانگین باقیمانده عمر توسط هینس و ساینپروالا[۵] معرفی شد.

تابع α ـ صدک باقیمانده عمر با جزئیات بیشتری توسط آرنولد و براکت [۱]، گوپتا و لنگفورد [۴] و جو و پروشان [۷] و جو [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. یک حالت خاص تابع α ـ صدک باقیمانده عمر که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، تابع میانه باقیمانده عمر می‌باشد که با $q(t)$ نشان داده می‌شود. این تابع توسط لیلو[۹]، جلفند و کاتس[۳] برای مدل‌های نیمه‌پارامتری بیزی مورد مطالعه قرار گرفت.

۲ تابع α ـ صدک باقیمانده عمر

هینس و ساینپروالا [۵]، تابع α ـ صدک باقیمانده عمر یک مؤلفه را صدک αام متغیر تصادفی طول عمر معرفی نمودند و آن را با $q_\alpha(t)$ نشان دادند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_\alpha(t) = F_t^{-1}(\alpha),\ t \in s_X,$$

که s_X تکیه‌گاه متغیر تصادفی طول عمر است. از طرفی، با توجه به تعریف متغیرتصادفی طول عمر، تابع بقای آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\bar{F}_t(x) &= P(X_t > x) = P(X - t > x|X > t)\\ &= P(X > x + t|X > t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

در نتیجه تابع صدک باقیمانده عمر معادل است با:

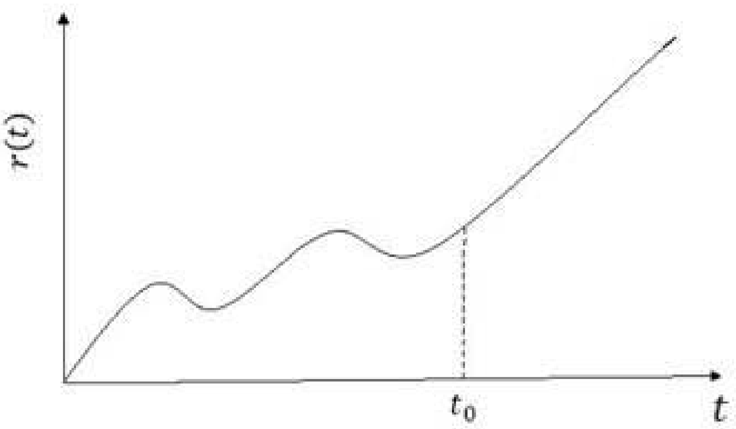
$$\begin{aligned}q_\alpha(t) &= \bar{F}^{-1}(\bar{\alpha}\bar{F}(t)) - t\\ &= F^{-1}(1 - \bar{\alpha}\bar{F}(t)) - t, \quad t < u_X\end{aligned}$$

نیم‌ـ صدک باقیمانده عمر در زمان t، تابع میانه باقیمانده عمر در زمان t نامیده می‌شود. یکی از برتری‌های تابع α ـ صدک باقیمانده عمر نسبت به تابع میانگین باقیمانده عمر این است که اگر تنها $100\alpha\%$ مشاهدات را ثبت کنیم قادر به برآورد تابع α ـ صدک باقیمانده عمر هستیم. برای مثال اگر ۱۵ واحد تا زمان t باقی مانده باشد آنگاه تابع میانه باقیمانده عمر در زمان t، بعد از وقوع ۸ خرابی قابل برآورد است. این مزیت برای واحدهایی با طول عمر بالا، یک برتری قطعی است زیرا برای برآورد تابع میانگین باقیمانده عمر، زمان خرابی همه‌ی واحدها مورد نیاز است که وقت‌گیر و هزینه‌بر است.

هینس و ساینپروالا[۵] کلاس توابع α ـ صدک باقیمانده عمر نزولی $(DPRL - \alpha)$ و صعودی$(IPRL - \alpha)$ را معرفی کردند. توزیع طول عمر F به کلاس $DPRL - \alpha$ $(IPRL - \alpha)$ تعلق دارد هرگاه تابع α ـ صدک باقیمانده عمر نزولی(صعودی) باشد. اگر به ازای هر α، تابع α ـ صدک باقیمانده عمر نزولی(صعودی) باشد گوییم F متعلق به کلاس $DPRL(IPRL)$ است.آنها نشان دادند اگر F یک توزیع با نرخ خرابی، $r(t)$، صعودی(نزولی) باشد آنگاه F متعلق به کلاس $DPRL(IPRL)$ است.

در مطالعات اولیه تلاش در مدل‌بندی و خلاصه‌سازی داده‌های بقا تا حد زیادی به سه نوع عمده، توزیع‌های نمایی (مدل نرخ خطر ثابت)، توزیع‌هایی با نرخ خطر صعودی (IFR) و توزیع با نرخ خطر نزولی (DFR) محدود می‌شد. اما کم‌کم‌توجه

به توزیع‌هایی با نرخ خطر غیر یکنوا، بخصوص توزیع‌هایی‌با نرخ خطر وانی شکل بیشتر شده است. برای راحتی، اغلب توزیع‌های طول عمر با نرخ خطر وانی شکل را توزیع‌های وانی[۱] می‌نامند. متغیرتصادفی طول عمر X را دارای توزیع وانی گویند هرگاه $t_۰$ی وجود داشته باشد طوریکه به ازای $t < t_۰$، تابع نرخ خرابی نزولی باشد و به ازای $t > t_۰$ صعودی باشد. شایان ذکر است که برخی مؤلفین تابع نرخ خرابی وانی شکل را به حالت کلی‌تری تعمیم داده‌اند که این تابع ابتدا نزولی، سپس ثابت و بعد از آن صعودی باشد. جو و پروشان[۷] نشان دادند که توابع α ـ صدک باقیمانده عمر و نرخ خرابی به صورت زیر با در ارتباط هستند.



شکل ۱.: تابع نرخ خطر متناظر با F

قضیه ۱ برای متغیرتصادفی پیوسته طول عمر با تابع نرخ خرابی $r(t)$ و تابع α ـ صدک مشتق‌پذیر q_α داریم:

۱) $\int_t^{t+q_\alpha(t)} r(y)dy = -\log(۱-\alpha)$

۲) $r(t+q_\alpha(t)).(۱+q'_\alpha(t)) = r(t)$

۳) و اگر $r(t+q_\alpha(t)) > ۰$، آنگاه

$$q'_\alpha(t) = \frac{r(t)}{r(t+q_\alpha(t))} - ۱. \qquad (۱)$$

برای اثبات قضیه می‌توان به جو و پروشان [۷] مراجعه نمود.

[۱] Bathtub distribution

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱ می‌توان گفت، F متعلق به کلاس $DPRL-\alpha$ است اگر و فقط اگر به ازای $t \in s_X$ داشته باشیم $r(t) < r(t+q_\alpha(t))$. نتیجه‌ی مشابهی برای کلاس $IPRL-\alpha$ نیز برقرار است. بنابراین اگر $r(t)$ صعودی باشد آنگاه F به کلاس $DPRL$ تعلق دارد ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست. برای روشن شدن مطلب فرض کنید نقطه‌ای مانند $t_\circ$ وجود داشته باشد طوریکه به ازای $\circ \le t \le t_\circ$، نامساوی $r(t) \le r(t_\circ)$ برقرار باشد و به ازای $t \ge t_\circ$ تابع $r(t)$ صعودی باشد(شکل ۱) بنابراین، F به ازای $\alpha > F(t_\circ)$ به کلاس $DPRL-\alpha$ تعلق دارد در حالی که $r(t)$ تابعی صعودی نیست.

۳ روابط بین نقاط بحرانی تابع نرخ خرابی و α ـ صدک باقیمانده عمر

در این بخش نشان می‌دهیم که تابع α ـ صدک باقیمانده عمر به طریق زیر با تابع نرخ خرابی مرتبط است. اگر تابع نرخ خرابی وانی شکل باشد تابع α ـ صدک وارونه‌ی آن است و در این تابع ماکسیمم α ـ صدک باقیمانده عمر پیش‌تر از مینیمم نرخ خرابی رخ می‌دهد و بالعکس، اگر تابع نرخ خرابی وانی شکل معکوس باشد، مینیمم α ـ صدک باقیمانده عمر جلوتر از ماکسیمم نرخ خرابی رخ می‌دهد. این روابط اساس روش محاسباتی بخش بعد را تشکیل می‌دهد.

۱.۳ شرایط ماکسیمم و مینیمم تابع α ـ صدک باقیمانده عمر

قضیه ۲ فرض کنید $F(t)$ دارای تابع نرخ خرابی $r(t)$ و تابع α ـ صدک باقیمانده عمر $q_\alpha(t)$ باشد و $r'(t)$ و $q''_\alpha(t)$ وجود داشته باشند. آنگاه مقدار ماکسیمم (مینیمم) $q_\alpha(t)$ در $t_\circ > \circ$ اتفاق می‌افتد هرگاه $r(t_\circ) = r(t_\circ + q_\alpha(t_\circ))$ و $r'(t_\circ) - r'(t_\circ + q_\alpha(t_\circ))$ منفی (مثبت) باشد.

برهان. مشتق دوم تابع $q_\alpha(t)$ نسبت به t، را می‌توان از رابطه‌ی(۲) بدست آورد. برای

سهولت در محاسبات فرض کنید $\tau(t) = t + q_\alpha(t)$. بر این اساس می‌توان نوشت،

$$q''_\alpha(t) = \frac{r(\tau(t)).r'(t) - r(t)r'(\tau(t))\tau'(t)}{[r(\tau(t))]^{۲}}. \qquad (۲)$$

اگر α ـ صدک باقیمانده عمر مقدار اکسترمم داشته باشد، این مقدار را می‌توان از معادله $q'_\alpha(t) = \frac{r(t)}{r(t+q_\alpha(t))} - ۱ = \circ$ بدست آورد. بنابراین $t_\circ$ نقطه اکسترمم است هرگاه،

$$r(t_\circ) = r(t_\circ + q_\alpha(t_\circ)) = r(\tau(t_\circ)). \qquad (۳)$$

همچنین این نقطه ماکسیمم (مینیمم) تابع α ـ صدک باقیمانده عمر اگر $q''_\alpha(t_\circ)$ منفی (مثبت) باشد. با جایگذاری (۳) در (۲) و قرار دادن $q''_\alpha(t_\circ) < \circ$ شرایط برای ماکسیمم بودن $t_\circ$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$r'(t_\circ) - r'(t_\circ + q_\alpha(t_\circ))(۱ + q'_\alpha(t_\circ)) < \circ \ , \qquad (۴)$$

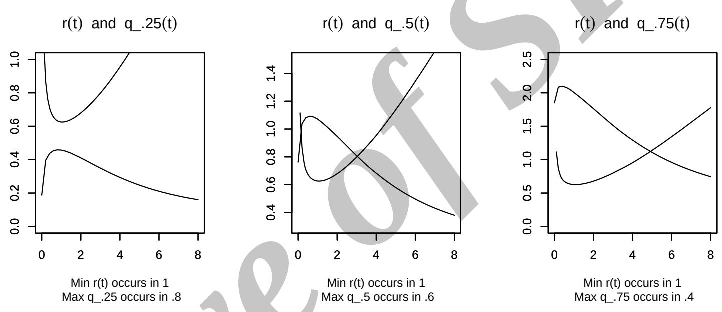
امّا،

$$۱ + q'_\alpha(t_\circ) = \frac{r(t_\circ)}{r(t_\circ + q_\alpha(t_\circ))} = ۱ \ ,$$

در نتیجه رابطه‌ی(۴) را می‌توان بصورت معادل زیر نوشت:

$$\frac{r'(t_\circ)}{r'(t_\circ + q_\alpha(t_\circ))} < ۱.$$

به طور مشابه برای مینیمم α ـ صدک باقیمانده عمر، می‌توان شرط بالا را بدست آورد با این تفاوت که جهت نامساوی عوض می‌شود. $\square$



شکل ۲.: نمودار تابع نرخ خرابی در مقایسه با تابع α ـ صدک باقیمانده عمر به ازای $\alpha =$ ./۲۵, ./۵, ./۷۵.

از قضیه‌ی ۲ نتیجه می‌شود که ماکسیمم α ـ صدک باقیمانده عمر همیشه جلوتر از مینیمم نرخ خرابی رخ می‌دهد (به شرطی که مینیمم وجود داشته باشد). بطور مشابه برای مینیمم $q_\alpha(t)$ نیز داریم. برای درک بهتر روابط بین اکسترمم توابع صدک باقیمانده عمر و نرخ خرابی به مثال زیر توجه می‌کنیم. **مثال ۱** فرض کنید طول عمر مؤلفه دارای توزیع وایبل ـ نمایی با پارامترهای $\theta, \sigma, \gamma > \circ$ باشد که تابع توزیع، چگالی و چندک آن به ترتیب به صورت زیر است:

$$F(t) = \left(۱ - exp(-(t/\sigma)^\gamma)\right)^\theta, \quad t \geq \circ,$$

$$f(t)= \frac{\gamma\theta}{\sigma}\Big(1-exp\{-(t/\sigma)^{\gamma}\}\Big)^{\theta-1}exp\{-(t/\sigma)^{\gamma}\}(t/\sigma)^{\gamma-1},$$
$$F^{-1}(u)=\sigma\Big(-\ln(1-u^{1/\theta})\Big)^{1/\gamma},\quad 0<u<1.$$

در نتیجه تابع نرخ خرابی و تابع α ـ صدک باقیمانده عمر از روابط زیر بدست می‌آید:

$$r(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}\quad ,\quad q_{\alpha}(t)=F^{-1}(1-\bar{\alpha}\bar{F}(t))-t.$$

شکل۲ نمودار تابع نرخ خرابی و تابع α ـ صدک باقیمانده عمر به ازای سه مقدار مختلف $\alpha=/۲۵$ ، $\alpha=/۵$ ، $\alpha=/۷۵$ نمایش می‌دهد که در آنها ملاحظه می‌شود، ماکسیمم تابع صدک باقیمانده عمر پیش‌تر از مینیمم تابع نرخ خرابی رخ می‌دهد. ضمناً در رسم این شکل فرض شده است $\theta=/۲۵, \gamma=۲, \sigma=۳$.

۴ روش محاسباتی مقدار بهینه صدک باقیمانده عمر

مشخص کردن زمانی که α ـ صدک باقیمانده عمر به ازای هر α معین، ماکسیمم باشد در تعیین مدت زمان ضمانت محصول از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای مثال، مدت زمان آب‌بندی را می‌توان برای حذف واحدهایی که خیلی زود خراب می‌شوند بکار برد و قابلیت اعتماد محصولات باقیمانده را ماکسیمم نمود.

فرض کنید به ازای هر t، $r(t)>0$ باشد. قرار می‌دهیم $A_{\alpha}=\int_{t}^{t+q_{\alpha}(t)}r(y)dy$. در نتیجه از قضیه‌ی ۱ داریم،

$$A_{\alpha}=-ln(1-\alpha), \tag{۵}$$
$$\alpha=1-exp(-A_{\alpha}). \tag{۶}$$

اگر داده‌های طول عمر در دسترس باشد آنگاه تابع α ـ صدک باقیمانده عمر را می‌توان برآورد کرد. البته پیدا کردن ماکسیمم و مینیمم تابع صدک باقیمانده عمر از این برآوردها کار دشواری است. برای حل این مشکل روشی در این بخش معرفی می‌شود که نسبت به روش قبل مزیت‌هایی دارد. اولاً برآورد $q_{\alpha}(t)$ و مقدار ماکسیمم آن بر مبنای برآورد A_{α} است و بنابراین ویژگی اجتناب‌ناپذیر هموارسازی انتگرال را داراست. ثانیاً این روش نسبتاً سریع و راحت است و بصورت دستی نیز قابل انجام می‌باشد.

فرض کنید n مؤلفه را مورد آزمایش قرار داده و زمان‌های خرابی آنها را ثبت نمائیم و در فواصل زمانی یک واحد به یک واحد (یک واحد می‌تواند یک ساعت، یک روز و ... باشد) تعداد واحدهای خراب شده را تعیین کنیم کسر تعداد خراب شده‌ها در هر واحد زمان تقسیم بر تعداد واحدهای سالم در زمان شروع آن واحد زمانی برآورد تجربی برای نرخ خرابی است.می‌توان نمودار مستطیلی مربوط به مقادیر این نسبت را در واحدهای زمانی مختلف رسم نموده و چندبر متناظر با آن را که نمودار هموار شده‌ی آن است رسم نمود.

مثال ۲ فرض کنید زمان‌های خرابی ۱۰۰ مؤلفه به شرح زیر گزارش شده باشد(جدول ۱). در این مثال، هر واحد زمانی ۱۰۰ ساعت است.

واحد زمانی	(۰, ۱]	(۱, ۲]	(۲, ۳]	(۳, ۴]	(۴, ۵]	(۵, ۶]	(۶, ۷]
تعداد خرابی	۲۰	۱۳	۱۰	۷	۵	۴	۴
واحد زمانی	(۷, ۸]	(۸, ۹]	(۹, ۱۰]	(۱۰, ۱۱]	(۱۱, ۱۲]	(۱۲, ۱۳]	(۱۳, ۱۴]
تعداد خرابی	۴	۳	۳	۳	۴	۴	۴

جدول ۱: زمان‌های خرابی ۱۰۰ مؤلفه

برآورد تجربی تابع نرخ خرابی مربوط به داده‌های فوق در جدول ۲ نمایش داده شده است.

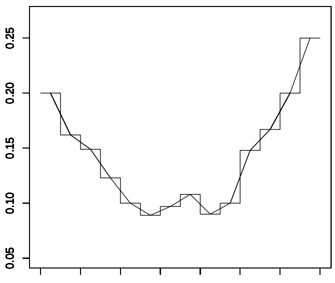
واحد زمانی(۱۰۰روز)	نرخ خرابی تجربی	واحد زمانی(روز)	نرخ خرابی تجربی
(۰–۱]	۰/۲	(۷–۸]	۰/۱۰۸
(۱–۲]	۰/۱۶۳	(۸–۹]	۰/۰۹۱
(۲–۳]	۰/۱۴۹	(۹–۱۰]	۰/۱
(۳–۴]	۰/۱۲۳	(۱۰–۱۱]	۰/۱۴۸
(۴–۵]	۰/۱	(۱۱–۱۲]	۰/۱۶۷
(۵–۶]	۰/۰۸۹	(۱۲–۱۳]	۰/۲
(۶–۷]	۰/۰۹۷	(۱۳–۱۴]	۰/۲۵

جدول ۲: تابع نرخ خرابی تجربی داده‌های جدول ۱

همچنین شکل ۳ نمودار چندبر نرخ خرابی تجربی زمان‌های خرابی موجود در جدول ۱ را نشان می‌دهد.

روش کار برای بدست آوردن ماکسیمم صدک باقیمانده عمر به ازای αای معین، به این صورت است که ابتدا مقدار A_α را از رابطه‌ی(۵) بدست می‌آوریم. در واقع، این مقدار سطح زیر نمودار نرخ خرابی بین دو نقطه‌ی t و $t+q_\alpha(t)$ را می‌دهد. بنابراین با

داشتن نمودار نرخ خرابی تجربی، دو نقطه‌ای را که سطح زیر نمودار بین آنها برابر A_α یا بطور تقریبی برابر آن باشد را بدست می‌آوریم. به شرطی که مقدار تابع نرخ خرابی در هر دو نقطه یکسان باشد. اگر این دو نقطه را به صورت دوتایی (t_l, t_u) در نظر بگیریم آنگاه مقدار t_l برآورد زمانی است که ماکسیمم $q_\alpha(t)$ در آن رخ می‌دهد و $t_u - t_l$ برآورد مقدار ماکسیمم تابع $q_\alpha(t)$ می‌باشد. برای جزئیات بیشتر و الگوریتم آن می‌توان به لونر[۸] مراجعه نمود. برنامه‌ای را بدین منظور با استفاده از نرم‌افزار R نوشته‌ایم که خواننده می‌تواند با تماس با نویسنده مسئول آن را تهیه کند.



شکل ۳: نرخ خرابی تجربی داده‌های جدول ۱

این برنامه، ماکسیمم تابع α ـ صدک باقیمانده عمر مجموعه‌ای از داده‌هایی که دارای تابع نرخ خرابی وانی شکل می‌باشد را برآورد می‌کند. همانطور که از شکل ۳ پیداست تابع نرخ خرابی داده‌های جدول۱ فراوانی شکل است. فرض کنید بخواهیم ماکسیمم تابع میانه باقیمانده عمر این داده‌ها را برآورد کنیم. برای اینکه بتوانیم از برنامه فوق استفاده کنیم لازم است داده‌های جدول ۲ را بصورت زیر وارد کنیم.
ابتدا واحدهای زمانی و سپس نرخ خرابی تجربی(بادو تکرار) را در یک ستون و در یک فایل یک متنی با نام $data$ ذخیره می‌کنیم و آدرس فایل را در سطر اول برنامه قرار می‌دهیم، یعنی‌داده‌های ۰, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۷, ۷, ۸, ۸, ۹, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۳, ۱۴, ۰/۲, ۰/۲, ۰/۱۶۳, ۰/۱۶۳, ۰/۱۴۹, ۰/۱۴۹, ۰/۱۲۳, ۰/۱۲۳, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۰۸۹, ۰/۰۸۹, ۰/۰۹۷, ۰/۰۹۷, ۰/۱۰۸, ۰/۱۰۸, ۰/۰۹۱, ۰/۰۹۱, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱۴۸, ۰/۱۶۷, ۰/۱۶۷, ۰/۲, ۰/۲, ۰/۲۵, ۰/۲۵ را بصورت ستونی در یک فایل متنی وارد می‌کنیم. چون ماکسیمم تابع میانه را می‌خواهیم $\alpha =$ ۰/۵ قرار می‌دهیم. با اجرای برنامه، نقطه‌ی ماکسیمم تابع میانه۳/۲۷ بدست می‌آید و مقدار ماکسیمم نیز۶/۸۳ برآورد می‌شود.
حال از نقطه نظر دیگر به مسئله نگاه می‌کنیم، فرض کنید مقداری از α را تعیین کنیم

که ماکسیمم تابع میانه در نقطه‌ی ۳ رخ دهد. در این صورت با تغییر جزئی در برنامه، مساحت سطح زیر نمودار تابع نرخ خرابی تجربی بین دو نقطه‌ی ۳ و ۱۰/۲۵ برابر ۰/۷۵ می‌شود که برآوردی از مقدار A_α می‌باشد. سرانجام با استفاده از رابطه‌ی (۶) مقدار ۰/۵۲۷ برای α برآورد می‌شود.

مراجع

Arnold, B.C., and Brockett, P.L. (1983), When does the βth percentile residual life function determine the distribution, *Operations Research*, **31**, 391-396.

Franco-pereira, A.M., Lillo, R.E., Romo, J. and Shaked, M. (2010), Percentile residual life orders, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, to appear.

Gelfand, A.E., and Kottas, A. (2003), Bayesian semiparametric regression for median residual life, *Scandinavian Journal of Statistics*, **30**, 651-665.

Gupta, R.C., and Langford, E.S. (1984), On the determination of a distribution by its median residual life function: A functional equation, *Journal of Applied Probability*, **21**, 120-128.

Haines, L. and Singpurwalla, N.D. (1974), Some contributions to the stochastic characterization of wear, *Reliability and Biometry: Statistical Analysis of Lifelenght*, Proschan and Serfling,(Eds), Society for Industrial and Applied Mathematics., 47-80.

Joe, H. (1985), Characterizations of life distributions from percentile residual lifetime, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 165-172.

Joe, H., and Proschan, F. (1984), Percentile residual life function, *Operational Research*, **32**, 668-678.

Launer, R.L. (1993), Graphical techniques for analyzing failure data with the percentile residual life function, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 71-75, 80.

Lillo, R.E. (2005), On the median residual lifetime and aging properties:A characterization theorem and applications , Naval Research Logistics, **52**, 370-380.