# مقایسه آزمون معنی‌داری و بیزی در توزیع نمایی با پارامتر مزاحم

**خدیجه مهری - رحیم چینی پرداز**

اهواز، دانشگاه شهید چمران، گروه آمار

**چکیده:** در این مقاله مقایسه بین دو روش بیزی و کلاسیک در آزمون‌های فرض در نظر گرفته شده است. در حالت اول با استفاده از یک توزیع پیشین معین، احتمال پسین $H_0$ بدست آمده و با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. در حالت دوم بزرگترین کران پایین احتمال پسین $H_0$ تحت یک کلاس معقول از توزیع های پیشین با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. در مقاله حاضر، مقایسه این دو روش برای آزمون‌های نقطه‌ای در مقابل دوطرفه در توزیع نمایی با حضور پارامتر مزاحم انجام شده است. نشان داده شده است که حتی با حضور پارامتر مزاحم در مدل، این دو روش منجر به نتایج متفاوتی در استنباط آماری می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** مقدار احتمال، پارامتر مزاحم کران پایین احتمال پسین

## ۱ مقدمه

فرض کنید $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک نمونه تصادفی مشاهده شده از یک توزیع با تابع چگالی $f(x|\theta)$ باشند، که در آن $\theta$ عضوی نامعلوم از فضای پارامتر $\Theta$ می باشد. برای آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$، آماردانان بیزی معمولاً از احتمال پسین درست بودن فرض صفر یا عامل بیز[۱] به عنوان شواهدی علیه فرض صفر استفاده می‌کنند. فراوانی گراها[۲] معیار مقدار احتمال یا سطح معنی‌داری مشاهده شده را ارائه می‌دهند. مسئله مهمی که وجود دارد این است که آیا می‌توان بین این دو مکتب فکری مختلف در آزمون‌های آماری توافق ایجاد کرد یا خیر؟
لیندلی(۱۵) در مقاله مشهور خود("یک پارادوکس آماری") با تمرکز روی فرض صفر نقطه‌ای تحت توزیع نرمال و با انتخاب توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش، نشان داد که ممکن است با وجود مقدار احتمال بسیار کوچک، یک آزمون با روش بیزی منجر به احتمال پسینی می‌شود که با افزایش نمونه مقداری نزدیک به یک می‌گیرد.

---
۱ Bayes Factor
۲ Frequentist

جفریز(۱۷) همین نتیجه را برای توزیع نرمال با استفاده از توزیع پیشین مزدوج بدست آورد. از جمله آثار مهم در ارتباط با این پارادوکس می‌توان به ادوارد ـ لیندمن ـ ساویج (۱۴)، دگروت(۱۱)، ایتکن(۲)، گومز(۱۶) و تسائو(۱۸) اشاره نمود.
دیکی(۱۳) و برگر و سلک(۵) برای بدست آوردن معیار بیزی، به جای استفاده از یک توزیع پیشین مشخص، این مسئله را با معرفی کلاس‌هایی از توزیع‌های پیشین بی‌طرف[۳] و در نظرگرفتن کران پایین عامل بیز یا کران پایین احتمال پسین درست بودن فرض صفر روی این کلاس‌ها، مطرح کردند. و به نتیجه مشابهی رسیدند. این مسأله برای توزیع نرمال (برگر و سلک (۵))، توزیع دوجمله‌ای(برگر و دلامپادی (۴))، و پواسن (چینی پرداز(۸)) انجام شده است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به کاکس (۱۰)، دلامپادی(۱۲) و برناردو(۶) مراجعه کرد.
در بسیاری از موارد هنگام آزمون فرضیه‌های آماری علاوه بر پارامترهای موردآزمون، پارامترهای دیگری که مزاحم گفته می‌شوند نیز در مدل وجود دارند که اگرچه مجهول هستند ولی مورد آزمون قرار نمی‌گیرند. این مسئله برای آزمون میانگین جامعه نرمال و در حالتی‌که واریانس جامعه مجهول است توسط چینی پرداز و ابطحی (۱)، و برای مسائل آزمون یک‌طرفه تحت توزیع نمایی دوپارامتری توسط ین(۱۹) انجام شده است.
در این مقاله به مقایسه آزمون‌های معنی‌داری و بیز در توزیع نمایی با حضور پارامتر مزاحم پرداخته می‌شود. این مقاله در ۵ بخش به صورت زیر تنظیم شده است:
بخش دوم شامل فرمول بندی مسئله می‌باشد. بخش سوم شامل مقایسه دو روش با انتخاب یک توزیع پیشین معین (پارادوکس لیندلی و جفریز) می‌باشد. در بخش چهارم مقایسه بین دو روش با انتخاب کلاس‌های مختلفی از پیشین‌ها صورت می‌گیرد و بخش پنجم به نتیجه‌گیری از بخش های قبلی اختصاص یافته است.

## ۲ فرمول‌بندی مسئله

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از متغیرهای مستقل با تابع چگالی $f(\mathbf{x}|\theta)$ باشد که در آن $\theta$ پارامتر جامعه، به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعلق دارد. آزمون فرضیه $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$ در نظر بگیرید. توجه به چنین آزمون‌هایی از دو دیدگاه معنی‌داری و بیزی دارای اهمیت می‌باشد. در روش معنی‌داری از معیار مقدار احتمال استفاده می‌شود. برای این کار آماره مناسبی مانند $T(X)$ انتخاب می‌شود. انتخاب این آماره به صورت شهودی و معمولاً تابعی از آماره کافی می باشد. اگر $t(x)$ مقدار مشاهده شده آماره باشد، مقدار احتمال به صورت زیر

[۳] Impartial Priors

تعریف می‌شود:

$$P-value = P_{H_0}\left(T(X) \geq t(x)\right)$$

هرگاه توزیع آماری تحت درست بودن $H_0$ متقارن نباشد مقدار احتمال با اندکی تفاوت به صورت:

$$P-value = 2\min\left\{P_{\theta_0}(T(X)<t(x)), P_{\theta_0}(T(X)>t(x))\right\} \qquad (1)$$

بدست می‌آید.

برای انجام آزمون فوق به روش بیزی فرض می‌شود فرض‌های $H_0$ و $H_1$ به ترتیب دارای احتمال‌های اولیه $\pi_0$ و $1-\pi_0$ باشند. و احتمال پسین $H_0$ وقتی **x** مشاهده شده باشد، عبارتست از:

$$\begin{aligned} P(H_0|x) &= \left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{m_\pi(x)}{f(x|\theta_0)}\right]^{-1} \\ &= \left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{1}{B(x,\pi)}\right]^{-1} \end{aligned} \qquad (2)$$

که در آن توزیع حاشیه‌ای x به صورت

$$m_\pi(x) = \int_{\theta\neq\theta_0} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$$

و عامل بیز به صورت زیر خواهد بود

$$B(x,\pi) = \frac{f(x|\theta_0)}{m_\pi(x)}\ .$$

رابطه (۲) تا زمانی مفید خواهد بود که پارامتر مزاحم در مدل وجود نداشته باشد (برگر(۳)). در صورت وجود پارامتر مزاحم در مدل، احتمال پسین هنوز تابعی از پارامتر مزاحم خواهد بود. بنابرین برای حذف تأثیر پارامتر مزاحم باید برای این پارامتر نیز توزیع پیشین مناسبی انتخاب شود. بدست آوردن بدست آوردن احتمال پسین در این حالت برای مثالی که در ادامه بیان شده، آمده است.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی دو پارامتره $E(\mu,\theta)$ با تابع چگالی

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\ exp\left\{\frac{-1}{\theta}\ (x_i-\mu)\right\} \quad x>\mu\ ,\theta>0\ ,-\infty<\mu<\infty \qquad (3)$$

باشد. که در آن هر دو پارامتر مجهول می‌باشند. اگر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بردار مشاهدات باشد برای آزمون فرض $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$، با استفاده از روش معنی‌داری، با توجه به این که $T(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ آماره بسنده برای $\theta$ می‌باشد و مقادیر دوردست آن علیه فرض صفر هستند. در اینجا $X_{(1)}$ کوچکترین آماره مرتب به صورت $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ است. و با توجه به رابطه

$$2\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})}{\theta_0} \sim \chi^2_{2n-2}$$

و نامتقارن بودن توزیع کای ـ دو تحت فرض صفر، مقدار احتمال به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:[20]

$$P - value = 2 \min\{P_{H_0}(T(X) \geq t(x)), P_{H_0}(T(X) \leq t(x))\}$$
$$= \begin{cases} 2P_{H_0}(\chi^2_{2n-2} \geq \frac{2t(x)}{\theta_0}) & t(x) > \theta_0(n-1) \\ 2P_{H_0}(\chi^2_{2n-2} \leq \frac{2t(x)}{\theta_0}) & t(x) < \theta_0(n-1) \end{cases} \qquad (4)$$

که در آن $t(x) = \sum(x_i - x_{(1)})$ مقدار مشاهده شده آماره آزمون می‌باشد.
برای انجام آزمون فوق به روش بیزی فرض می‌شود، فرض های $H_0$ و $H_1$ به ترتیب دارای احتمال‌های اولیه $\pi_0$ و $1 - \pi_0$ باشند. با در نظر گرفتن توزیع پیشین ناآگاهی بخش برای $\mu$ تحت $H_0$ و $H_1$ به صورت

$$\pi(\mu|H_0) = \pi(\mu|H_1) = \pi^\star(\mu) = 1 \qquad (5)$$

احتمال پسین $H_0$ وقتی $x$ مشاهده شده است، عبارتست از:

$$P(H_0|x) = \left[1 + \frac{1 - \pi_0}{\pi_0} \times \frac{m_\pi(x|H_1)}{m_\pi(x|H_0)}\right]^{-1} \qquad (6)$$

که در آن

$$m_\pi(x|H_0) = \int_0^\infty L(\mu, \theta = \theta_0|x) \times \pi(\mu|H_0)\ d\mu \qquad (7)$$

$$m_\pi(x|H_1) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty L(\mu, \theta|x)\pi(\mu|H_1) \times \pi(\theta)\ d\mu\ d\theta \qquad (8)$$

## ۳ پارادوکس لیندلی و جفریز در توزیع نمایی با حضور پارامتر مزاحم

آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$ در نظر بگیرید. هرگاه مشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$، از توزیع $E(\mu, \theta)$ ($\theta$ نامعلوم ) در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$L(\mu, \theta_0|x) = (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right\} I_{(\mu,\infty)}(X_{(1)}) \qquad (9)$$

با در نظر گرفتن توزیع پیشین ناآگاهی بخش برای $\mu$ به صورت (۵) و با توجه به روابط (۶) ، (۷) و (۸) پارادوکس لیندلی و جفریز به شرح زیر بدست می‌آیند:
به پیروی از لیندلی (۱۵) توزیع پیشین به صورت $\pi(\theta) = 1$ در نظر گرفته می‌شود . بنابراین

$$\begin{aligned} m_\pi(x|H_0) &= \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta_0})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right\} d\mu \\ &= \frac{1}{n}(\frac{1}{\theta_0})^{n-1} exp\left\{\frac{1}{\theta_0}\ t(x)\right\} \qquad (10) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} m_\pi(x|H_1) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right\} d\mu d\theta \\ &= \int_0^\infty (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta}\ t(x)\right\} d\theta = \frac{\Gamma(n-1)}{n\ (t(x))^{-1}} \qquad (11) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$P_L(H_0|x) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{\theta_0^{n-1}\Gamma(n-1)exp\left\{\frac{1}{\theta_0}\ t(x)\right\}}{(t(x))^{n-1}}\right]^{-1} \qquad (12)$$

برای بررسی این مسئله از روش جفریز، باید از توزیع پیشین مزدوج استفاده شود. با توجه به اینکه یک توزیع پیشین مزدوج برای $\theta$ ، پیشین گاما معکوس می‌باشد. اگر توزیع پیشین $IG(\alpha, \frac{1}{\beta})$ که تابع چگالی آن به صورت

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} exp\left\{\frac{-1}{\beta\theta}\ \theta^{-(\alpha+1)}\right\} \quad \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0$$

است در نظر گرفته شود، بنابراین:

$$m_\pi(x|H_1) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta}\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right\} \times \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} exp\left\{\frac{-1}{\beta\,\theta}\ \theta^{-(\alpha+1)}\right\} = \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{n\Gamma(\alpha)\beta^\alpha[\frac{1}{\beta}+t(x)]^{n+\alpha-1}} \tag{۱۳}$$

با فرض اینکه توزیع پیشین دارای میانگین $\theta_0$ می‌باشد، یعنی $E_\pi(\theta) = \theta_0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{1}{(\alpha-1)\ \beta} = \theta_0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\theta_0(\alpha-1)} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری (۱۴) در رابطه (۱۳)، این رابطه به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$m_\pi(x|H_1) = \frac{\theta_0^\alpha(\alpha-1)^\alpha\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)[(\alpha-1)\theta_0+t(x)]^{n+\alpha-1}} \tag{۱۵}$$

در نهایت نیز باجایگذاری روابط (۱۰) و (۱۵) در رابطه (۶)، احتمال پسین به صورت زیر خواهد بود:

$$P_J(H_0|x) = \left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{(\alpha-1)^\alpha\Gamma(n+\alpha-1)exp\left\{\frac{1}{\theta_0}\ t(x)\right\}}{\Gamma(\alpha)[(\alpha-1)\theta_0+t(x)]^{n+\alpha-1}}\right]^{-1} \tag{۱۶}$$

جدول (۱) مقادیر مختلف احتمال پسین با روش لیندلی ($P_L(H_0|x)$) و احتمال پسین با روش جفریز ($P_J(H_0|x)$) را به ازای $\alpha = 2$، $\theta_0 = 2$ و $\pi_0 = \frac{1}{2}$ با افزایش نمونه نشان می‌دهد.
از جدول پیداست احتمال پسین فرض صفر برای هر دو روش با افزایش $n$ به سمت یک میل می‌کند؛ در حالی‌که مقدار احتمال ثابت می‌ماند. به عبارت دیگر، فرض $H_0$ که با مقدار احتمال معلوم به روش معنی‌داری رد شده است، از نقطه‌نظر بیزی قابل قبول است. به عنوان مثال، با مقدار احتمال ۰/۰۵ هرگاه تعداد نمونه به ۵۰۰ برسد، فرض $H_0$ دارای احتمالی بیش از $\frac{1}{2}$ است و یک آماردان منصف فرض $H_0$ را بر $H_1$ ترجیح خواهد داد.

# ۴ مقایسه آزمون معنی‌داری و بیز در کلاس توزیع‌های پیشین

## ۱.۴ بزرگترین کران پایین احتمال پسین $H_0$

برای بسیاری از آماردانان استفاده از یک توزیع پیشین معین حتی توزیع پیشین ناآگاهی بخش یک‌جانبه‌نگری نسبت به $H_0$ محسوب می‌شود. بنابراین برای مقایسه آزمون‌های معنی‌داری و بیز به جای توزیع پیشین معین مجموعه‌ای از توزیع‌های پیشین در نظر گرفته شده و سپس بزرگترین کران پایین احتمال پسین فرض صفر روی این مجموعه با مقدار احتمال مقایسه می‌شود. هرگاه پارامتر مزاحم در مدل وجود داشته باشد این کران پایین تحت تأثیر این پارامتر خواهد بود. یک راه‌حل برای رفع چنین مشکلی استفاده از یک توزیع پیشین روی پارامتر مزاحم برای حذف آن پارامتر از مدل می‌باشد. بنابراین کران بزرگترین پایین احتمال پسین فرض صفر به صورت زیر محاسبه می‌شود: فرض کنید $\pi_1(\theta)$ توزیع پیشین تحت فرض $H_1$، و پارامتر مزاحم $(\mu)$ تحت فرض $H_0$ دارای پیشین ناآگاهی‌بخشی به صورت (۵) باشد. اگر $G$ کلاس معقولی از توزیع‌های پیشین باشد، در آن صورت:

$$\begin{aligned}\underline{P}(H_0|x,G,\pi^\star) &= \inf_{\pi\in G} P(H_0|x,G,\pi^\star)\\ &= \left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{\sup_{\pi\in G} m_\pi(x|H_1)}{m_\pi(x|H_0)}\right]^{-1}\\ &= \left[1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\times\frac{1}{\underline{B}(x,G,\pi^\star)}\right]^{-1} \qquad (17)\end{aligned}$$

که در آن

$$\underline{B}(x,G,\pi^\star)=\frac{m_\pi(x|H_0)}{\sup_{\pi\in G} m_\pi(x|H_1)} \qquad (18)$$

$$\sup_{\pi\in G} m_\pi(x|H_1)=\sup_{\pi\in G}\int L(\mu,\theta|x)\times\pi(\theta)d\theta \qquad (19)$$

همچنین $m_\pi(x|H_0)$ و $m_\pi(x|H_1)$ از روابط (۷) و (۸) بدست می‌آیند.
پنج کلاس معقول از توزیع‌های پیشین برای $\theta$ عبارتند از:

$G_A$= {کلاس تمام توزیع‌های پیشین ممکن }

$G_C$= {کلاس توزیع‌های پیشین مزدوج با میانگین $\theta_0$ }

$G_{Me}$= {کلاس توزیع‌های پیشین با میانه $\theta_0$ }

$G_{MM}$= {کلاس توزیع‌های پیشین با میانه و نمای $\theta_0$ }

$G_{us}=$ {کلاس توزیع‌های پیشین تک نمایی و متقارن حول $\theta_0$ }
در همه حالت‌ها توزیع پارامتر مزاحم ($\mu$) به صورت (۵) و $\pi_0 = \frac{1}{2}$ فرض می‌شود.

### ۲.۴ کلاس تمام توزیع‌های پیشین ممکن

**قضیه ۱:** کران پایین احتمال پسین $H_0$ برای آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_0 : \theta \neq \theta_0$ هرگاه $\pi(\theta) \in G_A$، برابر است با:

$$\underline{P}(H_0|x, G_A, \pi^\star) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{f(t|\hat{\theta})}{f(t|\theta_0)}\right]^{-1} \qquad (۲۰)$$

که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکزیمم درستنمایی $\theta$ می باشد.
بنابراین احتمال پسین به صورت زیر خواهد بود:

$$\left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times (\frac{n\theta_0}{t(x)})^{n-1} \times exp\left\{-n + \frac{t(x)}{\theta_0}\right\}\right]^{-1} \qquad (۲۱)$$

**اثبات :** اثبات به صورت مستقیم و با استفاده از برآورد ماکسیمم درستنمایی $(\hat{\theta} = \frac{\sum_1^n (x_i - x_{(1)})}{n})$ بدست می‌آید.
در ستون سوم جدول (۲)، مقادیر $\underline{P}(H_0|x, G_A, \pi^*)$ به‌ازای مقادیر مختلف $n$ آورده‌شده است. با توجه به جدول فوق مشخص می‌شود که مقادیر کران پایین احتمال پسین برای $G_A$ بسیار بزرگتر از مقدار احتمال می‌باشند.
کلاس‌های منطقی از توزیع‌های پیشین نیز ممکن است با مشخص کردن نما و میانه آنها درنظر گرفته‌شوند. کلاس $G_{Me}$ تعریف شده در بخش (۱.۴) شامل تمام توزیع‌های پیشین با میانه $\theta_0$ می‌باشد. در واقع این کلاس توزیع‌های پیشینی را شامل می‌شود که نیمی از جرم توزیع پیشین را به فضای کمتر از $\theta_0$ و نیمی دیگر را به فضای بزرگتر از $\theta_0$ اختصاص می‌دهند. یعنی

$$G_{Me} = \left\{\pi : \int_0^{\theta_0} \pi(\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\infty} \pi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\right\} \qquad (۲۲)$$

کلاس $G_{MM}$ محدودتر از کلاس $G_{Me}$، می‌باشد که در آن $\pi(\theta)$، روی فواصل $(0, \theta_0)$ و $(\theta_0, \infty)$ به ترتیب غیر کاهشی و غیر افزایشی می‌باشد. با توجه به اینکه $G_{MM} \subset G_{Me}$ می‌باشد انتظار می‌رود که $\underline{P}(H_0|x, G_{Me}, \pi^\star) \leq \underline{P}(H_0|x, G_{MM}, \pi^\star)$ باشد. دو بخش بعدی شامل محاسبه بزرگترین کران پایین احتمال پسین در این دو کلاس می‌باشد.

### ۳.۴ کلاس توزیع‌های پیشین با میانه $\theta_\circ$

**قضیه ۲:** کران پایین احتمال پسین $H_\circ$ برای آزمون $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ در مقابل $H_\circ : \theta \neq \theta_\circ$ هرگاه $\pi(\theta) \in G_{Me}$ باشد، برابر است با:

$$\underline{P}(H_\circ|x, G_{Me}, \pi^\star) = \left[ 1 + \frac{1-\pi_\circ}{\pi_\circ} \times \frac{1}{2} \times \left\{ 1 + (\frac{n\sigma_\circ}{t(x)})^{n-1} exp\left\{ \frac{t}{\theta_\circ} - n \right\} \right\} \right]^{-1} \quad (۲۳)$$

**اثبات:** فرض کنید $G_{Me}$ مجموعه‌ای از چگالی‌های روی فاصله $(\circ,\infty)$ با میانه $\theta_\circ$ باشد. پس با توجه به رابطه (۱۹):

$$\sup\ m_\pi(x|H_1) = \sup \left\{ \int_\circ^{\theta_\circ} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{ \frac{-1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right\} \times \pi(\mu|H_1) \right.$$
$$\left. \pi_1(\theta) d\mu d\theta + \int_{\theta_\circ}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{ \frac{-1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right\} \times \pi(\mu|H_1)\pi_2(\theta) d\mu d\theta \right\}$$
$$= \sup_{\pi_1} \left\{ \int_\circ^{\theta_\circ} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{ \frac{-1}{\theta}\ t(x) \right\} \times \pi_1(\theta) d\theta \right\} + \sup_{\pi_2} \left\{ \int_{\theta_\circ}^{\infty} (\frac{1}{\theta})^n \right.$$
$$\left. \times exp\left\{ \frac{-1}{\theta}\ t(x) \right\} \times \pi_2(\theta) d\theta \right\} \quad (۲۴)$$

که در آن $\pi_1$ و $\pi_2$ به ترتیب روی $(\circ, \theta_\circ)$ و $(\theta_\circ, \infty)$ غیرمنفی می باشند. فرض کنید:
**الف:** $\hat{\theta} < \theta_\circ$. پس

$$\sup_{\pi_1} \left\{ \int_\circ^{\theta_\circ} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{ \frac{-1}{\theta}\ t(x) \right\} \pi_1(\theta) d\theta \right\} = \frac{1}{2} (\frac{n}{t(x)})^{n-1}\ e^{-n}$$

زیرا $\hat{\theta}$ که تابع را حداکثر می‌کند در فاصله $[\circ, \theta_\circ)$ قرار دارد. از طرفی چون تابع $(\frac{1}{\theta_\circ})^n \exp\left\{ \frac{-1}{\theta_\circ}\ t(x) \right\}$ در فاصله $(\theta_\circ, \infty)$ نزولی است، پس:

$$\sup_{\pi_2} \left\{ \int_{\theta_\circ}^{\infty} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{ \frac{-1}{\theta_\circ}\ t(x) \right\} \right\} = \frac{1}{2} (\frac{1}{\theta_\circ})^n\ exp\left\{ \frac{-1}{\theta_\circ}\ t(x) \right\}$$

با جایگذاری روابط (۲۵) و (۲۶) در رابطه (۲۴)، و جایگذاری روابط (۲۴) و (۱۰) در رابطه (۱۷)، رابطه (۲۳) بدست می آید.

برای حالت دوم نیز، یعنی $\theta_\circ\ < \hat{\theta}$ نتیجه‌ای مشابه حالت اول حاصل می‌شود.
با توجه به ستون چهارم جدول (۲) اختلاف بین مقدار احتمال و $\underline{P}(H_\circ|x, G_{Me}, \pi^\star)$ به وضوح مشخص است. این اختلاف نسبت به کلاس قبل $(G_A)$ بیشتر شده است. که با توجه به محدودتر بودن این کلاس نسبت به کلاس $G_A$ منطقی به نظر می‌رسد.

### ۴.۴ کلاس توزیع‌های پیشین با میانه و نمای $\theta_0$

**قضیه۳:** کران پایین احتمال پسین $H_0$ برای آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_0: \theta \neq \theta_0$ هرگاه $\pi(\theta) \in G_{MM}$ باشد، برای دو حالت $\hat{\theta} < \theta_0$ و $\hat{\theta} > \theta_0$ به ترتیب برابر است با:

$$\underline{P}(H_0|x, G_{MM}, \pi^\star) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{1}{2} \times \left\{1 + \left\{\sup_{0<k<\theta_0} \frac{1}{k}\int_{\theta_0-k}^{\theta_0} (\frac{\theta_0}{\theta})^{n-1} \times exp\left\{t(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta})\right\}\right\}\right\}\right]^{-1} \quad \hat{\theta} < \theta_0 \quad (۲۵)$$

$$\underline{P}(H_0|x, G_{MM}, \pi^\star) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{1}{2} \times \left\{1 + \left\{\sup_{k>0} \frac{1}{k}\int_{\theta_0}^{\theta_0+k} (\frac{\theta_0}{\theta})^{n-1} \times exp\left\{t(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta})\right\}\right\}\right\}\right]^{-1} \quad \hat{\theta} > \theta_0 \quad (۲۶)$$

که در آن $\hat{\theta} = \frac{t(x)}{n}$.

**اثبات:** فرض کنید $\hat{\theta} < \theta_0$ باشد. پس

$$\sup\ m_\pi(x|H_1) = \sup_{\pi_1}\int_0^{\theta_0}\int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n \times exp\left\{\frac{-1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right\} \times \pi_1(\theta)d\mu d\theta + \sup_{\pi_2}\int_{\theta_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_{(1)}}(\frac{1}{\theta})^n \times exp\left\{\frac{-1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right\}\pi_2(\theta)d\mu\theta \quad (۲۷)$$

که در آن $\pi_1$ و $\pi_2$ هر دو غیر منفی و روی فواصل $(0, \theta_0)$ و $(\theta_0, \infty)$، به ترتیب غیرکاهشی و غیرافزایشی می‌باشند. همچنین $\int_0^{\theta_0}\pi_1(\theta)d\theta = \frac{1}{2} = \int_{\theta_0}^{\infty}\pi_2(\theta)d\theta$. بنابراین

$$\sup\ m_\pi(x|H_1) = \sup_{\pi_1}\int_0^{\theta_0} (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta_0}\ t(x)\right\}\pi_1(\theta)d\theta + \frac{1}{2}(\frac{1}{\theta_0})^{n-1}exp\left\{\frac{-1}{\theta_0}\ t(x)\right\} \quad (۲۸)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\sup\ m_\pi(x|H_1) = \sup_{\pi_3}\int_0^{2\theta_0} g(t(x), n, \theta)\pi_3(\theta)d\theta + \frac{1}{2}(\frac{1}{\theta_0})^{n-1}exp\left\{\frac{-1}{\theta_0}\ t(x)\right\} \quad (۲۹)$$

که در آن

$$g(t(x),n,\theta)=\begin{cases}(\frac{1}{\theta_0})^{n-1}exp\left\{\frac{-1}{\theta_0}\,t(x)\right\} & \theta<\theta_0\\ (\frac{1}{2\theta_0-\theta})^{n-1}exp\left\{\frac{-1}{2\theta_0-2}\,t(x)\right\} & \theta>\theta_0\end{cases} \tag{۳۰}$$

و

$$\pi_3(\theta)=\frac{1}{2}\pi_1(\theta)I_{(0,\,\theta_0)}(\theta)+\frac{1}{2}\pi_1(2\theta_0-\theta)I_{(\theta_0,2\theta_0)}(\theta) \tag{۳۱}$$

که $\pi_3$ غیر منفی، تک مدی و متقارن حول $\theta_0$ می‌باشد. و

$$\int_0^{2\theta_0}\pi_3(\theta)d\theta=\frac{1}{2}$$

حال چون $\pi_3(\theta)$ تک مدی و متقارن حول $\theta_0$ می‌باشد، بنابراین ترکیبی از توزیع‌های یکنواخت $U(\theta_0-k,\theta_0+k)$ برای $k>0$ است . و

$$\begin{aligned}\sup_{\pi_3}\int_0^{2\theta_0}g(t(x),n,\theta)\pi_3(\theta)d\theta&=\frac{1}{2}\sup_{0\le k\le\theta_0}\frac{1}{2k}\int_{\theta_0-k}^{\theta_0+k}g(t(x),n,\theta)d\theta\\&=\frac{1}{2}\sup_{0<k<\theta_0}\frac{1}{k}\int_{\theta_0-k}^{\theta_0}(\frac{1}{\theta})^n e^{\frac{-1}{\theta}\,t(x)}d\theta\end{aligned} \tag{۳۲}$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (۳۴) در (۳۱) و جایگذاری رابطه (۳۱) و (۱۰) در رابطه (۱۷)، رابطه (۲۷) حاصل می‌شود. برای حالت $\hat{\theta}>\theta_0$ نیز نتیجه‌ای مشابه حالت اول، با اندکی تغییر حاصل می‌شود.
در ستون پنجم جدول (۲) مقادیر $\underline{P}(H_0|x,G_{MM},\pi^\star)$ آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در این کلاس از توزیع‌های پیشین نیز همانند دو کلاس قبلی مقادیر $\underline{P}(H_0|x,G_{MM},\pi^\star)$ از مقدار احتمال بزرگتر است.
از آنجا که $\theta$ حول $\theta_0$ متقارن نمی باشد برای محاسبه کران پایین احتمال پسین روی کلاس $G_{us}$ باید یک تبدیل مناسب روی $\theta$ صورت گیرد. تبدیل مناسب در اینجا به صورت $u(\theta)=\ln\frac{\theta}{\theta_0}$ با برد $R$، است. فرض کنید $h$ یک تابع چگالی تک نمایی و متقارن از $u$ باشد به‌طوریکه

$$\int_{-\infty}^0 h(u)du=\frac{1}{2}=\int_0^\infty h(u)du$$

بنابراین توزیع پیشین $\theta$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\pi(\theta)=h(u(\theta))\frac{d(u(\theta))}{d\theta} \tag{۳۳}$$

همچنین $\theta_0$ میانه $\pi$ می‌باشد. چون

$$\int_0^{\theta_0} \pi(\theta)d\theta = \int_0^{\theta_0} h(u(\theta))\frac{d(u(\theta))}{d\theta}d\theta = \int_{-\infty}^{0} h(u)du = \frac{1}{2}$$

بخش بعدی به محاسبه کران پایین احتمال پسین روی این کلاس اختصاص یافته‌است.

## ۵.۴ کلاس توزیع‌های پیشین متقارن و تک مدی حول $\theta_0$

**قضیه۴:** کران پایین احتمال پسین $H_0$ برای آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_0 : \theta \neq \theta_0$ هرگاه $\pi(\theta) \in G_{us}$ باشد، برابر است با:

$$\underline{P}(H_0|x, G_{us}, \pi^\star) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{1}{2} \times \left\{\sup_{k>0} \frac{1}{k}\int_{-k}^{k} exp\left\{-nu + \frac{t}{\theta_0}(1-e^{-u})\right\} du\right\}\right]^{-1} \quad (۳۴)$$

**اثبات:** فرض کنید $H$ کلاسی از تمام چگالی‌های متقارن و تک نمایی حول صفر باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in G_{us}} m_\pi(x|H_1) &= \sup_{\pi\in G_{us}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{x_{(1)}} (\frac{1}{\theta})^n \times exp\left\{\frac{-1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right\} \\ &\times\pi(\theta)\, d\mu\, d\theta = \sup_{h\in H}\int_0^\infty (\frac{1}{\theta})^n exp\left\{\frac{-1}{\theta}t(x)\right\} \times h(u(\theta))\frac{d(u(\theta))}{d\theta}\, d\theta \\ &= \sup_{h\in G_{us}}\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\theta(u)})^n \times exp\left\{\frac{-1}{\theta(u)}\, t(x)\right\} h(u)du \qquad (۳۵)\end{aligned}$$

که در آن

$$u(\theta) = ln\frac{\theta}{\theta_0}$$

حال چون $\pi(\theta)$ تک مدی و متقارن حول صفر می‌باشد، بنابراین ترکیبی از توزیع‌های یکنواخت $U(k,k)$ برای $k > 0$ است . پس

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in G_{us}} m_\pi(x|H_1) &= \sup_{k>0}\frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}(\frac{1}{\theta(u)})^n \times exp\left\{\frac{1}{\theta(u)}t(x)\right\} du \\ &= \sup_{k>0}\frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}(\frac{1}{\theta_0 exp\{u\}})^n du \qquad (۳۶)\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۳۹) و (۱۰) در رابطه (۱۷)، رابطه (۳۶) بدست می آید.
ستون ششم جدول (۲)، مقادیر بزرگترین کران پایین احتمال پسین روی کلاس $G_{us}$ را نشان می‌دهد. همانطور که از جدول پیداست در این کلاس نیز اختلاف بین دو روش آزمون وجود دارد.

## ۶.۴ کلاس توزیع‌های پیشین مزدوج با میانگین $\theta_\circ$

برای توزیع نمایی به فرم (۱) یک کلاس توزیع پیشین مزدوج می‌تواند به صورت زیر باشد:

$G_C$= {تمام چگالی‌های گاما ـ معکوس با میانگین $\theta_\circ$ }

که تابع چگالی گاما ـ معکوس $IG(\alpha, \frac{1}{\beta})$ در بخش (۳) آمده است.

**قضیه ۵:** کران پایین احتمال پسین $H_\circ$ برای آزمون $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ در مقابل $H_\circ : \theta \neq \theta_\circ$ هرگاه $\pi(\theta) \in G_C$، برابر است با:

$$\underline{P}(H_\circ|x, G_C, \pi^\star) = \left[ 1 + \frac{1-\pi_\circ}{\pi_\circ} \times exp\left\{\frac{t}{\theta_\circ}\right\} \times \sup_{0<\lambda<1} \left\{ \frac{\Gamma(n+\frac{1}{\lambda}-1)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \times \frac{(\frac{1}{\lambda}-1)^{\frac{1}{\lambda}}}{\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{t}{\theta_\circ}-1\right]^{n+\frac{1}{t}-1}} \right\} \right]^{-1} \tag{۳۷}$$

**اثبات :** با توجه به اینکه فرض $E_\pi(\theta) = \theta_\circ$، یعنی $\theta_\circ = \frac{1}{\beta(\alpha-1)}$ معادل است با $\alpha = \frac{c}{\theta_\circ}$ و $\beta = \frac{1}{c-\theta_\circ}$ برای $c > 0$. رابطه (۱۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$m_\pi(x|H_1) = \frac{(c-\theta_\circ)^\alpha \Gamma(n+\frac{c}{\theta_\circ}-1)}{n\ \Gamma(\frac{c}{\theta_\circ})\ [c-\theta_\circ+t(x)]^{n+\frac{c}{\theta_\circ}-1}} \tag{۳۸}$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۴۰) و (۱۰) در رابطه (۱۷)، احتمال پسین به صورت زیر بدست می آید:

$$\underline{P}(H_\circ|x, G_C, \pi^\star) = \left[ 1 + \frac{1-\pi_\circ}{\pi_\circ} \times exp\left\{\frac{t}{\theta_\circ}\right\} \times \sup_{c>\theta_\circ} \frac{\Gamma(n+\frac{c}{\theta_\circ}-1)}{\Gamma(\frac{c}{\theta_\circ})} \times \frac{(\frac{c}{\theta_\circ}-1)^{(\frac{c}{\theta_\circ})}}{\left[\frac{c}{\theta_\circ}+\frac{t}{\theta_\circ}-1\right]^{n+\frac{c}{\theta_\circ}-1}} \right]^{-1} \tag{۳۹}$$

که این رابطه معادل با رابطه (۳۹)($\lambda = \frac{\theta_\circ}{c}$) می باشد.
ستون هفتم جدول (۲)، مقادیر بزرگترین کران پایین احتمال پسین روی کلاس $G_c$ را نشان می‌دهد. مشابه کلاس‌های دیگر در این کلاس نیز بین دو روش آزمون اختلاف وجود دارد. البته این اختلاف در این کلاس نسبت به سایر کلاس‌ها بیشتر می باشد. و این به دلیل محدودیت بیشتری است که روی این کلاس گذاشته شده است.

جدول (۱): افزایش احتمال پسین به همراه افزایش نمونه با $\pi_\circ = \frac{1}{2}$ و
$P - value = ۰/۱, ۰/۰۵, ۰/۰۱$

| $p - value = ۰/۱$ | | $p - value = ۰/۰۵$ | | $p - value = ۰/۰۱$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_J(H_\circ \vert x)$ | $P_L(H_\circ \vert x)$ | $P_J(H_\circ \vert x)$ | $P_L(H_\circ \vert x)$ | $P_J(H_\circ \vert x)$ | $P_L(H_\circ \vert x)$ | $n$ |
| ۰/۲۷۱۳ | ۰/۱۲۸۷ | ۰/۱۸۹۳ | ۰/۰۷۳۳ | /۰۸۴۲ | ۰/۰۱۶۹ | ۵ |
| ۰/۳۳۹۸ | ۰/۲۰۰۸ | ۰/۲۲۰۰ | ۰/۱۲۰۵ | ۰/۰۶۷۰ | ۰/۰۳۰۳ | ۱۰ |
| ۰/۴۴۷۰ | ۰/۲۸۱۳ | ۰/۳۰۲۳ | ۰/۱۷۸۰ | ۰/۰۸۹۹ | ۰/۰۴۸۴ | ۲۰ |
| ۰/۵۹۵۹ | ۰/۳۹۹۱ | ۰/۴۴۳۴ | ۰/۲۷۰۴ | ۰/۱۵۳۰ | ۰/۰۸۱۶ | ۵۰ |
| ۰/۶۹۳۷ | ۰/۴۹۲۰ | ۰/۵۵۲۸ | ۰/۳۵۱۹ | ۰/۲۲۲۱ | ۰/۱۱۶۳ | ۱۰۰ |
| ۰/۷۷۳۰ | ۰/۵۸۳۰ | ۰/۶۵۲۴ | ۰/۴۴۰۱ | ۰/۳۰۵۷ | ۰/۱۶۰۷ | ۲۰۰ |
| ۰/۸۵۰۵ | ۰/۶۹۲۰ | ۰/۷۵۹۹ | ۰/۵۵۹۰ | ۰/۴۳۰۷ | ۰/۲۳۷۰ | ۵۰۰ |
| ۰/۸۹۲۲ | ۰/۷۶۲۱ | ۰/۸۲۲۴ | ۰/۶۴۴۰ | ۰/۵۲۷۶ | ۰/۳۰۷۸ | ۱۰۰۰ |
| ۰/۹۶۴۸ | ۰/۹۱۱۱ | ۰/۹۳۹۳ | ۰/۸۵۳۱ | ۰/۷۹۱۶ | ۰/۵۸۹۰ | ۱۰۰۰۰ |

جدول (۲): مقایسه $P$ ـ مقدار (۰/۰۵) و بزرگترین کران پایین احتمال پسین $H_\circ$ با $\pi_\circ = \frac{1}{2}$ و
$\theta_\circ = ۲$

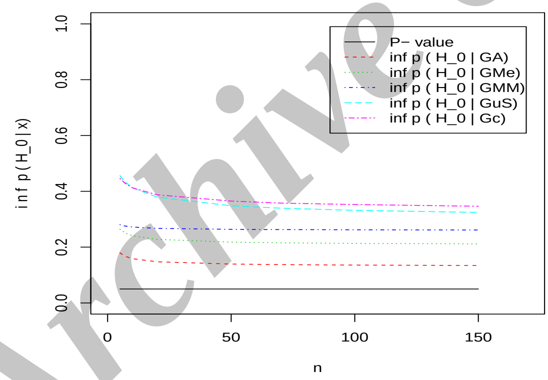
| $\underline{P}(H_\circ \vert x, G_C)$ | $\underline{P}(H_\circ \vert x, G_{us})$ | $\underline{P}(H_\circ \vert x, G_{MM})$ | $\underline{P}(H_\circ \vert x, G_{Me})$ | $\underline{P}(H_\circ \vert x, G_A)$ | $t$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۴۴۵۷ | ۰/۴۵۶۳ | ۰/۲۸۰۶ | ۰/۲۶۴۲ | ۰/۱۷۹۵ | ۱۷/۵۳ | ۵ |
| ۰/۴۲۹۳ | ۰/۴۳۳۸ | ۰/۲۷۵۷ | ۰/۲۵۱۰ | ۰/۱۶۷۵ | ۲۳/۳۴ | ۷ |
| ۰/۴۱۲۷ | ۰/۴۱۲۸ | ۰/۲۷۲۰ | ۰/۲۴۰۹ | ۰/۱۵۸۷ | ۳۱/۵۳ | ۱۰ |
| ۰/۳۸۷۶ | ۰/۳۷۹۴ | ۰/۲۶۷۲ | ۰/۲۲۷۸ | ۰/۱۴۷۵ | ۵۶/۹۰ | ۲۰ |
| ۰/۳۶۵۰ | ۰/۳۴۸۲ | ۰/۲۶۳۸ | ۰/۲۱۸۰ | ۰/۱۳۹۴ | ۱۲۷/۲۸ | ۵۰ |
| ۰/۳۵۷۸ | ۰/۳۳۹۶ | ۰/۲۶۲۹ | ۰/۲۱۵۶ | ۰/۱۳۷۴ | ۱۷۲/۴۱ | ۷۰ |
| ۰/۳۵۲۷ | ۰/۳۳۱۸ | ۰/۲۶۲۱ | ۰/۲۱۳۴ | ۰/۱۳۵۷ | ۲۳۸/۸۶ | ۱۰۰ |
| ۰/۳۴۶۵ | ۰/۳۲۴۴ | ۰/۲۶۱۴ | ۰/۲۱۱۶ | ۰/۱۳۴۲ | ۳۴۷/۷۱ | ۱۵۰ |

## بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که گفته شد بین دو روش آزمون کردن فرض‌های دو طرفه کلاسیک و بیزی تعارض وجود دارد. این تعارض به دو صورت ممکن رخ می‌هد. یکی اینکه برای مقداراحتمال ثابت با افزایش تعداد نمونه احتمال پسین درست بودن $H_\circ$ افزایش‌می‌یابد به گونه‌ای که ممکن است یک فرض آماری که با شیوه‌ی معنی‌داری رد شده است با

افزایش نمونه دارای احتمال بسیار بالا و حتی نزدیک به یک شود. دوم اینکه حتی اگر تعداد نمونه ثابت و به جای مقایسه مقدار احتمال با احتمال پسین $H_0$، مقدار احتمال با کران پایین احتمال پسین $H_0$ هرگاه توزیع پیشین از کلاس معقولی از توزیع‌ها به دست آمده باشد هنوز احتمال پسین فرض $H_0$ از مقدار احتمال بیشتر است. باید توجه کرد چنین نتیجه‌ای برای آزمون‌های یکطرفه اتفاق نمی‌افتد(کسلا و برگر(۷)، برگر(۳) و چینی‌پرداز(۸)). یک نتیجه حاصل از چنین تحقیقاتی این است که آماردان برای فرض های نقطه‌ای درمقابل دوطرفه به‌هنگام استفاده از آزمون‌های معنی‌داری درردکردن $H_0$ با احتیاط بیشتری برخورد کند. به عبارت دیگر می‌توان گفت مقدار احتمال برای چنین آمون‌هایی ممکن است گمراه کننده باشد. همان‌طور که از جداول (۱) و (۲) و شکل (۱) پیداست، نتایج این مقاله این تعارض را به این صورت تشدید می‌کند، که هرگاه یک پارامتر مزاحم[۴] در توزیع جامعه وجود داشته باشد این تعارض در توزیع نمایی باقی می‌ماند.

باید یادآوری کرد که مقایسه مقدار احتمال و احتمال پسین فرض $H_0$ تنها در توزیع نرمال (ابطحی و چینی‌پرداز(۱)) و توزیع نمایی نشان داده شده است. بررسی این مسئله برای توزیع‌های دیگر و یا کلاس توزیع‌های دیگر تحقیقات بیشتری را طلب می‌کند. از طرف دیگر چنین مقایسه‌ای برای زمانی که به جای یک پارامتر یک بردار از پارامترهای مزاحم وجود دارد مسأله‌ای ای باز است.




شکل ۱.: مقایسه کران پایین احتمال پسین فرض صفر در حضور پارامتر مزاحم به ازای مقادیر مختلف $n$

[۴] Nuisance Parameter

## مراجع

چینی پرداز، ر، و ابطحی، آ، مقایسه کران پایین احتمال پسین و مقدار احتمال در حضور پارامتر مزاحم، اندیشه آماری ، اندیشه آماری، شماره اول، سال هفتم، ۱۳۸۱، صفحات ۳-۱۰.

Aitkin, M. (1991), Posterior Bayes factors (with discussion), *J .Roy .Stat. Soc. Ser. B*, 53:111-142.

Berger, J. O. (1985), Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag.

Berger, J.O. and Delampady, M. (1987), Testing precise hypotheses (with discussion), *Stat.Sci.*, 2:317-352.

Berger, J . O. and Sellke, T. (1987), Testing a point null hypotheses: the irreconcilability of P value and evidence, *J. Am. Stat. Assoc.*, 82:112-122.

Bernardo, J. M. (1980), A Bayesian analysis of classical hypothesis testing, In Bayesian statistics(J. M. Bernardo, M. H. Degroot, D. V. lindley and A. F. M. smith,eds) 605-618. University Press Valencia.

Casella, G and Berger, R. L. (1987), Reconciling Bayesian and Frequentist Evidence in the One-Sided Testing Problem, *J. Am. Stat. Assoc.*, 82: 106-111.

Chinipardaz, R. (2003), The Discrepancy of P-values and Posterior Probability in Poisson Distribution, *Pak. J. Stat.*, 19:301-313.

Chinipardaz, R. and Noorbaloochi, S., (2003), The reconcilability of P-values and posterior probability in nonregular distributions, *Far east J .Theo. Stat.*, 10:112-122.

Cox, D. R. (1977), The role of significance tests. (with discussion), *Scand. J. Stat.*, 4:49-70.

DeGroot, M. H. (1982), Lindley's paradox: comment, *J.Am. Stat. Assoc.*, 378:336-339.

Delampady, M. (1989), Lower bounds on bayes factors for interval null hypotheses, *J. Am. Stat. Assoc.*, 84:120-124.

Dicky, J. M. (1977), Is the tail ara useful as an approximate Bayes factor? *J. Am. Stat. Assoc.*, 72:138-142.

Edvards, W., Lindma, H. and Savage, L. J., (1963), Bayesian statistical inference for psychological research, *Psycholo. Rv.*, 70:193-242.

Lindley, D. V. (1957), A statistical paradox , Biometrika, 44-187-192.

Gomez - villegas, M. A, Main, P. Sanz, L. (2002), A suitable Bayesian approach in tsting point null hypothesis: some example revisited, *Comm. Stat. Theo.Meth.*, 31:201-217.

Jeffreys, H. (1961), Theory of probability, 3rd ed. London: Oxford University Press.

Tsao, C. A. (2006), A not on Lindley's paradox, *Test* 1:125-139.

Yin, Y. (2011), Generalized P-values and Bayesian evidence in the One-sided testing problems under exponential distributions, *Stat. Neerlandica*, 65:319-336.

Williamson, P. P. (2004), Comparison of testing procedures utilizing P-values and Bayes factors in some common situations, *J. Stat. Comm. Sim.*, 74:833-850.