پیشگویی یک ترکیب خطی از اثرات ثابت و تصادفی برای کوچک نواحی فاقد نمونه

وحید صنعتگر - دکتر فیروزه ریواز

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده: در سال‌های اخیر مسئله‌ی برآورد کوچک ناحیه به دلیل نیاز به آمارهای قابل اعتماد هنگامی که تعداد نمونه در سطح ناحیه کم یا ناحیه فاقد نمونه است، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. لذا مدل‌های آماری توانمندی برای حل مسائل مربوط به این موضوع ارائه گردیده‌اند. یکی از مدل‌های پرکاربرد در این خصوص، مدل سطح ناحیه‌ی فی-هریوت است. اما با استفاده از این مدل نمی‌توان برای کوچک نواحی فاقد نمونه بهترین پیشگوی نااریب خطی برای اثرات تصادفی یا ترکیبی از اثرات تصادفی و ثابت ارائه کرد. در این مقاله، با تعمیم این مدل، بهترین پیشگوی نااریب خطی برای این منظور، در نواحی فاقد نمونه ارائه می‌شود. همچنین تحت فرض وجود همبستگی بین کوچک نواحی مجاور، با استفاده از یک مدل اتورگرسیو شرطی گاوسی اثرات تصادفی مدل‌بندی شده و سپس بهترین پیشگوی نااریب خطی ترکیبی از اثرات ثابت و تصادفی محاسبه می‌شوند. در انتها، نحوه‌ی به‌کارگیری مدل و عمکرد آن در مسئله‌ی پیشگویی جمعیت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: کوچک ناحیه، مدل فی-هریوت، نواحی فاقدنمونه، بهترین پیشگوی نااریب خطی، مدل اتورگرسیو شرطی

۱ مقدمه

امروزه تحلیل‌گران و برنامه‌ریزان در جستجوی اطلاعات جزئی‌تری هستند تا به مدد آن بتوانند تصمیم‌گیری‌های کارآمدی را صورت دهند. از این‌رو تقاضا برای برآوردهای قابل اعتماد در سطح زیرجامعه‌ها که به آن‌ها کوچک نواحی گفته می‌شود، در حال افزایش است. برای این منظور، مدل‌های آماری توانمندی ارائه گردیده‌اند که از جمله می‌توان به مدل سطح ناحیه‌ی فی-هریوت (فی و هریوت، ۱۹۷۹) اشاره کرد. این مدل که به دو سطح مدل ربط و نمونه‌گیری تقسیم می‌شود، به‌نوعی یک مدل آمیخته‌ی خطی است. فی و هریوت با استفاده از این مدل، بهترین پیشگوی نااریب خطی ($BLUP$)

ترکیبی از اثرات ثابت و تصادفی را برای کوچک نواحی دارای نمونه، ارائه دادند. اما براساس مدل ارائه شده توسط آن‌ها نمی‌توان برای کوچک نواحی فاقد نمونه $BLUP$ ترکیبی خطی از اثرات ثابت و تصادفی را به‌دست آورد. از طرفی در برخی کاربردها، نواحی نزدیک به‌هم از لحاظ جغرافیایی دارای رفتارهای مشابهی هستند، لذا می‌توان برای بالا بردن دقت برآوردهای کوچک نواحی، از اطلاعات نواحی همسایه نیز بهره برد. به‌عنوان مثال گوش و همکاران (۱۹۹۴)، رائو (۲۰۰۳)، سوزا و همکاران (۲۰۰۹) و ژوانگ و کرسی (۲۰۱۱) با استفاده از مدل‌های مختلفی اثرات نواحی همسایه را در پیشگویی کوچک نواحی لحاظ کردند.
در این مقاله با فرض وجود همبستگی فضایی، با استفاده از یک مدل اتورگرسیو شرطی نرمال، اثرات تصادفی کوچک نواحی مدل‌بندی می‌شوند. سپس مدل فی‌هریوت فضایی فضایی تعمیم‌داده‌می‌شود به‌گونه‌ای که بتوان برای نواحی فاقد نمونه نیز بهترین پیشگوی نااریب خطی ترکیبی از اثرات تصادفی و ثابت را تعیین نمود. در نهایت، عملکرد مدل ارائه شده در مسئله‌ی پیشگویی جمعیت کوچک نواحی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ مدل آماری

فرض کنید جامعه‌ی U به اندازه‌ی N، به M ناحیه‌ی $U_1,\ldots,U_M$ افراز شده است، به‌طوری که تعداد واحدهای ناحیه‌ی U_i برابر N_i و $\sum_{i=1}^{M} N_i = N$ است. n اندازه‌ی نمونه، با فضای نمونه‌ی s از جامعه‌ی U برای ناحیه‌ی بزرگ بهینه شده است، به‌طوری که $s = s_1 \cup \ldots \cup s_m$ و m تعداد کوچک ناحیه‌های شامل نمونه است.
فرض کنید θ_i پارامتر مورد علاقه‌ی کوچک ناحیه‌ی i ام، $i = 1,\ldots,m$، باشد. مدل فی و هریوت فرض می‌کند که θ_iها از طریق مدل رگرسیون خطی

$$\theta_i = \mathbf{x}_i'\beta + u_i; \qquad i = 1,\ldots,m \tag{1}$$

به داده‌های کمکی $\mathbf{x}_i' = (x_1;\ldots;x_{p^i})'$ ناحیه ویژه مرتبط هستند به‌طوری که $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_p)'$ بردار $p \times 1$ از ضرایب رگرسیونی و u_iها اثرهای تصادفی ناحیه ویژه که مستقل و هم‌توزیع با $E(u_i) = 0$ و $Var(u_i) = \sigma_u^2$ هستند. آنها همچنین فرض کردند یک برآوردگر مستقیم $\tilde{y}_i$ که معمولاً برای پارامتر θ_i طرح نااریب، و برای کوچک نواحی شامل نمونه، در دسترس است، بنابراین:

$$\tilde{y}_i = \theta_i + e_i; \qquad i = 1,\ldots,m \tag{2}$$

که e_iها خطاهای نمونه‌گیری وابسته به برآوردگرهای مستقیم $\tilde{y}_i$ هستند. همچنین فرض می‌شود e_iها متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با $E(e_i|\theta_i) = 0$ و $Var(e_i|\theta_i) = \tilde{\sigma}_i^2$ باشند. ترکیب این دو مدل منجر به یک مدل آمیخته‌ی خطی می‌شود که به مدل فی-هریوت معروف است، یعنی

$$\tilde{y}_i = \mathbf{x}'_i\beta + u_i + e_i; \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

در ادامه ثابت می‌شود که بهترین پیشگوی نااریب خطی $(BLUP)$ ترکیبی از اثرات ثابت و تصادفی برای مدل (۳) به‌فرم

$$BLUP\theta_i = \mathbf{x}'_i\hat{\beta}_{GLS} + \lambda' DK'(KDK' + R)^{-1}(\tilde{Y}^* - X^{*\prime}\hat{\beta}_{GLS}) \tag{4}$$

خواهد بود که λ برداری m بعدی با واحد iام یک و بقیه‌ی عناصر صفر است. به علت اینکه بردار λ برداری mتایی بر اساس نواحی دارای نمونه است، پس $BLUP(\theta_i)$ برای نواحی فاقد نمونه، با توجه به رابطه‌ی (۴) نمی‌توان به‌دست آورد. لذا در ادامه با تعمیم مدل فی-هریوت، به حل این مسئله می‌پردازیم.

۱.۲ مدل فی-هریوت تعمیم‌یافته

می‌توان مدل فی-هریوت (۳) را به فرم

$$\tilde{Y} = KX\beta + Ku + e = KZ + e \tag{5}$$

باز نویسی کرد. که K و X به‌ترتیب ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی $m \times M$ و $M \times p$ با رتبه‌ی کامل‌اند، u و e به‌ترتیب بردارهایی M و m بعدی هستند که به‌طور مستقل با میانگین‌های صفر و ماتریس‌های D با مرتبه‌ی $M \times M$? و $R = diag(\tilde{\sigma}_1^2, \ldots, \tilde{\sigma}_{1m}^2)$ توزیع شده‌اند. برای مدل (۵) درایه‌های ماتریس K به صورت

$$K_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } j \text{ امین ناحیه، } i \text{ امین ناحیه‌ای باشد که دارای نمونه است} \\ 0 & o.w \end{cases} \tag{6}$$

برای $j = 1, \ldots, M$ و $i = 1, \ldots, m$ تعریف می‌شود. با جایگذاری ماتریس K در مدل (۵) مدل (۳) به‌دست می‌آید. حال می‌توان با به‌کارگیری مدل (۵)، $BLUP(\theta_i)$ را نیز برای نواحی فاقد نمونه به‌دست آورد. که در ادامه توضیح داده می‌شود. لازم به‌ذکر است در مسائل عملی، لزوماً نواحی از هم مستقل نیستند و تغییر ویژگی‌های آن‌ها می‌تواند مشابه نواحی همسایه باشد. با وارد کردن این وابستگی بین نواحی، که به آن وابستگی فضایی می‌گویند، می‌توان برآوردگرهای دقیق‌تری را به‌دست آورد. برای این منظور، به مدل‌هایی نیاز است که بتوانند وابستگی بین نواحی را نیز، مدل کنند. برای این منظور مدل (۵) به حالت فضایی تعمیم داده می‌شود.

۲.۲ مدل فی-هریوت فضایی تعمیم‌یافته

برای مدل‌بندی اثرات تصادفی در مدل (۵) از یک فرایند اتو رگرسیو شرطی نرمال استفاده می‌شود. در واقع فرض کنید

$$Z_i|Z_{-i} \sim N(\mu_i + \sum_{j=1 \quad j\neq 1}^{M} c_{ij}(Z_j - \mu_j), \sigma_u^2); \qquad i = 1, \ldots, M$$

باشد، که $E(Z_i) = \mu_i$، $Var(Z_i|Z_{-i}) = \sigma_u^2$ و c_{ij}ها ثابت‌هایی معلوم یا نامعلوم با $c_{ii} = 0$، $i = 1, \ldots, M$ هستند. با به‌کارگیری قضیه‌ی بیسگ (۱۹۷۴) داریم:

$$Z \sim N_m(\mu, \sigma_u^2(I - \gamma H)^{-1}\Phi) \qquad (۷)$$

که $\mu = (\mu_1, \ldots, m_M)$ بردار میانگین با $\mu_i = \mathbf{x}_i'\beta$ و $D = \sigma_u^2(I - \gamma H)^{-1}\Phi$ است. γ پارامتر فضایی و $H = (h_{ij})$ ماتریس همسایگی $M \times M$ با اعضای روی قطر صفر و $\Phi = diag(\frac{1}{N_1}, \ldots, \frac{1}{N_M})$ ماتریس معلوم با عناصر روی قطر مثبت است. معمولاً N_iها مشخصه‌ای از کوچک ناحیه‌ی i ام است که با واریانس متغیر تحت بررسی رابطه دارد. برای خوش تعریفی توزیع (۷)، اگر

$$h_{ij} = \begin{cases} (\frac{\phi_i}{\phi_j})^{\frac{1}{2}}; & j \in N(i) \\ 0; & o.w \end{cases} \qquad (۸)$$

و شرط $\frac{1}{\lambda_{\max}} < \gamma < \frac{1}{\lambda_{\min}}$ برقرار باشد، ماتریس واریانس-کوواریانس همیشه مثبت است. در ادامه، در بخش ۳، $BLUP(\theta_i)$ بر اساس مدل فی-هریوت فضایی تعمیم یافته ارائه می‌شود.

۳ بهترین پیشگوی ناااریب خطی

مدل خطی

$$Y = X\beta + \xi, \qquad E(\xi) = 0, \qquad Cov(\xi) = V \qquad (۹)$$

را مدل گاوس-مارکوف نامند، اگر $\lambda'\beta$ قابل برآورد و برآوردگر کمترین توان‌های دوم $\lambda'\beta$، بهترین برآوردگر ناااریب خطی (مینیمم واریانس) $\lambda'\beta$ باشد (کریستنسن (۲۰۰۱) ص. ۲۹).

اگر ناحیه‌ی k ام فاقد نمونه باشد و برآورد مستقیم آن، با $\bar{y}_k$، و بردار برآوردهای مستقیم

کل نواحی برای مدل (۵) با $\tilde{y} = (\tilde{y}^{*\prime}, \tilde{y}_k)'$ نشان داده شود که برای آن $\tilde{y}_k$ نامعلوم است. با در نظر گرفتن $\tilde{y}^* = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)'$ و

$$\mathbf{x}'_i = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}); \qquad X^* = (\ \mathbf{x}_1, \ldots,\ \mathbf{x}_m)$$

برای $i = 1, \ldots, m, k$، $Cov(Y^*, Y_k) = V_{y_k}$، $Cov(Y^*) = V$ و $var(Y) = \sum = \begin{cases} V & V_{yk} \\ V'_{yk} & \sigma^2 \end{cases}$، پیشگوی $g(\tilde{y}^*)$ برای $\tilde{Y}_k$ نااریب است اگر رابطه‌ی $E(g(\tilde{Y}^*)) = E(\tilde{Y}_k)$ برقرار باشد. همچنین $a_0 + a'\tilde{Y}^*$ بهترین پیشگوی نااریب خطی برای $\tilde{Y}_k$ است اگر $a_0 + a'\tilde{Y}^*$ نااریب، و برای هر پیشگوی نااریب $b_0 + b'\tilde{Y}^*$، رابطه‌ی

$$E(\tilde{Y}_k - a_0 - a'\tilde{Y}^*)^2 \leq E(\tilde{Y}_k - b_0 - b'\tilde{Y}^*)^2$$

برقرار باشد. در این صورت بهترین پیشگوی نااریب خطی $\tilde{Y}_k$ برابر $\mathbf{x}'_0\hat{\beta} + \delta'_*(\hat{Y}^* - X^{*\prime}\hat{\beta})$ است. به‌طوری که $V\delta_* = V_{y_0}$ و $X^{*\prime}\hat{\beta}$، $BLUE$ برای $X^{*\prime}\beta$ است (کریستنسن (۲۰۰۱)، ص ۲۸۳).

با جایگذاری $\mathbf{x}'_k = 0$، $\tilde{Y}_k = \lambda'u$ و $V = KDK' + R$ در δ_*، بهترین پیشگوی نااریب خطی ترکیبی از اثرات تصادفی، $\lambda'u$، عبارت خواهد بود از:

$$BLUP(\lambda'u) = \lambda'DK'(KDK' + R)^{-1}(Y^* - X^{*\prime}\hat{\beta}). \qquad (10)$$

که λ برداری M تایی است. در نتیجه برای مدل (۵)، تحت وجود همبستگی فضایی بهترین پیشگوی نااریب خطی به فرم

$$BLUP(Z_i) = \mathbf{x}'_i\hat{\beta}_{GLS} + \lambda'DK'(KDK' + R)^{-1}(\tilde{Y} - X^{*\prime}\hat{\beta}_{GLS}); i = 1, \ldots, M \quad (11)$$

خواهد شد. به‌طوری که اگر ناحیه‌ی k ام فاقد نمونه باشد، با تعریف بردار M تاییِ λ به فرمی که درایه‌ی k ام آن برابر ۱ و بقیه برابر صفر باشد، با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) می‌توان بهترین پیشگوی نااریب خطی پارامتر ناحیه‌ی k ام را به‌دست آورد. با استفاده از مدل (۵) علاوه بر امکان دسترسی به بهترین پیشگوی نااریب خطی، می‌توان از همبستگی فضایی حاصل از همجواری کوچک نواحی که برای رابطه‌ی (۱۱) در ماتریس D بیان می‌شود، نیز استفاده کرد.

۴ پیشگویی جمعیت بخش‌های استان کهگیلویه و بویراحمد

در این بخش جهت مقایسه‌ی نتایج روش‌های ارائه شده با مقادیر واقعی با استفاده از داده‌های سرشماری ۸۵ استان کهگیلویه و بویراحمد، پیشگویی جمعیت بخش‌های

آن استان (شکل (۱)) مورد نظر قرار می‌گیرد. با ارائه طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده و در نظر گرفتن بلوک‌های استان کهگیلویه و بویراحمد به‌عنوان واحد آماری، با در نظر گرفتن سطح خطای نسبی ۰/۰۵، برای اندازه جامعه‌ی ۴۳۲، اندازه نمونه‌ی ۸۰ به‌دست آمد. از طرفی اگر جهت برنامه‌ریزی و سیاست‌گذاری‌های بهینه به پیشگویی جمعیت بخش‌های استان نیاز باشد، با توجه به این‌که اندازه نمونه، برای کوچک نواحی کم هستند، برآوردهای مستقیم جمعیت حاصل از داده‌های طرح نمونه‌گیری در سطح بخش‌ها قابل اعتماد نیستند و از دقت پایینی برخوردار هستند. برای رفع این مسئله دو راهکار وجود دارد. یکی این‌که می‌توان اندازه نمونه را در سطح بخش‌ها بهینه کرد. اما به علت محدودیت در زمان و هزینه این راهکار اغلب عملی نیست. راهکار دوم، استفاده از روش‌های برآورد کوچک ناحیه‌ای است که با داشتن متغیرهای کمکی مناسب برآوردهایی با دقت خوب را نتیجه می‌دهد. از آن‌جایی‌که تغییرات جمعیت بخش‌ها می‌تواند به تغییر جمعیت بخش‌های همجوار وابسته باشد، می‌توان برای بالا بردن دقت پیشگوها از همبستگی فضایی حاصل از همجواری بخش‌ها نیز استفاده کرد.
برای مدل فی-هریوت فضایی (۵) فرض کنید Z_i پارامتر مورد علاقه‌ی کوچک ناحیه‌ی i ام باشد. با استفاده از برآوردگر هورویتز-تامپسون، برآوردهای مستقیم جمعیت برای بزرگ ناحیه و کوچک نواحی به‌دست می‌آیند. باجایگذاری برآوردها در $\frac{\frac{p_{i85}}{p_{85}}}{\frac{p_{i75}}{p_{75}}}$ برآورد مستقیم Z_i تعیین می‌شود. لازم به‌ذکر است متغیرهای جنسیت، سن، تغییر اقامت در مدت ده سال، وضع فعالیت و وضع زناشویی به‌عنوان متغیرهای کمکی در نظر گرفته می‌شوند. برآوردهای $H-T$ بخش‌های استان کهگیلویه و بویراحمد در جدول ۲ نشان داده‌شده‌است. به‌علت اینکه بخش کهگیلویه‌مرکزی فاقد نمونه است، نمی‌توان برآوردگر مستقیم برای آن محاسبه کرد.

جهت پیشگویی جمعیت بخش کهگیلویه مرکزی، با تعریف مناسب از ماتریس K در مدل (۵) $BLUP$ بخش کهگیلویه‌مرکزی با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) برابر ۰/۵۶۸۶ به‌دست می‌آید که متناظر با آن، جمعیت برابر ۱۴۲۸۴ به‌دست می‌آید. نتایج بهترین پیشگوی ناارِیب خطی برای سایر بخش‌ها در جدول ۲ نشان داده شده است.

با محاسبه‌ی خطای نسبی مطلق (ARE) که به‌فرم $ARE_i = \frac{|\hat{p}_i - p_i|}{p_i}$ است دو روش هورویتز-تامپسون ($H-T$) و $BLUP$ ارائه شده با هم مقایسه می‌شوند. لازم به‌ذکر است که در ARE، p_i اندازه جمعیت ناحیه‌ی i ام و $\hat{p}_{(i)}$ برآورد آن است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطای نسبی مطلق برای روش $BLUP$ به‌طور متوسط ۰/۰۴۸ کاهش یافته است.

جدول ۱: برآوردهای $H-T$ جمعیت بخش‌های استان کهگیلویه و بویر احمد با اندازه نمونه‌ی ۸۰

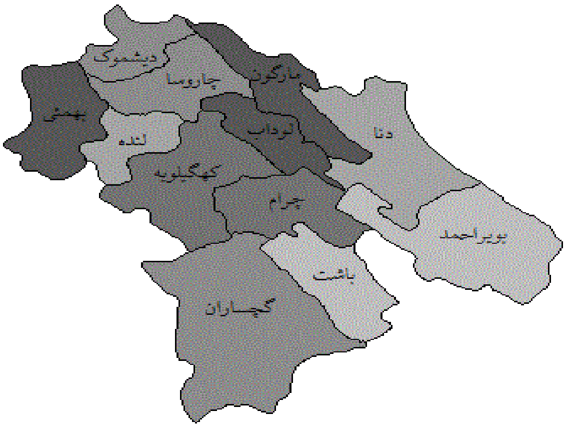
بخش	برآورد $H-T$	واریانس برآورد $H-T$	اندازه‌ی نمونه	مقدار واقعی
دنا	۴۷۶۷۷	۱/۲۱e + ۱۲	۹	۵۳۰۳۴
لوداب	۳۱۲۴	۹/۲۷e + ۰۸	۲	۲۳۲۲۹
مارگون	۱۳۵۱۸۸	۵/۹۲e + ۱۲	۲۰	۱۷۹۶۷۲
بویراحمد مرکز	۱۳۴۱۹	۳/۳۱e + ۱۳	۵	۱۴۸۱۸
بهمئی	۳۵۷۳۹	۳/۹e + ۱۳	۶	۳۵۵۴۱
چاروسا	۱۵۸۸۲	۳/۴۸e + ۱۲	۴	۲۱۸۰۶
چرام	۵۲۱۴۶	۹/۹۲e + ۱۲	۳	۳۶۴۲۶
دیشموک	۲۴۲۰۸	in	۱	۲۱۲۷۷
لنده	۹۴۳۷۷	۱/۸۱e + ۱۲	۱۰	۹۱۵۵۰
کهگیلویه مرکزی	–	–	۰	۲۰۷۱۶
باشت	۱۳۵۵۲	۱/۴۴e + ۱۲	۳	۲۲۴۳۷
گچساران مرکزی	۴۰۴۳۹	۱/۱۷e + ۱۲	۱۷	۱۱۱۵۳۸

جدول ۲: خطای نسبی جمعیت بخش‌های استان کهگیلویه و بویر احمد با اندازه نمونه‌ی ۸۰

بخش	$ARE(H-T)$	$ARE(SBLUP)$	$BLUP$	مقدار واقعی
دنا	۰/۱۰۱	۰/۰۴۴۰	۵۰۶۹۶/۷۶۵	۵۳۰۳۴
لوداب	۰/۸۶۶	۰/۳۷۲	۳۱۸۸۸/۵۷	۲۳۲۲۹
مارگون	۰/۲۴۸	۰/۳۰۵	۱۲۴۸۱۶/۹۵	۱۷۹۶۷۲
بویراحمد مرکز	۰/۰۹۴	۰/۴۴۶	۲۱۴۳۵/۰۲	۱۴۸۱۸
بهمئی	۰/۰۰۶	۰/۰۲۷	۳۶۵۱۹/۳	۳۵۵۴۱
چاروسا	۰/۲۷۲	۰/۰۵۶۲	۲۳۰۳۲/۳	۲۱۸۰۶
چرام	۰/۴۳۲	۰/۲۲۹	۴۴۷۹۴/۹	۳۶۴۲۶
دیشموک	۰/۱۳۸	۰/۳۷	۱۳۲۴۰/۸	۲۱۲۷۷
لنده	۰/۰۳۱	۰/۴۷	۴۷۸۰۹/۸	۹۱۵۵۰
کهگیلویه مرکزی	۰/۳۱۰	۰/۳۱	۱۴۲۸۴	۲۰۷۱۶
باشت	۰/۳۹۶	۰/۲۴۱	۱۷۰۲۵/۸۸	۲۲۴۳۷
گچساران مرکزی	۰/۶۳۷	۰/۰۶۷۵	۱۰۴۰۰۳۲	۱۱۱۵۳۸

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با تعمیم مدل فی-هریوت، بهترین پیشگوی نااریب خطیِ ترکیبی از اثرات تصادفی و ثابت برای کوچک نواحی فاقد نمونه ارائه شد. همچنین با توجه به اینکه در برخی مسائل عملی، کوچک نواحی همبسته‌ی فضایی نیز هستند. بهترین پیشگوی نااریب خطی در این حالت نیز تعیین شد. سپس عملکرد مدل ارائه شده در مسئله‌ی پیشگویی جمعیت بخش‌های استان کهگیلویه و بویراحمد بر اساس داده‌های سرشماری ۸۵ مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد که علاوه بر توانایی مدل در یافتن $BLUP$ ترکیبی از اثرات تصادفی و ثابت برای نواحی فاقد نمونه، دارای خطای نسبی مطلق کمتری نسبت به برآوردهای حاصل از روش هورویتز-تامپسون نیز است.



شکل ۱.: نقشه‌ی بخش‌های استان کهگیلویه و بویراحمد

مراجع

Besag, J.E., (1974). Spatial interactions and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series B 36, 192-225.

Christensen, R. (2001). *Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models* University of New Mexico.

Fay, R. E. and Herriot, R. A. (1979). Estimates of income for small places: an application of James-Stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association* 74 269-277.

Ghosh, M. and Rao, J.N.K. (1994), Small area Estimation: An Appraisal, *Statistical Science,* 9, 55-93.

Rao, J.N.K. (2003). *Small Area Estimation.* New York: Wiley.

Souza, D. F., Moura, F. A. S. and Migon, H. S. (2009).Small Area Population Prediction via Hierarchical Models. *Survey Methodology,* 35 203-214.

Zhuang, L., and Cressie, N. (2011), Spatio-temporal modeling of sudden infant death syndrome data *Statistical Methodology.*