آزمون فرضیه بر اساس داده‌های فازی شهودی و به روش بوت‌استرپ

زهرا زینلی - محمد قاسم اکبری - محسن عارفی

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه بیرجند

چکیده: در این مقاله، با استفاده از تکنیک بوت استرپ، مسأله آزمون فرضیه میانگین و واریانس در حالت یک نمونه‌ای و دو نمونه‌ای، بر اساس داده‌های فازی شهودی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا متغیر تصادفی فازی شهودی، میانگین و واریانس آن را تعریف نموده و سپس با استفاده از تعمیم فاصله علامتدار یائو-ویو بر اساس داده‌های فازی شهودی به بررسی مسأله آزمون فرضیه میانگین و واریانس از دیدگاه بوت‌استرپ خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: مجموعه فازی شهودی، اعداد فازی شهودی، متغیر تصادفی فازی شهودی، روش بوت‌استرپ و فاصله علامتدار یائو-ویو

۱ مقدمه

آزمون یک فرضیه آماری نقش مهمی در استنباط‌های آماری ایفا می‌کند. روش‌های کلاسیک مبتنی بر مفروضاتی از قبیل دقیق بودن مشاهدات، دقیق بودن فرضیات آزمون، دقیق بودن پارامتر مجهول و...می باشد، ولی در جهان واقعی گاهی این مفروضات دقیق نیستند. نظریهٔ مجموعه‌های فازی شهودی، معرفی شده توسط آتاناسوف (۱۹۹۹)، راهی مناسب برای مفروضات نادقیق می‌باشد. در این مقاله، آزمون فرضیه مربوط به میانگین و واریانس در حالت‌های یک‌نمونه‌ای و دونمونه‌ای را به شیوهٔ بوت‌استرپ و بر اساس فاصلهٔ علامتدار یائو-ویو تعمیم یافته و با استفاده از داده‌های فازی شهودی، هنگامی که فرضیه‌ها نیز فازی شهودی می‌باشند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.
آزمون فرضیه در محیط فازی توسط محققین زیادی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. از جمله این محققین می‌توان به مونتنگرو و همکاران (۲۰۰۱)، عارفی و طاهری (۱۳۸۶)، گرزگورزوسکی (۲۰۰۲)، طاهری و بهبودیان (۲۰۰۶)، ترابی و همکاران (۲۰۰۶)، طاهری و عارفی (۲۰۰۹)، اکبری و همکاران (۲۰۰۹) و عارفی و طاهری (۲۰۱۱) اشاره کرد. شیوه آزمون فرضیه بر اساس p-مقدار در یک محیط فازی توسط فیلزموزر و فیتل (۲۰۰۴)، فیتل (۲۰۱۱) و پرچمی و همکاران (۲۰۱۰) مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. زینلی و اکبری (۱۳۹۰) به بررسی آزمون فرضیه در مورد

واریانس در حالت یک نمونه‌ای براساس داده‌های فازی شهودی و با استفاده از متر L_2 تعمیم یافته پرداخته‌اند. در کار حاضر آزمون فرضیه در مورد میانگین و واریانس در حالت یک نمونه‌ای و دو نمونه‌ای، بر اساس داده‌های فازی شهودی و با استفاده از تعمیم فاصله علامتدار یائو–ویو مورد بررسی قرار گرفته است.

۲ مفاهیم اولیه

در بخش زیر مفاهیم مورد نیاز در مورد مجموعه‌های فازی و فازی شهودی را بر اساس طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷)، آتاناسوف (۱۹۹۹) و گوها و چاکرابورتی (۲۰۱۰) بیان می‌کنیم.

فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ با یک تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0, 1]$ مشخص می‌شود. برای هر $\alpha \in (0, 1]$، α-برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود و $\tilde{A}_0 = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\}$ را دامنه تغییرات می‌نامیم.

تعریف ۸ مجموعه فازی $\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) : x \in X\rangle\}$ از R را یک عدد فازی گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱–حداقل یک عضو $x \in R$، موجود باشد به طوری که داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

۲– برای هر $\alpha \in (0, 1]$، مجموعه‌های $\tilde{A}_\alpha$ بازه‌هایی بسته و کراندار باشند.

به وضوح روشن است که در مجموعه‌های فازی درجه عدم عضویت x در A برابر با $1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ می‌باشد. امّا گاهی اوقات در جهان واقعی درجه عدم عضویت برابر با $1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ نمی‌باشد. آتاناسوف (۱۹۹۹) بر اساس درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و درجه عدم عضویت $\nu_{\tilde{A}}(x)$، تعمیمی از مجموعه فازی را معرفی نمود که، مجموعه فازی شهودی نامیده می‌شود.

تعریف ۹ مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$، از مجموعه مرجع X، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)\rangle : x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0, 1]$ و $\nu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0, 1]$ به ترتیب تابع عضویت و تابع عدم عضویت x در $\tilde{A}$ هستند و در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1. \quad \forall x \in X$$

تعریف ۱۰ مجموعه فازی شهودی $\tilde{A} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)\rangle : x \in X\}$ را یک عدد فازی شهودی می‌نامیم اگر و تنها اگر بر اساس تعریف ۱، $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $1 - \nu_{\tilde{A}}(x)$ توابع عضویت مربوط به یک اعداد فازی باشند.

مجموعه تمام اعداد فازی شهودی را با $\mathcal{IF}(\mathcal{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱ عدد فازی شهودی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی شهودی LR $(LR-IFN)$ می‌نامیم، اگر تابع‌های عضویت و عدم عضویت آن به صورت زیر تعریف شده باشند $(l_۱, l_۲, r_۱, r_۲ > ۰)$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{l_۱}) & m-l_۱ \leq x < m \\ ۱ & x = m \\ R(\frac{x-m}{r_۱}) & m < x < m + r_۱ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad \nu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۱ - L(\frac{m-x}{l_۲}) & m-l_۲ \leq x < m \\ ۰ & x = m \\ ۱ - R(\frac{x-m}{r_۲}) & m < x < m + r_۲ \\ ۱ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

که‌در آن L(.) و R(.) توابعی اکیدانُزولی از R^+ به [0,1] می‌باشند و $R(۰) = L(۰) = ۱$.

تذکر ۳ عدد فازی شهودی $\tilde{A} = (m; l_۱, r_۱, l_۲, r_۲)$ را با $r' \geq r$ و $l' \geq l$ یک عدد فازی شهودی مثلثی (TIFN) می‌نامیم، اگر برای هر $x \in [۰, ۱]$، $L(x) = R(x) = ۱ - x$ و به صورت $\tilde{A} = (m; l_۱, r_۱, l_۲, r_۲)_T$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص زمانی، که $l = r$ و $l' = r'$ باشد، $\tilde{A}$ را عدد فازی مثلثی متقارن می‌نامیم. (گوها و چاکرابورتی؛ ۲۰۱۱)

تعریف ۱۲ فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی شهودی از مجموعه مرجع X باشد، برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$، α-برش‌های آن به صورت $\tilde{A}^{\mu}_{\alpha} = \{x : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ و $\tilde{A}^{۱-\nu}_{\alpha} = \{x : ۱-\nu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود (طاهری و زارعی؛۲۰۱۱و گوها و چاکرابورتی؛ ۲۰۱۱)

تعریف ۱۳ فرض کنید $\tilde{n} = (n; l_۱, r_۱, l'_۱, r'_۱)$ و $\tilde{m} = (m; l_۲, r_۲, l'_۲, r'_۲)$ دو عدد فازی شهودی LR باشند و $\lambda \in R - \{۰\}$ باشد، آنگاه، عملگرهای حسابی بین آنها بر اساس اصل گسترش تعمیم یافته (طاهری و زارعی؛ ۲۰۱۱) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} M \oplus N &= (m; l_۱, r_۱; l'_۱, r'_۱)_{LR} \oplus (n; l_۲, r_۲; l'_۲, r'_۲)_{LR} \\ &= (m+n; l_۱ + l_۲, r_۱ + r_۲; l'_۱ + l'_۲, r'_۱ + r'_۲)_{LR}, \\ M \ominus N &= (m; l_۱, r_۱; l'_۱, r'_۱)_{LR} \ominus (n; l_۲, r_۲; l'_۲, r'_۲)_{RL} \\ &= (m-n; l_۱ + r_۲, r_۱ + l_۲; l'_۱ + r'_۲, r'_۱ + l'_۲)_{LR}, \\ \lambda \otimes M &= \begin{cases} (\lambda m; \lambda l_۱, \lambda r_۱; \lambda l'_۱, \lambda r'_۱)_{LR} & \lambda > ۰, \\ (\lambda m; -\lambda r_۱, -\lambda l_۱; -\lambda r'_۱, -\lambda l'_۱)_{RL} & \lambda < ۰. \end{cases} \end{aligned}$$

تعریف ۱۴ فاصله علامت دار یائو-ویو تعمیم یافته (ترکیان و همکاران؛ ۱۳۹۰) بین دو مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{۱}{۲} \int_۰^۱ \left(M_\alpha(\tilde{A}_\mu) - M_\alpha(\tilde{B}_\mu) \right) d\alpha + \frac{۱}{۲} \int_۰^۱ \left(M_\alpha(\tilde{A}_{۱-\nu}) - M_\alpha(\tilde{B}_{۱-\nu}) \right) d\alpha$$

که در آن

$$M_\alpha(\tilde{A}_\mu) = \frac{A_\alpha^{L_\mu} + A_\alpha^{U_\mu}}{2}, \qquad M_\alpha(\tilde{A}_{1-\nu}) = \frac{A_\alpha^{L_{1-\nu}} + A_\alpha^{U_{1-\nu}}}{2},$$

$$M_\alpha(\tilde{B}_\mu) = \frac{B_\alpha^{L_\mu} + B_\alpha^{U_\mu}}{2}, \qquad M_\alpha(\tilde{B}_{1-\nu}) = \frac{B_\alpha^{L_{1-\nu}} + B_\alpha^{U_{1-\nu}}}{2}.$$

همچنین $A_\alpha^\mu = [A_\alpha^{L_\mu}, A_\alpha^{U_\mu}]$ و $A_\alpha^{1-\nu} = [A_\alpha^{L_{1-\nu}}, A_\alpha^{U_{1-\nu}}]$.

تعریف ۱۵ اگر $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ اعداد فازی شهودی باشند. فاصله علامت دار یائو–ویو تعمیم یافته بین آن‌ها دارای خواص زیر می‌باشد

$$\begin{aligned}
&i)\ d(\tilde{A}, \tilde{B}) \ = \ -d(\tilde{B}, \tilde{A}) \\
&ii)\ d(\tilde{A}, \tilde{B}) \ = \ d(\tilde{A}, \tilde{C}) + d(\tilde{C}, \tilde{B}) \\
&iii)\ \tilde{A} \approx \tilde{B} \ \Leftrightarrow \ \tilde{B} \approx \tilde{A} \\
&iv)\ \tilde{A} \approx \tilde{B}\ , \quad \tilde{B} \approx \tilde{C} \ \Rightarrow \ \tilde{A} \approx \tilde{C}
\end{aligned}$$

که در آن

$$\tilde{A} \approx \tilde{B} \ \Leftrightarrow \ d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0 \ \Leftrightarrow \ d(\widetilde{A}, 0) = d(\widetilde{B}, 0).$$

ویژگی‌های i، iii و iv با استفاده از رابطه $d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = d(\widetilde{A}, 0) - d(\widetilde{B}, 0)$ به سادگی قابل اثبات می‌باشند و اثبات ویژگی ii به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{A}_\mu) - M_\alpha(\tilde{B}_\mu)\big)\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{A}_{1-\nu}) - M_\alpha(\tilde{B}_{1-\nu})\big)\, d\alpha \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{A}_\mu) - M_\alpha(\tilde{C}_\mu)\big)\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{A}_{1-\nu}) - M_\alpha(\tilde{C}_{1-\nu})\big)\, d\alpha \\
&\quad \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{C}_\mu) - M_\alpha(\tilde{B}_\mu)\big)\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^1 \big(M_\alpha(\tilde{C}_{1-\nu}) - M_\alpha(\tilde{B}_{1-\nu})\big)\, d\alpha \\
&= \ d(\tilde{A}, \tilde{C}) + d(\tilde{C}, \tilde{B}).
\end{aligned}$$

تذکر ۴ اگر $\tilde{A} = (a; l_1, r_1, l'_1, r'_1)_T$ و $\tilde{B} = (b; l_2, r_2, l'_2, r'_2)_T$ اعداد فازی شهودی مثلثی باشند، آنگاه فاصله علامت دار یائو–ویو تعمیم یافته بین آن‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$d(\tilde{B}, \tilde{A}) = b - a + \frac{(r_2 - l_2 + r'_2 - l'_2) - (r_1 - l_1 + r'_1 - l'_1)}{8}$$

۳ امید ریاضی و واریانس متغیرهای فازی شهودی

تعریف ۱۶ $\tilde{X}:\Omega \to \mathcal{IF}(\mathcal{R})$ را یک متغیر تصادفی فازی شهودی نامیم هرگاه، برای هر $\alpha \in (0,1]$، متغیرهای $X \in X_{\alpha}^{\mu}$ و $Y \in X_{\alpha}^{1-\nu}$ متغیرهای تصادفی معمولی باشند.

تعریف ۱۷ متغیرهای تصادفی فازی شهودی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ را هم‌توزیع گوییم، اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in [0,1]$ $X_{\alpha}^{L_{\mu}} \stackrel{d}{=} Y_{\alpha}^{L_{\mu}}$، $X_{\alpha}^{L_{1-\nu}} \stackrel{d}{=} Y_{\alpha}^{L_{1-\nu}}$، $X_{\alpha}^{U_{\mu}} \stackrel{d}{=} Y_{\alpha}^{U_{\mu}}$ و $X_{\alpha}^{U_{1-\nu}} \stackrel{d}{=} Y_{\alpha}^{U_{1-\nu}}$. و هرگاه هر عضو مجموعه $\{X_{\alpha}^{L_{\mu}}, X_{\alpha}^{U_{\mu}} | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ از هر عضو مجموعه $\{Y_{\alpha}^{L_{\mu}}, Y_{\alpha}^{U_{\mu}} | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ مستقل باشد و همچنین هر عضو مجموعه $\{X_{\alpha}^{L_{1-\nu}}, X_{\alpha}^{U_{1-\nu}} | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ نیز از هر عضو مجموعه $\{Y_{\alpha}^{L_{1-\nu}}, Y_{\alpha}^{U_{1-\nu}} | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ مستقل باشد، آنگاه، $\tilde{X}$ از $\tilde{Y}$ مستقل است.

تعریف ۱۸ $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n)$ را یک نمونه تصادفی فازی شهودی نامند، اگر و تنها اگر $\tilde{X}_i$ ها مستقل و هم‌توزیع باشند.

تعریف ۱۹ فرض کنید $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی شهودی باشد، آنگاه، α-برش امید متغیر تصادفی فازی شهودی $\tilde{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{E}_{\alpha}^{\mu}(\tilde{X}) = \{E(X) \mid X \in \tilde{X}_{\alpha}^{\mu}\} \quad \text{و} \quad \tilde{E}_{\alpha}^{1-\nu}(\tilde{X}) = \{E(X) \mid X \in \tilde{X}_{\alpha}^{1-\nu}\}$$

تعریف ۲۰ فرض کنید $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی شهودی باشد، آنگاه، واریانس متغیر تصادفی فازی شهودی $\tilde{X}$ را بر اساس فاصله علامتدار یائو–ویو تعمیم یافته به صورت $\nu(\tilde{X}) = E[d^2(\tilde{X}, E(\tilde{X}))]$ تعریف می‌کنیم.

لم ۱ اگر $\tilde{X}_i$ ها متغیرهای تصادفی فازی شهودی هم‌توزیع و مستقل باشند، آنگاه،

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^{n} d(\tilde{X}_i, \tilde{E}(X)) = 0$$

لم ۲ اگر $\tilde{X}_i$ ها متغیرهای تصادفی فازی شهودی هم‌توزیع و مستقل باشند، آنگاه،

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{X}_i, \bar{\tilde{X}}) = \nu(\tilde{X})$$

۴ آزمون فرضیه به روش بوت‌استرپ با استفاده از داده‌های فازی شهودی

یکی از مسائل مهم در آزمون‌های آماری، تنظیم و صورت بندی فرضیه‌هاست. آماردانان معمولاً فرضیه‌ها را به صورت غیر فازی در نظر می‌گیرند. گاهی اوقات ماهیت فرضیه‌ها به گونه‌ای است که به صورت یک فرضیه دقیق صورتبندی نمی‌شود. به عنوان مثال، فرض کنید ما علاقه‌مند به فرضیه‌ای به صورت تقریباً برابر باشیم. دراین صورت فرضیه های آزمون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (اکبری و رضایی؛ ۲۰۱۰):

$$\begin{cases} H_0: & \text{است } \theta_0 \text{ تقریباً برابر } \theta \quad (\tilde{\theta} \approx \tilde{\theta}_0) \\ H_1: & \text{نیست } \theta_0 \text{ تقریباً برابر } \theta \quad (\tilde{\theta} \not\approx \tilde{\theta}_0) \end{cases}$$

۱.۴ آزمون فرضیه برای میانگین یک جامعه

در این بخش آزمون فرضیه بوت‌استرپی برای میانگین جامعه در حالت یک نمونه‌ای بر اساس داده‌های فازی شهودی و با استفاده از فاصله علامتدار یائو–ویو را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $\tilde{\mathbf{X}}=(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ...\tilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی از داده‌های فازی شهودی باشد و بخواهیم فرضیه، $H_0 : \tilde{\mu} \approx \tilde{\mu}_0$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \tilde{\mu} \not\approx \tilde{\mu}_0$ آزمون کنیم. می‌دانیم که در روش بوت‌استرپ از تابع توزیع تجربی به جای F استفاده می‌شود. ما در این مسأله نیازمند توزیعی هستیم که تحت فرضیه H_0 تقریباً دارای میانگین $\tilde{\mu}_0$ باشد. یک راه، تغییر تابع توزیع است، طوری که دارای میانگین مطلوب شود. برای این منظور مشاهدات را به صورت $\tilde{x}_{ci} = \tilde{x}_i \ominus \bar{\tilde{x}} \oplus \tilde{\mu}_0$ به ازای $i = 1, 2, ..., n$ تغییر می‌دهیم، زیرا $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\tilde{x}_{ci}, \tilde{\mu}_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\tilde{x}_{ci}, 0) - d(\tilde{\mu}_0, 0) = 0$. در آزمون کردن فرضیه بالا، ابتدا B نمونه تصادفی فازی شهودی $\tilde{\mathbf{X}}_c^{*^i}$، $i = 1, 2, ..., B$، را تولید می‌کنیم. فرضیهٔ H_0 را در سطح معناداری $\gamma \in [0, 1]$ و بر اساس فاصله علامتدار یائو–ویو رد می‌کنیم اگر $t = \frac{\sqrt{n}d(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\mu}_0)}{S_n} \geq t_{\frac{\gamma}{2}}$ یا $t = \frac{\sqrt{n}d(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\mu}_0)}{S_n} \leq t_{1-\frac{\gamma}{2}}$ که در آن t_γ چندک 100γ درصد از توزیع بوت‌استرپ $t^{*b} = \frac{\sqrt{n}d(\tilde{\bar{x}}_c^{*^b}, \tilde{\mu}_0)}{S_{cn}^{*^b}}$ با $S_{cn}^{2*^b} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{x}_{ci}^{*b}, \tilde{\bar{x}}_c^{*b})$ است.

مثال ۱ فرض کنید یک نمونه تصادفی به اندازه ۱۲ از جامعه‌ای استخراج و داده‌های فازی شهودی داده شده در جدول ۱، مشاهده شده‌اند.

فرض کنید بخواهیم فرضیه $H_0 : \tilde{\mu} \approx (60; 1, 1, 1, 2)$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \tilde{\mu} \not\approx (60; 1, 1, 1, 2)$، آزمون کنیم. چندک های γ–ام از توزیع بوت استرپ t^{*b}، در جدول ۲ ملاحظه می‌گردد. برای این مثال $t = 0/336$ بدست می‌آید. بنابراین با توجه به جدول ۲، در سطح معناداری $\gamma = 0/05$، دلیلی بر رد فرضیه H_0 وجود ندارد.

جدول ۱: نمونه تصادفی فازی شهودی به حجم $n = ۱۲$ از یک جامعه

مشاهدات	شماره	مشاهدات	شماره
۱	$(۲۲, ۱, ۲, ۳, ۴)_T$	۷	$(۷۷, ۳, ۴, ۴, ۵)_T$
۲	$(۷۱, ۱, ۳, ۲, ۵)_T$	۸	$(۸۰, ۳, ۴, ۳, ۵)_T$
۳	$(۸۰, ۲, ۲, ۴, ۳)_T$	۹	$(٦۹, ۲, ۲, ۲, ۳)_T$
۴	$(۵۵, ۳, ۴, ۴, ٦)_T$	۱۰	$(۲۸, ۱, ۲, ۲, ۲)_T$
۵	$(۹۰, ۱, ۳, ۲, ۴)_T$	۱۱	$(۵۱, ۳, ۱, ۴, ۲)_T$
٦	$(۷۰, ۲, ۴, ۳, ۴)_T$	۱۲	$(۵۴, ۳, ۲, ۴, ۲)_T$

جدول ۲: برخی چندک‌ها از توزیع بوت‌استرپ t^{*^b}.

درصدها	۰/۰۰۵	۰.۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۹	۰/۹۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹۵
چندک های از t^{*^b}	−۲/۵۹۵	−۱/۸٦۵	−۱/۵۱٦	−۱/۱۷۲	۱/۵۱۵	۲/۰٦۰	۲/۵٦۵	۴/۰۸۴

۲.۴ آزمون فرضیه برای میانگین دو جامعه

در این بخش آزمون فرضیه ارائه شده برای میانگین یک نمونه‌ای را به آزمون فرضیه برای برابری میانگین دو نمونه تصادفی فازی شهودی از دو جامعه مختلف، گسترش می‌دهیم. فرض کنید $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, ..., \tilde{z}_n)$ و $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_m)$ دو نمونه تصادفی فازی شهودی با واریانس هایی برابر و مجهول از دو جامعه مختلف باشند و بخواهیم فرضیه $H_0 : \tilde{\mu}_1 \ominus \tilde{\mu}_2 \approx \tilde{a}$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \tilde{\mu}_1 \ominus \tilde{\mu}_2 \not\approx \tilde{a}$ آزمون کنیم، در این آزمون، فرضیه H_0 را رد می‌کنیم اگر $\tau = \frac{d(\bar{\tilde{y}} \ominus \bar{\tilde{z}}, \tilde{a})}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \geq \tau_{1-\frac{\gamma}{2}}$ یا $\tau = \frac{d(\bar{\tilde{y}} \ominus \bar{\tilde{z}}, \tilde{a})}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \leq \tau_{\frac{\gamma}{2}}$ که درآن τ_γ چندک 100γ-ام از توزیع بوت‌استرپ $\tau^{*^b} = \frac{d(\bar{\tilde{y}}_c \ominus \bar{\tilde{x}}_c, \tilde{a})}{\sqrt{S_{cp}^{2*^b}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}$ با $S_{cp}^{2*^b} = \frac{(n-1)S_{c1}^{2*^b}+(m-1)S_{c2}^{2*^b}}{n+m-2}$ می‌باشد.

مثال ۲ فرض کنید دو نمونه تصادفی به اندازه‌های n=۱۶ و m=۱۳ از دو جامعه مختلف استخراج و داده‌های فازی شهودی داده شده در جدول ۳ مشاهده شده‌اند.

جدول ۳: نمونه‌های تصادفی فازی شهودی مربوط به دو جامعه

نمونه اول	نمونه دوم
$(۴۴, ۲, ۳, ۴, ۴)_T$	$(۱۵, ۲, ۲, ۳, ۳)_T$
$(۱۵, ۱, ۲, ۲, ۲)_T$	$(٦٦, ۲, ۳, ۳, ۴)_T$
$(۱۹, ۲, ۲, ۳, ۴)_T$	$(۹۲, ۳, ۳, ۴, ۵)_T$
$(۴۷, ۱, ۲, ۲, ۳)_T$	$(٦۸, ۲, ۳, ۴, ۴)_T$
$(۴۵, ۳, ۳, ۴, ۳)_T$	$(۴۳, ۲, ۱, ۳, ۲)_T$
$(۵۸, ۲, ۱, ۳, ۲)_T$	$(۵۷, ۳, ۴, ۳, ۵)_T$
$(۴۹, ۲, ۲, ۲, ۳)_T$	$(۹۹, ۴, ۳, ۴, ۴)_T$
$(۹۰, ۳, ۴, ۴, ۵)_T$	$(۸۲, ۱, ۲, ۳, ۴)_T$
$(۱۹, ۲, ۲, ۲, ۲)_T$	$(۲۳, ۱, ۱, ۲, ۲)_T$
$(۲۵, ۲, ۱, ۳, ۲)_T$	$(۴۰, ۲, ۳, ۳, ۴)_T$
$(۳۰, ۲, ۳, ۳, ۴)_T$	$(٦۹, ۲, ۲, ۲, ۳)_T$
$(٦۵, ۱, ۲, ۳, ۴)_T$	$(۸۰, ۱, ۱, ۱, ۲)_T$
$(۵۵, ۲, ۳, ۳, ۴)_T$	$(۹۲, ۳, ۲, ۳, ۳)_T$
$(۲۲, ۳, ۱, ۳, ۳)_T$	
$(٦۴, ۱, ۲, ۳, ۴)_T$	
$(۵۰, ۲, ۱, ۲, ۲)_T$	

فرض کنید مایل باشیم فرضیه $H_0 : \tilde{\mu}_2 \ominus \tilde{\mu}_1 \approx \tilde{a}$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \tilde{\mu}_2 \ominus \tilde{\mu}_1 \not\approx \tilde{a}$ آزمون کنیم. برای آزمون این فرضیه B=10000 نمونه بوت‌استرپ از دو نمونه تصادفی فازی شهودی $\widetilde{Y}^{*^b}; b = 1, 2, ..., B$ و $\widetilde{Z}^{*^b}; b = 1, 2, ..., B$، تولید کرده‌ایم و بعد از برآورد چندک‌های $\tau_{\frac{\gamma}{2}}$ و $\tau_{1-\frac{\gamma}{2}}$ برای $\frac{\gamma}{2} = 0/05$ نتایج در جدول ۴، بیان شده است.

جدول ۴: چندک‌های γ-ام از توزیع بوت استرپ τ^{*b}

$\tilde{a}$	τ	$\tau_{\frac{\gamma}{2}}$	$\tau_{1-\frac{\gamma}{2}}$	نتیجه آزمون
(−۲, ۱, ۱, ۱, ۲)	۱/۷۱	−۱/۶۵	۱/۶۳	رد فرضیه H_0
(۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	−۱/۵۶	−۱/۶۶	۱/۶۱	پذیرش فرضیه H_0
(−۷, ۱, ۲, ۴, ۴)	۲/۱۰۰	−۱/۶۵	۱/۶۶	رد فرضیه H_0
(۲, ۰, ۱, ۳, ۳)	۱/۳۹	−۱/۶۴	۱/۶۷	پذیرش فرضیه H_0

۳.۴ آزمون فرضیه برای واریانس یک جامعه

در این بخش آزمون فرضیهٔ بوت‌استرپی برای واریانس یک جامعه در حالت یک نمونه‌ای بر اساس داده‌های فازی شهودی و با استفاده از فاصله علامتدار یائو-ویو را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ... \tilde{X}_n)$ یک نمونه تصادفی از داده‌های فازی شهودی باشد و بخواهیم فرضیه $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ را آزمون کنیم. ما در این مسأله نیازمند توزیعی هستیم که تحت فرضیه H_0 دارای واریانس σ_0^2 باشد. یک راه، تغییر تابع توزیع است، طوری که دارای واریانس مطلوب شود. برای این منظور مشاهدات را به صورت $\tilde{X}_{ci} = \frac{\sigma_0 \tilde{X}_i}{S_n}$ $i = 1, 2, ..., n$ تغییر می‌دهیم، زیرا تحت فرضیه H_0 داریم:

$S_{cn}^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_{ci}, \overline{\tilde{x}}_c) = \frac{1}{n-1} \Sigma_{i=1}^n \frac{\sigma_0^2}{S_n^2} d^2(\tilde{x}_i, \overline{\tilde{x}}) = \sigma_0^2$. برای آزمون کردن فرضیه فوق ابتدا B نمونه تصادفی بوت‌استرپ $\tilde{\mathbf{X}}_c^{*^1}, \tilde{\mathbf{X}}_c^{*^2}, ... \tilde{\mathbf{X}}_c^{*^B}$ را از $\tilde{X}_{ci}$ به ازای $i = 1, 2, ..., n$ تولید می‌کنیم. در سطح معناداری $\gamma \in [0, 1]$ و بر اساس فاصله علامتدار یائو-ویو فرضیهٔ H_0 را رد می‌کنیم اگر $\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > z_{1-\frac{\gamma}{2}}$ یا $\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < z_{\frac{\gamma}{2}}$ که در آن z_γ چندک 100γ درصد از توزیع بوت استرپ $\chi^{2*^b} = \frac{(n-1)S_{cn}^{2*^b}}{\sigma_0^2}$ می‌باشد و $S_{cn}^{2*^b} = \frac{1}{n-1} \Sigma_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_{ci}^{*^b}, \overline{\tilde{x}}_c^{*^b})$.

مثال ۳ داده‌های جدول ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم فرضیه $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ آزمون کنیم. برآورد چندک‌های توزیع بوت استرپ χ^{2*^b}، برای $\frac{\gamma}{2} = 0/05$ و براساس B=10000 نمونه، در جدول ۵ آمده است.

۴.۴ آزمون فرضیه برای واریانس دو جامعه

در این بخش آزمون فرضیه ارائه شده برای واریانس یک نمونه‌ای را به آزمون فرضیه برای برابری واریانس دو نمونه تصادفی فازی شهودی از دو جامعه مختلف، گسترش می‌دهیم. فرض کنید $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, ..., \widetilde{y}_m)$ و $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, ..., \widetilde{z}_n)$ دو نمونه تصادفی

جدول ۵: نتیجه آزمون $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ در مقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

σ_0^2	χ^2	$\chi^2_{\frac{\gamma}{2}}$	$\chi^2_{1-\frac{\gamma}{2}}$	نتیجه آزمون
۱۰۰	۵۲/۴۲	۴/۲۶	۱۶/۱	رد فرضیه H_0
۲۲۵	۲۳/۲۹	۴/۲۳	۱۶/۱۱	رد فرضیه H_0
۴۰۰	۱۳/۱۱	۴/۰۲۱	۱۵/۹۴	پذیرش فرضیه H_0
۶۲۵	۸/۳	۴/۱۷	۱۶/۱۰	پذیرش فرضیه H_0
۹۰۰	۵/۸	۴/۱۸	۱۵/۹۸	پذیرش فرضیه H_0
۶۰۰	۳/۲۲	۴/۱۷	۱۶/۱۰	رد فرضیه H_0

فازی شهودی از دو جامعه مختلف باشند. فرضیه $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^1} = a$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^1} \neq a$ در نظر بگیرید. فرضیه H_0 را در سطح معناداری $\gamma \in [0, 1]$ رد می‌کنیم اگر $\xi = \frac{(m-1)S^2_{2m}}{a(n-1)S^2_{1n}} \geq z_{1-\frac{\gamma}{2}}$ یا $\xi = \frac{(m-1)S_{2m}}{a(n-1)S^2_{1n}} \leq z_{\frac{\gamma}{2}}$، که درآن z_γ چندک 100γ-ام از توزیع بوت‌استرپ $\xi^{*^b} = \frac{(m-1)S^{2*^b}_{2cm}}{a(n-1)S^{2*^b}_{2cn}}$ با $S^{2*^b}_{1cn} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d^2(\widetilde{z}^{*b}_{ci}, \overline{\widetilde{z}}^{*b}_c)$ و $S^{2*^b}_{2cm} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} d^2(\widetilde{y}^{*b}_{ci}, \overline{\widetilde{y}}^{*b}_c)$ می‌باشد.

مثال ۴ داده‌های جدول ۳ را در نظر بگیرید، فرض کنید بخواهیم فرضیه $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^1} = a$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^1} \neq a$ آزمون‌کنیم. برای برآورد کردن $z_{\frac{\gamma}{2}}$ و $z_{1-\frac{\gamma}{2}}$، ابتدا B=10000 نمونه بوت‌استرپ از دو نمونه تصادفی فازی شهودی $\widetilde{Y}^{*^b}; b = 1, 2, ..., B$ و $\widetilde{Z}^{*^b}; b = 1, 2, ..., B$، تولید، و بعد مقادیر ξ^{*^b} را به ازای $b = 1, 2, ..., B$، محاسبه می کنیم. نتایج مطلوب برای $\frac{\gamma}{2} = 0/05$ در جدول ۶ خلاصه شده است.

جدول۶: نتیجه آزمون $H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = a$ در مقابل $H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq a$

a	ξ^2	$z_{\frac{\gamma}{2}}$	$z_{1-\frac{\gamma}{2}}$	نتیجه آزمون
۰/۵	۰/۳۸	۰/۵۰	۳/۵۷	رد فرضیه H_0
۱	۰/۷۶	۰/۵۱	۳/۶۱	پذیرش فرضیه H_0
۳	۲/۲۸	۰/۵۱	۳/۵۶	پذیرش فرضیه H_0
۵	۳/۸۰	۰/۵۰	۳/۶۰	رد فرضیه H_0

مراجع

ترکیان، ف.، اکبری، م. ق.، عارفی، م.(۱۳۹۰)، برآورد ضرایب رگرسیونی بر اساس داده‌های فازی شهودی به روش کمترین مربعات و با استفاده از فاصله علامت‌دار یائو-ویو ، گزارش یازدهمین کنفرانس فازی ایران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۲۶-۱۹.

طاهری، س.م.، ماشین‌چی، م.(۱۳۸۷)، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

عارفی، م.، طاهری، س. م. (۱۳۸۶)، آزمون فرض فازی بر پایه آماره آزمون فازی. گزارش هفتمین کنفرانس سیستمهای فازی و هوشمند، دانشگاه فردوسی مشهد، ۵۷۹-۵۷۵.

زینلی، ز.، اکبری، م. ق.(۱۳۹۰)، استنباط آماری در مورد واریانس بر اساس داده‌های فازی شهودی، گزارش چهل و دومین کنفرانس ریاضی ایران دانشگاه ولی عصر(ع) رفسنجان، ۴۹۰-۴۸۷

Akbari, M. GH and Rezaei, A. (2010), Bootstrap testing fuzzy hypotheses and observation on statistic .*Expert Systems with Application*, **37**:5782-5787.

Akbari, M.GH and Rezaei, A. and Waghei, Y.(2009), Statistical inference about the variance of fazzy random variabies. *Sankhyā*, **71**:206-221.

Arefi, M. and Taheri, S. M. (2011), Testing fuzzy hypotheses using fuzzy data based on fuzzy test statistic. Journal of Uncertain Systems, **5**:45-61.

Atanassov K. T. (1999), Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Application, vol. 35 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Physica, Heidelberg, Germany.

Filzmoser, P. and Viertl, R. (2004), Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy P-value, *Metrika,* **59**: 21-29.

Grzegorzewski, P. (2002), Testing fuzzy hypotheses with vague data. In: Bertoluzza C. et al. (eds), *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data,* Springer, Heidelberg, pp: 213-225.

Guha, D. and Chakraborty, D. (2010), A theoretical development of distance measure for intuitionistic fuzzy numbers. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(to appear).

Parchami, A., Taheri, S. M., and Mashinchi, M. (2010), Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Statistical Papers,* **51**: 209-226.

Montenegro, M., Casals, M. R., Lubiano, M. A., and Gil, M. A. (2001), Two sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable, *Information Sciences,* **133**: 89-100.

Taheri, S. M. and Arefi, M. (2009), Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic, *Soft Computing,* **13**: 617-625.

Taheri, S. M. and Behboodian, J. (2006), On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, *Italian Journal of Pure and Applied*

Mathematics, **19**: 139-154.

Taheri S. M. and Zarei R. (2011), Extension principle for vague sets and its applications. Advances in Fuzzy Mathematics,**6**(1): 17-26.

Torabi, H., Behboodian, J. and Taheri, S. M. (2006), Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Metrika,* **64**: 289-304.

Viertl, R .(2011), Statistical Method for fuzzy Data, John Wiley Sons, Ltd. ISBN:978-0-470-69945-4.