طرح‌های بهینه برای تشخیص مدل درست از میان مدل‌های رقیب

هوشنگ طالبی - فریبا زاده‌لباف

گروه آمار، دانشگاه اصفهان

چکیده: در بسیاری از مواقع، آزمایشگر با حالتی مواجه می‌شود که چند مدل رقیب وجود دارد، که تنها یکی از آن‌ها درست است، امااین‌که کدام مدل صحیح است، نامعلوم است. هدف از این مقاله معرفی معیارهای بهینگی برای یافتن طرح مطلوب در بررسی و تشخیص مدل درست است.به این منظور به دو رویکرد بیزی و غیربیزی می‌پردازیم. اگرچه رویکرد بیزی محدودیت‌هایی دارد، اما از این نظر که وابستگی استنباط‌های انجام شده نسبت به مقدار اولیه پارامترها را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهد، نسبت به رویکرد غیربیزی مزیت خواهد داشت. در این مقاله علاوه بر معرفی معیارهای گوناگون، برای هریک الگوریتمی نیز ارائه می‌دهیم، که در به‌دست آوردن طرح‌های بهینه به‌صورت عددی سودمند هستند.

واژه‌های کلیدی: تشخیص مدل، طرح بهینه، مدل‌های غیرخطی، KL-بهینگی

۱ مقدمه

در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی معمولاً آزمایش‌هایی توسط پژوهشگران برای کشف حقایقی نظیر تشخیص عوامل مؤثر بر فرآیند، محاسبه اثرات این عوامل و نیز برازش مدلی مناسب برای متغیر پاسخ (ویژگی مورد بررسی در فرآیند) به‌منظور پیش‌بینی و بهینه‌سازی فرآیند انجام می‌گیرد. درواقع آزمایش یکی از ابزارهای اساسی در به دست آوردن یافته‌های جدید و یا درک بهتر وقایع است. یک طرح آماری آزمایش، طرح‌ریزی یک فرآیند، تعیین مکان و تعداد نقاط آزمایشی و تعداد تکرار آن‌هاست که با استفاده از روش‌های آماری می‌توان آن‌ها را تحلیل کرد. واضح است که چگونگی انجام یک آزمایش و نحوه جمع‌آوری داده‌ها تأثیر بسزایی بر نتایج، تحلیل‌ها و اعتبار آن‌ها دارد. بهینگی در طرح‌ها که عبارتست از انتخاب بهینه مکان نقاط آزمایشی و تعداد اجراها در هریک از این نقاط یکی از این شیوه‌های علمی است که در به‌دست آوردن طرح‌های کارا نقشی اساسی دارد. محققینی ازجمله چرنوف (۱۹۵۳) و کیفر (۱۹۵۸) به موضوع طرح‌های بهینه پرداختند. در اغلب موارد آزمایشگر نه‌تنها با یک مدل بلکه با چندین

مدل ممکن روبروست که تنها یکی از آن‌ها مدل درست است. در این صورت ممکن است معیار بهینگی، توان تمایز بین مدل‌ها برای انتخاب طرح باشد. باید توجه داشت که در مبحث تشخیص مدل معیارهای AIC و BIC با استفاده از مشاهدات به‌دست آمده به انتخاب مدل درست می‌پردازند. ممکن است با تغییرات اندکی در مشاهدات، این معیارها مدل دیگری را به‌عنوان مدل درست مشخص کنند. پس اگر داده‌ها در نقاط مناسبی جمع‌آوری نشده باشند، این چنین معیارها به نتایج گمراه کننده منجر شده و مدل را به‌درستی انتخاب نمی‌کنند. بنابراین لازم است مشاهدات به‌گونه‌ای باشند که معیارهای انتخاب مدل در برابر آن‌ها پایدار بوده و تصمیم آن‌ها در تعیین مدل درست، با تغییر مشاهدات، از ثبات کافی برخوردار باشد. معیارهایی که در این مقاله معرفی می‌شوند، برای تعیین نقاطی است که پس از به‌دست آمدن مشاهدات در آن نقاط، تفاوت دو مدل را تا حد امکان آشکار ساخته و تشخیص بین آن‌ها را ساده‌تر کند و به این ترتیب معیارهای انتخاب مدل را در برابر مشکلات گفته شده ایمن می‌سازند.

بنابراین طرح‌های بهینه به‌دست آمده از معیارهای بهینگی برای تمایز بین دو مدل، در ادبیات موضوع از اهمیت بسزایی برخوردارند. آتکینسون و فدرف(۱۹۷۵) طرح‌های T-بهینه را به این منظور معرفی کردند و یکی از تحقیقات اساسی در این زمینه لوپز-فیدالگو و همکاران (۲۰۰۷) است که با استفاده از فاصله کولبک-لیبلر معیار KL-بهینگی را برای تمایز دو مدل در شرایط خطی و غیرخطی ارائه کردند. از آن‌جا که طرح‌های T- و KL-بهینه به مدل درست فرض شده و مقادیر عددی پارامترهای آن وابسته‌اند، ناگزیریم مقادیر معلوم اولیه‌ای را جایگزین پارامترهای مجهول سازیم. از این رو این گونه طرح‌ها را بهینه موضعی می نامند. برای کاهش وابستگی طرح‌های موضعی به مدل و مقادیر اولیه پارامترها، به‌جای در نظر گرفتن یک مدل به‌عنوان مدل درست، احتمال‌های پیشینی برای درستی هریک از مدل‌ها قرار می‌دهیم. همچنین به‌جای قرار دادن یک مقدار خاص برای پارامترها، یک توزیع احتمالی پیشین برای آن‌ها در نظر می‌گیرند. پونسه دلن و آتکینسون (۱) با استفاده از رویکردی بیزی معیار بهینگی T را کلیت بخشیدند. پس از آن توماسی و لوپز (۲۰۱۰) به پیروی از آن‌ها معیار بهینگی KL را به حالت بیزی گسترش دادند.

در بخش ۲ به مرور برخی مفاهیم مورد نیاز در بخش‌های بعد و معرفی معیارهای T- و KL-بهینگی می‌پردازیم. در بخش ۳ نیز به‌ترتیب، به رویکرد بیزی دو معیار T و KL و الگوریتم‌های آن‌ها اختصاص یافته است.

۲ تعاریف کلی و مروری بر طرح‌های بهینه غیربیزی

زیرمجموعه $\{\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_N\}$ از اعضای مجموعه فشرده X، که بعضی از آن‌ها ممکن است بر هم منطبق باشند، را یک طرح آزمایشی دقیق (یا گسسته) با حجم N می‌نامند. با توجه به احتمال یکسان بودن بعضی از اعضا، اگر $n\ (\leq N)$ نقطه مجزا، هریک با r_i تکرار وجود داشته باشد، آن را با x_1، x_2، ...، x_n نمایش می‌دهیم.
برای هر x_i ضرایب وزنی را به‌صورت $w_i = r_i/N$ در نظر بگیرید، $(i = 1, ..., n)$.
یک اندازه احتمال گسسته، که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

را یک طرح دقیق نُرم شده (گسسته) یا یک طرح n–نقطه‌ای با حجم N گویند.
فرض کنید طرحی که شامل تعداد محدودی نقطه است را با (۱) نشان دهیم، به‌طوری‌که ضرایب w_i مقادیر مثبت دلخواه باشند، $\sum w_i = 1$. همچنین طرحی که تمام جرم را در نقطه x متمرکز کند را با ξ_x نشان می‌دهیم. واضح است که اگر ξ_1 و ξ_2 دو اندازه طرح باشند، آن‌گاه برای $0 \leq \lambda \leq 1$، $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ نیز یک اندازه طرح خواهد بود.
مدل رگرسیونی زیر را در نظر بگیرید که در آن مشاهدات y_{ik} به‌صورت

$$y_{ik} = \eta_t(x_i) + \varepsilon_{ik}(i = 1, ..., n; k = 1, ..., r_i) \qquad (2)$$

داده می‌شوند، به‌طوری که نقاط طرح x_i مقادیر معلوم و متغیرهای تصادفی ε_{ik} مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ثابت σ^2 هستند. در مباحث نظری بدون از دست دادن کلیت σ^2 را برابر ۱ قرار می‌دهیم. تابع η_t یکی از دو تابع معلوم $\eta_1(x, \theta_1)$ و $\eta_2(x, \theta_2)$ است و θ_1 و θ_2 مجموعه‌هایی از پارامترها در ابعاد p_1 و p_2 می‌باشند. هدف، تعیین یکی از این دو مدل به‌عنوان مدل درست است.
در حالت خاص، فرض کنید مدل اول درست باشد، به این معنا که $\eta_t(x) = \eta_1(x, \theta_1)$.
تعریف. طرح ξ_T^* به‌طوری که

$$\Delta_2(\xi_T^*) = \sup_{\xi \in H} \Delta_2(\xi), \qquad (3)$$

یک طرح T–بهینه است، که در آن

$$\Delta_2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} w_i\{\eta_t(x_i) - \eta_2(x_i, \hat{(\theta)}_{t2})\}^2 = \inf_{\theta_2 \in \Omega_2} \sum_{i=1}^{n} w_i\{\eta_t(x_i) - \eta_2(x_i, \theta_2\}^2.$$

حال فرض کنید $f_1(y,x,\theta_1)$ و $f_2(y,x,\theta_2)$ دو تابع چگالی رقیب باشند که در آن‌ها $i=1,2$ ،θ_i، y و x مشابه بالا تعریف می‌شوند. همچنین $f(y,x)=f_1(y,x,\theta_1)$ را مدل درست در نظر می‌گیریم. با توجه به این نمادها، فاصله KL بین مدل درست $f(y,x)$ و مدل رقیب $f_2(y,x,\theta_2)$ عبارتست از

$$I(f,f_2,x,\theta_2)=\int f(y,x)\log\{\frac{f(y,x)}{f_2(y,x,\theta_2)}\}dy,\ x\in X$$

تابع معیار KL-بهینگی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{21}(\xi)=\min_{\theta_2\in\Omega_2}\{\int_X I(f,f_2,x,\theta_2)\xi(dx)\} \tag{4}$$

تعریف. طرحی که $I_{21}(\xi)$ را ماکسیمم می‌کند طرح KL-بهینه نامیده می‌شود.

۳ طرح‌های بهینه بیزی

۱.۳ T-بهینگی بیزی

همانند قبل، مدل را به‌صورت $E(y)=\eta_t(x), x\in X$ در نظر می‌گیریم که در آن مدل درست، $\eta_t(x)$، یکی از دو تابع معلوم $\eta_1(x,\theta_1)$ یا $\eta_2(x,\theta_2)$ با احتمال‌های پیشین به‌ترتیب π_1 و $\pi_2=1-\pi_1$ است. فرض کنید مجموعه پارامترهای θ_j با بعد m_j دارای توزیع احتمالی پیشین $p_j(\theta_j)$ بوده و $\Omega_j\subset R^{m_j}$ فضای پارامتر مجموعه θ_j است $(j=1,2)$.

کمیت‌های

$$\Delta_1(\xi,\theta_2)=\inf_{\theta_1\in\Omega_1}\int_X\{\eta_2(x,\theta_2)-\eta_1(x,\theta_1)\}^2(dx),$$

$$\Delta_2(\xi,\theta_1)=\inf_{\theta_2\in\Omega_2}\int_X\{\eta_1(x,\theta_1)-\eta_2(x,\theta_2)\}^2(dx),$$

به‌ترتیب پارامتر غیرمرکزی مدل اول است، هنگامی‌که مدل دوم درست باشد و بالعکس. تعمیم از (۳) به یافتن ξ^*_{BT} می‌پردازد به‌طوری که

$$\Gamma(\xi^*_{BT})=\sup_{\xi\in H}\Gamma(\xi),$$

که در آن

$$\Gamma(\xi)=\sum\pi_j\gamma_{\bar{j}}(\xi)=\pi_1E_{\theta_1}\{\Delta_2(\xi,\theta_1)\}+\pi_2E_{\theta_2}\{\Delta_1(\xi,\theta_2)\},$$

به‌طوری که $\gamma_{\bar{1}}=\gamma_{2}$ و $\gamma_{1}=\gamma_{\bar{2}}$.
فرض کنید $\Omega^*_j(\xi)$ مجموعه جواب معادله زیر است

$$\int_X\{\eta_{\bar{j}}(x,\theta_{\bar{j}})-\eta_j(x,\theta^*_j)\}^2\xi(dx)=\inf_{\theta_j\in\Omega_j}\int_X\{\eta_{\bar{j}}(x,\theta_{\bar{j}})-\eta_j(x,\theta_j)\}^2\xi(dx) \quad (5)$$

اگر برای $\xi=\xi^*_{BT}$،(۵) دارای پاسخ یکتای θ^*_1 برای کلیه مقادیر $\theta_2\in\Omega_2$ و θ^*_2 برای کلیه مقادیر $\theta_1\in\Omega_1$ باشد، آنگاه ξ^*_{BT} را یک طرح باقاعده می نامند.
قضیه ۱. اگر ξ^*_{BT} یک طرح باقاعده باشد، آنگاه
(i) یک شرط لازم و کافی برای این‌که $\xi=\xi^*_{BT}$ T-بهینه بیزی باشد، عبارتست از این‌که برای کلیه $x\in X$، $\psi(x,\xi^*_{BT})\le\Gamma(\xi^*_{BT})$ باشد، که در آن

$$\psi(x,\xi^*_{BT})=\sum\pi_jE_{\theta_j}\{\eta_j(x,\theta_j)-\eta_{\bar{j}}(x,\theta^*_{\bar{j}})\}^2.$$

(ii) در نقاط طرح T-بهینه بیزی، $\psi(x,\xi^*_{BT})$ کران بالای خود را اختیار می‌کند.
(iii) برای هر طرح غیر بهینه ξ، یعنی طرحی که برای آن داشته باشیم $\Gamma(\xi)<\Gamma(\xi^*_{BT})$، می‌توان نوشت، $\sup_{x\in X}\psi(x,\xi)>\Gamma(\xi^*_{BT})$
اثبات. به پونسه دلن و آتکینسون [۵] رجوع شود.

۲.۳ KL-بهینگی بیزی

اگر $\bar{i}$ به مفهوم غیر از i و $i=1,2$ باشد، کمیت

$$I_{\bar{i},i}(\xi,\theta_i)=\min_{\theta_{\bar{i}}\in\Omega_{\bar{i}}}\int_X l[f_i(y,x,\theta_i),f_{\bar{i}}(y,x,\theta_{\bar{i}})]\xi(dx) \quad (6)$$

تابع معیار KL برای مدل $f_{\bar{i}}(y,x,\theta_{\bar{i}})$ است، هنگامی‌که $f_i(y,x,\theta_i)$ را مدل درست فرض کرده باشیم.
با میانگین‌گیری روی دو مدل و بر توزیع‌های پیشین پارامترها، معیار KL-بهینگی بیزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$I^B(\xi)=\pi_1E_{\theta_1}[I_{21}(\xi,\theta_1)]+\pi_2E_{\theta_2}[I_{12}(\xi,\theta_2)],$$

که در آن E_{θ_i} بیانگر امید ریاضی برحسب $p_i(\theta_i)$، یعنی توزیع احتمالی پیشین پارامتر θ_i و π_i احتمال پیشین مدل آماری $f_i(y,x,\theta_i)$، $i=1,2$ است. طرح ξ^*_{BKL} به‌طوری که برای آن داشته باشیم

$$\xi^*_{BKL}=arg\max_{\xi\in H}I^B(\xi),$$

طرح KL-بهینه بیزی نام دارد.
مشابه قبل، طرح ξ به‌طوری که برای آن مجموعه‌های

$$\Omega^*_{\bar{i}}(\xi,\theta_i) = arg \min_{\theta_{\bar{i}}\in\Omega_{\bar{i}}} \int_X l[f_i(y,x,\theta_i), f_{\bar{i}}(y,x,\theta_{\bar{i}})]\xi(dx), \qquad (۷)$$

منحصر به‌فرد باشند، یک طرح باقاعده نامیده می‌شود.
اگر ξ یک طرح باقاعده باشد، مشتق سویی $I^B(\xi,\theta_i)$ در ξ و در جهت $\delta_{\bar{\xi}} = \bar{\xi} - \xi$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\partial I^B(\xi,\bar{\xi}) = \int_X \psi^B(x,\xi)\bar{\xi}(dx),. \qquad (۸)$$

که در آن، $\psi^B(x,\xi) = \sum_{i=۱}^{۲} \pi_i E_{\theta_i}[\psi_{\bar{i}i}(x,\xi,\theta_i)]$ مشتق سویی $I^B(\xi)$ در ξ و در جهت δ_{ξ_x} بوده و $\theta^*_{\bar{i}}$ عضو یکتای $\Omega^*_{\bar{i}}(\xi,\theta_i)$ است.
در زیر قضیه هم‌ارزی را برای این‌گونه طرح‌ها بیان می‌کنیم. برای اثبات، توماسی و لوپز [۶] را ببینید.
قضیه۴. فرض کنید ξ^*_{BKL} یک طرح باقاعده باشد.
(i) طرح ξ^*_{BKL}، KL-بهینه بیزی است اگر و تنها اگر $x \in X$, $\psi^B(x,\xi^*_{BKL}) \leq ۰$.
(ii) تابع $\psi^B(x,\xi^*_{BKL})$ مقدار ماکسیمم خود را در نقاط تکیه‌گاه طرح بهینه اختیار می‌کند.

۳.۳ الگوریتم

ساختار تحلیلی طرح‌های T- و KL-بهینه موضعی و بیزی پیچیده بوده و بنابراین در عمل باید از روش‌های عددی استفاده کرد. در این قسمت الگوریتمی برای به دست آوردن طرح‌های KL-بهینه بیزی ارائه می کنیم. واضح است که با تغییرات مناسب، می توان آن را برای سایر طرح‌ها نیز به‌کار بست.
۱- فرض کنید که ξ_s طرح به‌دست آمده در گام s-ام باشد. برای هر نقطه از تکیه‌گاه $(i = ۱,۲)$, $p_i(\theta_i)$، $\theta_{\bar{i},s}$ و x_s را به‌صورت زیر بیابید

$$\theta_{\bar{i},s} = arg \min_{\theta_{\bar{i}}\in\Omega_{\bar{i}}} \int_X l[f_i(y,x,\theta_i), f_{\bar{i}}(y,x,\theta_{\bar{i}})]\xi_s(dx)$$

$$x_s = arg \max_{x\in X} \psi^B(x,\xi_s)$$

۲- مقدار α_s برای $۱ \leq \alpha_s \leq ۰$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که $\alpha_s \to ۰$، $\sum_{s=۰}^{\infty}\alpha_s = \infty$، $\sum_{s=۰}^{\infty}\alpha_s^۲ < \infty$. پس از آن $\xi_{s+۱}$ را تشکیل دهید، به‌طوری که

$$\xi_{s+۱} = (۱-\alpha_s)\xi_s + \alpha_s\xi_{x_s}.$$

مثال۱. بسیاری از مواقع در تحلیل‌های قابلیت اعتماد ممکن است توزیع‌های وایبل یا گاما را به مجموعه یکسانی از داده‌ها برازش داده و به نتیجه مطلوب رسید. در این قسمت به بررسی طرح KL-بهینه بیزی برای مقایسه دو تابع چگالی احتمال وایبل،

$$f_W(y;b,c)=\frac{cy^{c-1}}{b^c}\exp[-(\frac{y}{b})^c],\ b>0,c>0$$

و تابع چگالی احتمال گاما،

$$f_G(y;\beta,\alpha)=\frac{y^{\alpha-1}\exp(-\frac{y}{\beta})}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)},\ \beta>0,\alpha>0$$

می‌پردازیم، که در آن مدل‌سازی $b=\exp(\lambda_1 x)$ و $\beta=\exp(\gamma_1 x)$ مورد توجه خواهد بود، به‌طوری‌که x یک متغیر توضیحی است که در ناحیه آزمایشی $X=[1,2]$ تغییر می‌کند. واضح است که برای $\lambda_1,\gamma_1\in R$ شروط $b>0$ و $\beta>0$ برقرار خواهند بود. فرض کنید توزیع گاما درست باشد آن‌گاه

$$I_{21}(\xi,\gamma_1,\alpha)=\min_{\lambda_1,c}\int_X l[f_G(y,x,\gamma,\alpha),f_W(y,x,\lambda_1,c)]\xi(dx)=$$

$$\min_{\bar{\lambda}_1,c}\{-\log[\Gamma(\alpha)]-\log c+(\alpha-c)\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\alpha+\int_X\frac{\Gamma(\alpha+c)}{\Gamma(\alpha)}\exp[c\bar{\lambda}_1x]-c\bar{\lambda}_1x\xi(dx)\},$$

که در آن $\lambda_1-\gamma_1=\bar{\lambda}_1$. پس در حقیقت $I_{21}(\xi,\gamma_1,\alpha)=I_{21}(\xi,\alpha)$ به γ_1 وابسته نیست. به طریق مشابه، با فرض درستی توزیع وایبل، $I_{12}(\xi,\lambda_1,c)=I_{12}(\xi,c)$ مستقل از λ_1 است، زیرا

$$I_{12}(\xi,\lambda_1,c)=\min_{\gamma_1,\alpha}\int_X l[f_W(y,x,\lambda_1,c),f_G(y,x,\gamma_1,\alpha)]\xi(dx)=$$

$$\min_{\bar{\gamma}_1,\alpha}\{\log[\Gamma(\alpha)]+\log c-1.5772\frac{\alpha}{c}+\int_X\Gamma(\frac{c+1}{c})\exp[\bar{\gamma}_1x]-\alpha\bar{\gamma}_1x\xi(dx)\},$$

به‌طوری که $\bar{\gamma}_1=\lambda_1-\gamma_1$.

در این مثال، $\pi_1=0.4$ و $\pi_2=1-\pi_1=0.6$ به‌ترتیب بیانگر احتمالات پیشین برای چگالی‌های گاما و وایبل و $\theta_1=(\alpha,\gamma_1)$ و $\theta_2=(c,\lambda_1)$ به‌ترتیب متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های احتمالی پیشین p_1 و p_2 هستند. در حالات الف و ب از جدول ۲، توزیع‌های کناری پارامترهای α و c یکسان فرض شده‌اند، در حالی‌که توزیع‌های

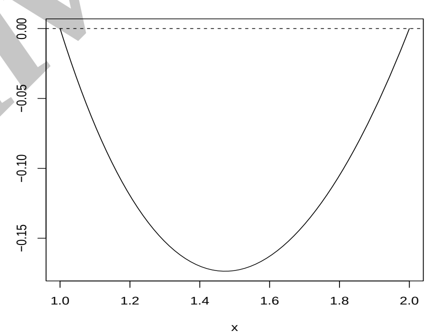
کناری $\gamma_۱$ و $\lambda_۱$ متفاوتند. با توجه به استقلال معیارهای KL-بهینگی از $\gamma_۱$ و $\lambda_۱$، طرح KL-بهینه بیزی برای هر دو حالت برابر بوده و عبارتست از

$$\xi^*_{BKL} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰.۶۱۷ & ۰.۳۸۳ \end{pmatrix}.$$

تابع $\psi^B(x, \xi^*_{BKL})$ برای این طرح نیز در شکل زیر نشان داده شده است. واضح است که این تابع مقدار ماکسیمم خود را در نقطه طرحی اختیار می‌کند.

جدول ۱: توزیع‌های احتمالی پیشین برای پارامترهای $\theta_۱ = (\alpha, \gamma_۱)$ و $\theta_۲ = (c, \lambda_۱)$ در مثال ۱

حالت الف						حالت ب					
α	$\gamma_۱$	$p_۱$	c	$\lambda_۱$	$p_۲$	α	$\gamma_۱$	$p_۱$	c	$\lambda_۱$	$p_۲$
۳	۱	۰.۱۲۵	۳	۱	۰.۱۲۵	۳	۱	۰.۲۵	۳	۱	۰.۲۵
۳	۲	۰.۱۲۵	۳	۲	۰.۱۲۵	۳	۴	۰.۲۵	۳	۴	۰.۲۵
۳	۳	۰.۱۲۵	۳	۳	۰.۱۲۵	۶	۱	۰.۲۵	۶	۱	۰.۲۵
۳	۴	۰.۱۲۵	۳	۴	۰.۱۲۵	۶	۴	۰.۲۵	۶	۴	۰.۲۵
۶	۱	۰.۱۲۵	۶	۱	۰.۱۲۵						
۶	۲	۰.۱۲۵	۶	۲	۰.۱۲۵						
۶	۳	۰.۱۲۵	۶	۳	۰.۱۲۵						
۶	۴	۰.۱۲۵	۶	۴	۰.۱۲۵						



شکل ۱.: تابع $\psi^B(x, \xi^*_{BKL})$ در مثال ۱

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی پرکاربردترین معیارهای بهینگی در زمینه تشخیص مدل پرداختیم. با مقایسه این معیارها به‌سادگی می‌توان دریافت که T-بهینگی حالت خاصی از KL-بهینگی خواهد بود. همچنین همان‌گونه که ذکر شد، بسیاری از مواقع در عمل قادر به فرض یک مدل خاص به‌عنوان مدل درست و نیز تعیین مقادیری معلوم برای پارامترهای مدل درست فرض شده نخواهیم بود. بنیبراین اگر اطلاعات پیشین در قالب توزیع‌های احتمالی در دسترس باشد، استفاده از معیارهای بهینگی بیزی سودمند به نظر می‌رسد.

مراجع

Atkinson, A.C. and Fedorov, V.V. (1975a), The design of experiments for discriminating between two rival models, *Biometrica*, **62**, 57-70.

Chernoff, H. (1953), Locally optimal design for estimating parameters. *Ann. Math. Statist.*, **24**, 586-602.

Kiefer, J. (1958), On the nonrandomized optimality and randomized non-optimality of symmetrical design. *Ann. Statist.*, **2**, 849-879.

Lopez-Fidalgo, J., Tommasi, C., Trandafir, P.C. (2007), An optimal experimental design criterion for discriminating between non-normal models. *J. R. Statist. Soc.*, **B 69**, 231-242.

Ponce de Leon, A.C. and Atkinson, A.C. (1991a), Optimal experimental design for discriminating between two rival models in the presence of prior information. *Biometrica*, **78**, 601-608.

Tommasi, C. and Lopez-Fidalgo, J. (2010), Bayesian optimum designs for discriminating between models with any distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 143-150.