معرفی روشی جدید برای تشخیص هم ارزی

هاله نکویی - هوشنگ طالبی[۱]

[۱] گروه آمار، دانشگاه اصفهان

چکیده: دو طرح با تعداد عامل‌ها، اجراها و سطوح یکسان را هم ارز گوییم هرگاه طرحی با تغییر در نام عوامل، مرتبه اجرای ترکیبات تیماری و یا تغییر در سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به دست آید. طرح‌های هم‌ارز دارای برخی ویژگی‌های آماری یکسانی می‌باشند. ویژگی‌های یکسان طرح های هم ارز شناسایی طرح های هم ارز را ضروری می سازد. از این رو شرط های لازم و کافی متفاوتی برای تشخیص طرح های هم ارز معرفی شده است. اما این روش ها با وجود تعیین صد در صدی طرح های هم ارز در زمان بسیار زیادی اجرا می شوند. بنابراین معرفی شرط های لازم که در کوتاه ترین زمان ممکن طرح های غیر هم ارز بیشتری را شناسایی کند به شدت احساس می‌شود. در این مقاله به معرفی شرط لازم جدیدی برای تشخیص هم ارزی می‌پردازیم. این روش به علت روند محاسباتی کوتاه یکی از سریع ترین روش ها در تشخیص عدم هم‌ارزی است و به طور نسبی از قابلیت تشخیص بالایی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: تشخیص عدم هم ارزی، طرح های عاملی دو سطحی، شرط های لازم، شرط های لازم و کافی

۱ مقدمه

در طرح آزمایش ها، آزمایشگر این اختیار را دارد که به صورت کاملا تصادفی مرتبه اجرای ترکیبات تیماری و یا موقعیت عامل ها را تغییر دهد. دو طرح با تعداد عامل ها و سطوح یکسان، هم ارز هستند اگر یک طرح با نام گذاری مجدد عامل ها، جایگشت در مرتبه اجرای ترکیبات تیماری و یا برچسب گذاری مجدد سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به دست آید. طرح های هم ارز ویژگی های آماری یکسانی از جمله قابلیت برآورد اثرات، برازش مدل و تشخیص مدل صحیح از میان مدلهای رقیب را دارا می‌باشند. ویژگی‌های یکسان طرح های هم ارز تشخیص این طرح ها را ضروری می سازند. با توجه به ضرورت تشخیص طرح های هم ارز، نیاز به روش هایی که این طرح‌ها را شناسایی کنند، احساس می شود.

Archive of SID

www.SID.ir

محققان زیادی در سال های گذشته به دنبال شرط های لازم و کافی، برای تشخیص هم ارزی دو طرح بودند. در این میان کلارک و دین (۲۰۰۱)، چنگ و یه (۲۰۰۴)، و در راستای تحقیقات کلارک و دین و کوتاه کردن روش آن ها، کاتسونیس و دین(۲۰۰۸) در حالت کلی توانسته اند سه شرط لازم و کافی برای تشخیص هم ارزی دو طرح ارائه دهند.

علیرغم اینکه شرط های لازم و کافی با روش های کوتاه‌تری به جستجوی سطرها، ستون ها و علامت سطوح درون هر ستون می پردازند، همچنان تشخیص هم ارزی دو طرح بسیار زمان بر است. از این رو، استفاده از شرط های لازمی که توانایی تشخیص و جداسازی طرح های هم ارز را تا حد امکان بیشینه سازد و بتواند زمان محاسباتی را کمینه نماید، ضروری است. توجه شود که شرط های لازم تنها عدم هم ارزی دو طرح را تشخیص می دهند. در این مقاله با ارائه روشی جدید برای تشخیص غیر هم ارزی دو طرح، سعی شده است به هدف شناسایی حداکثری در زمان کمینه به صورت همزمان دست یابیم.

بخش های این مقاله به این ترتیب تنظیم شده اند که در بخش دوم روشی جدید برای تشخیص عدم هم ارزی را معرفی کرده و ثابت می کنیم این روش یک شرط لازم در تعیین طرح های غیر هم ارز است. در پایان این بخش، با استفاده از شرط لازم اثبات شده، کاربرد عملی و محاسباتی روش مذکور را در تشخیص عدم هم ارزی طرح ها بیان می کنیم. در بخش سوم، به مقایسه روش جدیدمعرفی شده و روش های قبلی پرداخته و نشان می دهیم روش جدید، علاوه بر اینکه قادر به تشخیص عدم هم ارزی طرح هایی است که روش های موجود قبلی آن ها را جدا نمی ساختند بلکه با انجام محاسبات در زمان کوتاه تری به نتیجه مطلوب خواهیم رسید.

۲ معرفی روش جدید در تشخیص غیر هم ارزی

در این بخش یک روش جدید برای تشخیص غیر هم ارزی دو طرح ارائه می شود. ابتدا به معرفی معیار جدید برای تشخیص غیر هم ارزی دو طرح می پردازیم و ثابت می‌کنیم این معیار یک شرط برای تشخیص غیر هم ارزی است. قضیه این بخش موجب خواهد شد روند محاسباتی تعیین عدم هم‌ارزی کوتاه تر و سرعت تشخیص افزایش یابد.

طرح D با N اجرا و k عامل دو سطحی با ماتریس طرح $N \times k$ ، T_D را در نظر بگیرید. سطرهای ماتریس طرح D را به صورت $\{x_{l1}, x_{12}, ..., x_{lk}\}$ ، $l = 1, 2, ..., N$ نمایش داده به طوری که x_{li} ها، $i = 1, 2, ..., k$ با مقادیر ۱+ و ۱− ، سطح عامل i در اجرای

Archive of SID

www.SID.ir

l را نشان می دهند.

تعریف **۳** براساس ماتریس طرح T_D ماتریس r_D ، یک ماتریس $k \times k$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$r_D = T_D^t T_D \qquad (۱)$$

ماتریس $T_D^t T_D$ در برابر جایگشت سطرهای ماتریس طرح T_D ، یا به عبارت دیگر در برابر تغییر در ردیف اجراها پایا است، اگر موقعیت مکانی اجراهای ماتریس T_D را تغییر دهیم، ماتریس $T_D^t T_D$ به دست آمده بدون تغییر باقی می ماند. در این مقاله ما از ماتریس $T_D^t T_D$ و ویژگی های آن برای ارائه شرط لازم جدید در تشخیص هم ارزی طرح های عاملی دو سطحی استفاده می کنیم.

قضیه **۱۳** اگر دو طرح $N \times k$ ، $D_۱$ و $D_۲$ هم ارز باشند. آنگاه یک ماتریس جایگشت $q \times q$ ، M و یک جایگشت ستونی $\{c_۱, c_۲, ..., c_q\}$ از $\{۱, ۲, ..., q\}$ وجود دارد به صورتی که برای $q = ۱, ۲, ..., k$

$$r_{D_۱}^{\{۱,۲,...,q\}} = M^t \left(r_{D_۲}^{\{c_۱,c_۲,...,c_q\}} \right) M \qquad (۲)$$

در این حالت

$$r_D^{\{۱,۲,...,q\}} = T_D^{t\{۱,۲,...,q\}} T_D^{\{۱,۲,...,q\}}$$

که $T_D^{\{۱,۲,...,q\}}$ ماتریس طرح متناظر با ستون های $\{۱, ۲, ..., q\}$ و $T_D^{t\{۱,۲,...,q\}}$ ترانهاده آن است.

اثبات : می دانیم دو طرح $D_۱$ و $D_۲$ هم ارز هستند اگر یک ماتریس جایگشت سطری R و ستونی C و ماتریس مربوط به تغییر علامت های سطوح‌در یک یا چند ستون L وجود داشته باشد به صورتی که اگر در یکی از ماتریس های طرح ضرب کنیم، ماتریس طرح دیگر به دست آید. به عبارت دیگر

$$T_{D_۱} = R T_{D_۲} C L$$

بنابراین اگر از k ستون طرح، تنها q ستون را انتخاب کنیم همچنان رابطه فوق برقرار است با این تفاوت که ماتریس های C و L ماتریس های $q \times q$ خواهند بود که به ترتیب با N و M آن ها را نمایش می دهیم و خواهیم داشت:

$$T_{D_۱}^{\{۱,۲,...,q\}} = R T_{D_۲}^{\{۱,۲,...,q\}} N M$$

Archive of SID

www.SID.ir

که می توان نتیجه گرفت

$$T_{D_1}^{\{1,2,...,q\}} = RT_{D_2}^{\{c_1,c_2,...,c_q\}}M$$

از این رو برای هر $q = 1, 2, ..., k$

$$r_{D_1}^{\{1,2,...,q\}} = T_{D_2}^{t\{1,2,...,q\}}T_{D_2}^{\{1,2,...,q\}}$$

بنابراین

$$r_{D_1}^{\{1,2,...,q\}} = M^t\left(T_{D_2}^{t\{1,2,...,q\}}R^tRT_{D_2}^{\{1,2,...,q\}}\right)M$$

همان گونه که قبلاً نیز بیان شد ماتریس r_D در برابر جایگشت سطرها پایا است و بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین:

$$r_{D_1}^{\{1,2,...,q\}} = M^t\left(r_{D_2}^{\{c_1,c_2,...,c_q\}}\right)M$$

و اثبات شرط لازم در تشخیص هم ارزی تمام می شود.

در قضیه ۱ ثابت کردیم که اگر ماتریس r_D را به ازای هر q ستون برای دو طرح تشکیل دهیم، در صورتی که دو طرح هم ارز باشند صرف نظر از جایگشت سطرها، می‌توان یک جایگشت ستونی و یک ماتریس تغییر علامت در یک یا چند ستـــون یافت که ماتریس r_D از یک طرح به طرح دیگر تبدیل شود. از این رو می توان نتیجه گرفت که اگر دو ماتریس r_D به دست آمده از دو طرح دارای عناصر مشابه با تعداد تکرارهای یکسان نباشند دو طرح هم ارز نیستند. بنابراین از معیار پیشنهادی، برای تشخیص غیر هم ارزی دو طرح استفاده می شود.
علیرغم محاسبات آسان، بررسی ماتریس r_D به ازای هر ستون کمی زمان‌بر است. از قضیه ۱ پیدا است که برای هر ستون از ماتریس طرح باید رابطه (۲) در قضیه برقرار باشد. بنابراین در این حالت برای کاهش زمان و روند محاسبات ثابت می کنیم که تنها با مقایسه یک ستون از هر دو ماتریس می توان عدم هم ارزی دو طرح را تشخیص داد. به این ترتیب زمان تشخیص ناهم ارزی کاهش می یابد.

نتیجه ۱ اگر دو طرح $N \times k$ ، D_1 و D_2 هم ارز باشند. آنگاه یک جایگشت ستونی $\{c_1, c_2, ..., c_q\}$ از $\{1, 2, ..., q\}$ وجود دارد به صورتی که برای $q = 1, 2, ..., k$ داریم

$$r_{D_1}^{\{q\}} = l^t\left(r_{D_2}^{\{c_q\}}\right)l, \quad r_D^{\{q\}} = T_D^{t\{q\}}T_D^{\{q\}},$$

Archive of SID

www.SID.ir

که $T_D^{\{q\}}$ ماتریس طرح متناظر با ستون $\{q\}$ است.
اثبات : رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$[M^t \left(r_D^{\{c_1,c_2,...,c_q\}}\right) M]_{i,j} = [M^t \left(T_D^{t\{c_1,c_2,...,c_q\}} T_D^{\{c_1,c_2,...,c_q\}}\right) M]_{i,j}$$

$$= [M^t \left(T_D^{t\{c_1,c_2,...,c_q-1\}} T_D^{\{c_1,c_2,...,c_q-1\}}\right) M]_{i,j} + [M^t \left(T_D^{t\{c_q\}} T_D^{\{c_q\}}\right) M]_{i,j}$$

این نتیجه با توجه به قضیه ۱ و رابطه فوق به راحتی اثبات می شود.

این روش تشخیص هم ارزی بسیار سریع و در زمان کوتاه تری نسبت به بررسی برقرار شرط در قضیه ۱، در حالت کلی از طرح های دو سطحی، قابل اجرا است. اما در برخی از طرح ها این روش قادر به تشخیص عدم هم ارزی دو طرح در مراحل اولیه بررسی نمی باشد در این صورت نیاز به استفاده از شرط قوی تری است که می‌توان از روش مطرح شده در قضیه ۱ استفاده نمود و برای هر q ستون از طرح، ماتریس r_D را تشکیل و مورد مقایسه قرار داد. در صورتی که مقدار عناصر و تعداد تکرارهای این عناصر برای دو طرح متفاوت باشد، روش بیان شده در نتیجه ۱ بسیار سریع تر از روش های موجود تشخیص غیر هم ارزی می تواند عدم هم ارزی در دو طرح عاملی دو سطحی را تشخیص دهد. مقایسه روش جدید با روش های موجود در بخش سوم مورد بررسی قرار می گیرد. واضح است در حالتی که مقدار عناصر و تعداد تکرارهای ماتریس r_D برای دو طرح برابر باشد، باید از شرط های لازم و کافی موجود برای تشخیص کامل تر استفاده نمود.

۳ مقایسه روش معرفی شده با روش های موجود برای تشخیص عدم هم ارزی

در این بخش معیار معرفی شده جدید در بخش دوم را با سایر معیارهای موجود برای تشخیص عدم هم ارزی مقایسه می کنیم. در این بخش، برای مقایسه روش جدید با تمام روش های موجود تنها به معرفی نام هر الگوریتم تشخیص عدم هم ارزی و نویسنده آن بسنده می کنم.
برای اولین بار لین و همکاران (۱۹۹۳) برای تشخیص عدم هم ارزی در طرح های هادامارد دو سطحی چهار الگوریتم $۴R-prof$ ، $۸R-prof$ ، $gen-۴r$ و $ext-۴r$ را معرفی کردند. کاتسونیس و دین (۲۰۰۸) علاوه بر روش وزن همینگ (wt) در راستای شرط لازم و لازم و کافی کلارک و دین (که به ترتیب با الگوریتم های $Deseq۱$ و

Archive of SID

www.SID.ir

$Deseq$۲ شناخته می شوند.) تنها با محدود کردن روند محاسبای الگوریتم $Deseq$۳ را معرفی کردند. ما و همکاران (۲۰۰۱) از توان دوم اختلاف L_2 مرکزی شده، که معیاری در اندازه گیری طرح های یکنواخت است برای تعیین طرح های غیر هم ارز استفاده و الگوریتم CD_2^2 را پیشنهاد دادند. همچنین زو (۲۰۰۳) و زو و دنگ (۲۰۰۴) به ترتیب p اُمین گشتاور توانی (mom^u) و مقایسه سومین و چهارمین گشتاور توانی (mom^p) را به عنوان شرط لازم برای تشخیص عدم هم ارزی معرفی کردند. از دیگر شرط های لازم و کافی برای تشخیص هم ارزی می توان به روش چنگ و یه (۲۰۰۴) اشاره نمود. آن ها با استفاده از تابع نشانگر این شرط لازم و کافی را ارائه داده، که این الگوریتم با نام $Indic$ نمایش داده می شود، شرط لازم این الگوریتم را با CFV_p و CFV_4 نشان می دهند.

کاتسونیس (۲۰۰۷) در رساله دکتری خود با ارائه شرط لازم وزن همینگ، این روش را برای چند طرح که تشخیص هم ارزی یا عدم هم ارزی آنها بسیار مشکل است را با مابقی روش های موجود مورد مقایسه قرار داد. در این مقاله، ما از مقایسات کاتسونیس برای چند طرح خاص استفاده نموده و به مقایسه روش جدید معرفی شده با روش های موجود می‌پردازیم. برنامه محاسبات در نرم افزار R نوشته و اجرا می شود.

جدول ۱: دو طرح df ۱ و df ۵

df ۱			df ۵				
۰	۰		۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱		۰	۱	۰	۰	۰
۱	۰		۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱		۰	۱	۱	۰	۰
۰	۰		۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱		۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰		۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱		۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰		۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱		۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰		۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱		۱	۰	۱	۱	۱
۰	۰		۱	۱	۰	۰	۰
۰	۱		۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰		۱	۱	۰	۰	۱
۱	۱		۱	۱	۰	۰	۱

علاوه بر این که یک شرط لازم در تشخیص هم ارزی باید قادر باشد در کوتاه ترین زمان ممکن به نتیجه برسد باید توانایی ماکزیمم جداسازی ممکن بین طرح ها را نیز داشته باشد. روش جدید قادر است در کوتاه ترین زمان ممکن و تنها با یک محاسبه

Archive of SID

www.SID.ir

سریع با استفاده از برنامه نویسی در نرم افزار R غیر هم ارزی دو طرح را تشخیص دهد. به علاوه روش جدید قادر است برای طرح هایی که روش های موجود تشخیص عدم هم ارزی قادر به شناسایی عدم هم ارزی این دو طرح نیستند، غیر هم ارزی دو طرح را تشخیص دهد. از میان طرح های موجود دو طرح df ۱ و df ۵ را به عنوان نمونه مطرح می کنیم.

طرح df ۱ و df ۵ دو طرحی هستند که به وسیله یک جستجوی کامپیوتری با استفاده از طرح doe۵ به عنوان یک طرح جزئی تولید می‌شوند. طرح doe۵ تصویر طرح هادامارد $had.$۱۶.۱ می‌باشد که از وب‌سایت $http://www.research.att.com/njas$ می‌توان آن را یافت. در جدول ۱ طرح df ۱ و df ۵ به صورت کامل آمده است.

در جدول ۲ روش های مختلف تشخیص هم ارزی به علاوه روش جدید مطرح شده در بخش دوم آمده است.

شرط های لازم و کافی $Deseq$۳ و $Indic$ به صورت قطعی عدم هم ارزی را تشخیص

جدول ۲: زمان و درصد تشخیص عدم هم ارزی دو طرح df ۱ و df ۵ (زمان برحسب ثانیه می‌باشد.)

روش ها	درصد تشخیص	متوسط زمان
$Deseq$۲	۱۰۰	۰/۰۲
$Indic$	۱۰۰	۰/۵۱
$Deseq$۱	۱۰۰	۰/۰۱
$Deseq$۳	۰	۰/۰۱
CD_2^2	۰	۰/۰۱
mom^u	۰	۰/۰۱
mom^p	۰	۰
$4R-prof$	۰	۰/۰۱
$8R-prof$	۰	۰/۰۳
$gen-4r$	۰	۰/۰۱
$ext-4r$	۰	۰
CFV_p	۰	۰/۰۱
CFV_4	۰	۰/۰۱
wt	۱	۰/۰۱
r_D	۱۰۰	۰/۰۱

می دهند. از میان تمام روش های موجود تشخیص عدم هم ارزی به جز روش $Deseq$۱ دیگر روش ها قادر به تشخیص عدم هم ارزی این دو طرح نمی‌باشند، در صورتی که روش جدید معرفی شده علاوه بر اینکه می تواند عدم هم ارزی دو طرح را تشخیص دهد این تشخیص را در کوتاه ترین زمان ممکن انجام می دهد.

مثال مطرح شده نمونه ای از طرح هایی است که کاتسونیس در رساله دکتری خود

Archive of SID

www.SID.ir

مطرح کرده است. علاوه بر این مثال، طرح های متفاوت دیگری هستند (مانند da۷ و da۸ ، dg۳ و dg۴ ، dc۲۰ و dc۲۱ و ...) که روش جدید علاوه بر اینکه می تواند غیر هم ارزی دو طرح را تشخیص دهد، این تشخیص در کوتاه ترین زمان ممکن رخ می‌دهد. بنابراین روش پیشنهادی روشی مطلوب در تشخیص غیر هم‌ارزی دو طرح است.

بحث و نتیجه‌گیری

طرح های هم ارز دارای ویژگی های آماری یکسانی هستند. بنابراین در صورتی که نتوان به هر دلیلی طرحی با ویژگی های مطلوب و مورد نظر را در صنعت یا آزمایشگاه اجرا کرد باید به دنبال طرح های هم ارز دیگری با طرح مفروض باشیم تا علاوه بر اینکه ویژگی های مورد نظر را داشته باشد، قابل اجرا نیز باشد. از این رو شناسایی طرح های هم ارز که دارای ویژگی های یکسانی هستند، مهم و ضروری است. چند شرط لازم و کافی برای شناسایی طرح های هم ارز معرفی شده است. مزیت شرط های لازم و کافی این است که به صورت قطعی هم ارزی یاغیر هم ارزی دو طرح را مشخص می کنند. اما مدت زمان تعیین هم ارزی طرح ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است و ایراد اساسی شرط های لازم و کافی زمان بر بودن این روش ها است.

از این رو شرط های لازم برای تشخیص عدم هم ارزی معرفی شدند. شرط های لازم سرعت تعیین غیر هم ارزی را کاهش می دهند ولی قادر به تشخیص دو طرح هم ارز نیستند. بنابراین شرط های لازم علاوه بر سرعت اجرا باید قادر به تشخیص و جداسازی حداکثری طرح های غیر هم ارز باشد. اکثر روش های موجود برای تشخیص غیر هم ارزی قادر به اجرای هر دو هدف فوق نیستند و در یک یا هر دو هدف دچار مشکل می شوند.

در این مقاله براساس انتخاب یک یا چند ستون از ماتریس طرح روشی را معرفی کردیم که طرح هایی که با استفاده از روش های تشخیص غیر هم ارزی، قادر به تعیین نا هم ارزی آن ها نمی باشیم، با به کار گیری روش جدید قابل شناسایی می باشند. از دیگر مزایای روش جدید این است که به علت روند محاسباتی کوتاه این روش بسیار سریع تر از روش های دیگر غیر هم ارز بودن دو طرح را اعلام می کند. بنابراین ترکیب روش جدید با یک شرط لازم و کافی گام موثری در کاهش زمان تشخیص هم ارزی خواهد بود.

Archive of SID

www.SID.ir

مراجع

Cheng, S. W. and Ye, K. (2004), Geometric isomorphism and minimum aberration for factorial designs with quantitative factors, *Annals of Statistics*, **32**, 2168-2185.

Clark, J. B. and Dean, A. M. (2001), Equivalence of fractional factorial designs. *Statistica Sinica*, **11**, 537-547.

Katsaounis, T. and Dean, A. M. (2008), A survey and evaluation of methods for determination of combinatorial equivalence of factorial designs, *Jornal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 245-258.

Katsaounis, T. (2007), Equivalence of symmetric factorial designs and characterization and ranking of two level spilit-plot designs. Ph.D. dessertion, The Ohio State University.

Lin, C.,Wallis, W. D. and Zhu, L. (1993), Generalized 4-profiles of hadamard matrices, *Journal of Combinatorica*, **18**, 397-400.

Ma, C. X., Fang, K. T. and Lin, D. K. J. (2001), On the isomorphism of fractional factorial designs, *Journal of Complexity*, **17**,86-97.

Xu, H. and Deng, L. Y. (2004), Moment aberration projection for nonregular fractional factorial designs, *Technometrics*, **47**, 275-278397-400121-131.

Xu, H.(2003), Minimum moment aberration for nonregular designs and supersaturated designs, *Statistica Sinica*, **13**, 691-708.

Archive of SID

www.SID.ir