توزیع نرمال چوله و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای آن

محمد بهرامی
گروه آمار، دانشگاه اصفهان

بسیاری از خصوصیاتهای موجود در یک جامعه آماری دارای مجموعه مقادیر اعداد حقیقی می باشند و معمولا یک آماردان توزیع مربوط به اندازه این خصوصیتها را نرمال فرض می‌کند. اما سؤالی که مطرح می شود این است آیا واقعاً می‌توان همیشه این فرض را در نظر گرفت؟ در صورتیکه داده های مربوط به اندازه یک خصوصیت دارای چولگی به راست یا چپ باشد هنوز این فرض برقرار است؟ البته در مواردی که مجموعه مقادیر خصوصیت مورد بررسی مجموعه اعداد حقیقی مثبت بوده و دارای چولگی به راست باشند می توان از توزیع هایی مانند گاما، خی ـدو و وایبول استفاده کرد اما در حالت کلی این توزیعها پاسخگوی نیاز ما نخواهد بود. از این رو آماردانان برآن شدند تا توزیع نرمال را تعمیم داده و توزیعی را معرفی کنند که این نیاز را مرتفع سازد. این توزیع در واقع توزیع نرمال چوله می باشد که اولین بار توسط شخصی به نام آزالینی(۱۹۸۵) معرفی گردید. البته بعدها نیز افرادی مانند هنز(۱۹۸۶) و جنتون، هی و لیو(۲۰۰۱) نیز در رابطه با توزیع نرمال چوله مقالاتی را ارائه نمودند. در این مقاله ابتدا توزیع نرمال چوله را تعریف و سپس برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای موجود در آن را توسط الگوریتم‌ـ EM به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم‌ـ EM، برآورد ماکسیمم درستنمایی، تابع درستنمایی، توزیع نرمال چوله[1].

۱ مقدمه

هنگامی که از توزیع نرمال صحبت می کنیم در واقع منحنی متقارن زنگی شکلی را تصور می کنیم که حول عددی که به آن میانگین توزیع گفته می شود دارای تقارن می باشد. توزیعی را که اکنون در مورد آن بحث خواهیم کرد، در واقع همان توزیع نرمالی می باشد که چولگی پیدا کرده است. البته ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا معنی دارد که توزیع متقارن چوله

[1] Skew Normal Distribution

باشد؟ پاسخ مثبت است و همانگونه که در چکیده این مقاله به آن اشاره گردید، ضرورت تعریف چنین توزیعی عدم تقارن داده هایی با مجموعه مقادیر اعداد حقیقی می باشد.

۲ توزیع نرمال چوله

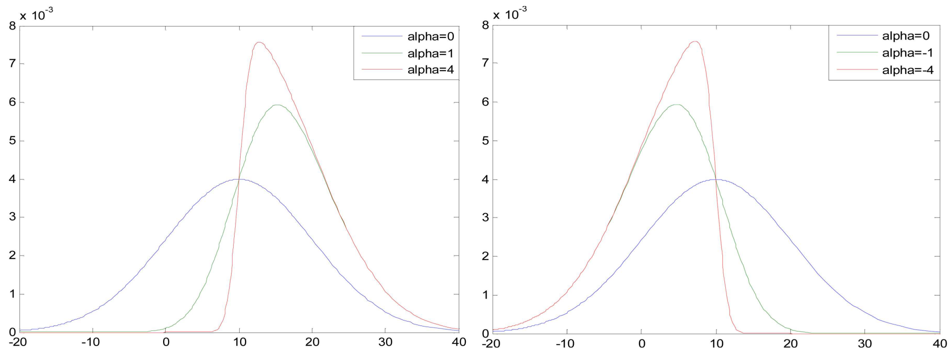
فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مجموعه مقادیر R باشد. اگر تابع چگالی این متغیر تصادفی به صورت:

$$f(x|\mu,\sigma^۲,\alpha)=\frac{۲}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (۱)$$

باشد، در این صورت می گوییم X دارای توزیع نرمال چوله با پارامترهای $\alpha,\sigma^۲,\mu$ بوده و آن را با نماد: $X\sim SN\left(\mu,\sigma^۲,\alpha\right)$ نشان می دهیم. در (۱)، ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و توزیع نرمال استاندارد می باشند. α را پارامتر شکل (Shape Parameter) می نامیم. به عبارت دیگر تابع چگالی نرمال چوله را می توان به صورت زیر نشان داد.

$$f(x|\mu,\sigma^۲,\alpha)=\frac{۲}{\sigma}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}\left(x-\mu\right)^۲\}\int_{-\infty}^{\alpha\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}z^۲}dz$$

باید دقت داشته باشیم هرگاه: $\alpha=۰$ باشد در اینصورت: $f(x|\mu,\sigma^۲,\alpha=۰)=\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ که نشان دهنده توزیع نرمال با پارامترهای $\sigma^۲,\mu$ است. همچنین اگر α مثبت باشد چولگی به سمت راست و درصورتیکه α منفی باشد چولگی نمودار تابع چگالی به سمت چپ خواهد بود. چنانچه $\alpha\longrightarrow\infty$ آنگاه تابع چگالی f به سمت تابع چگالی نیم-نرمال$(Half-Normal)$ میل خواهد کرد. نمودارهای زیر وضعیت چولگی تابع چگالی نرمال چوله را به ازای مقادیر مختلف α نشان می دهد.



شکل ۱: نمودار تابع چگالی نرمال چوله به ازای مقادیر مختلف α $(\mu = 10, \sigma = 10)$

چنانچه در (۱) $\sigma^2 = 1, \mu = 0$ باشد، در اینصورت تابع چگالی نرمال چوله اسناندارد را خواهیم داشت. و در این حالت تنها پارامتر موجود، پارامتر چولگی بوده و تابع چگالی آن را به صورت: $f(z|\alpha) = 2\phi(z)\Phi(\alpha z)$ نشان می دهیم. پیسی (۲۰۰۱) در مورد توزیع نرمال معرفی شده توسط آزالینی مسائلی را حل نمود. رینالدو(۲۰۰۳) نیز یک حالت کلیتر از توزیع نرمال چوله را که به آن نرمال چوله تعمیم یافته[2] گفته می شود معرفی کرد که تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$f(x|\alpha_1, \alpha_2) = 2\phi(x)\Phi\left(\frac{\alpha_1 x}{\sqrt{1 + \alpha_2 x^2}}\right); x \in R, \alpha_1 \in R, \alpha_2 \geq 0$$

لازم به ذکر است که تابع چگالی فوق مربوط به توزیع نرمال استاندارد چوله تعمیم یافته با پارامترهای α_1, α_2 بوده وآن را با نماد $X \sim SGN(0, 1, \alpha_1, \alpha_2)$ نشان می دهیم.
با تبدیل:$Y = \mu + \sigma X$ شکل کلی تابع چگالی نرمال چوله تعمیم یافته به صورت زیر به دست می آید.

$$f(y|\mu, \sigma, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\Phi\{\frac{\alpha_1(y - \mu)}{\sqrt{\sigma^2 + \alpha_2(y - \mu)^2}}\}$$

برای به دست آوردن تابع چگالی نرمال چوله می توانیم از قضیه (۱) استفاده کنیم. اما ابتدا

[2]Skew-Generalized Normal Distribution

تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱ فرض کنید Y یک متغیر تصادفی باشد. می گوییم این متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال بریده شده [3] در فاصله (α_1, α_2) می باشد و آن را با نماد $Y \sim TN(\mu, \sigma^2)I\{\alpha_1 < y < \alpha_2\}$ نشان می دهیم، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \left\{\Phi(\frac{\alpha_2 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha_1 - \mu}{\sigma})\right\}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\};$$

$$\alpha_1 < y < \alpha_2$$

قضیه ۱ فرض کنید متغیر تصادفی U دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 و متغیر تصادفی T دارای توزیع نرمال بریده شده به صورت: $T \sim TN(0, \sigma^2)I\{t > o\}$ باشد. اگر U و T مستقل باشند، آنگاه متغیر تصادفی: $X = \mu + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}U$ دارای توزیع نرمال چوله با پارامترهای α, σ^2, μ خواهد بود.

اثبات: تبدیل زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} X = \mu + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}U \\ W = T \end{cases}$$

با استفاده از تبدیل فوق و در نظر گرفتن $\delta(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ می توان نوشت:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{1-\delta(\alpha)}}(X - \mu - \delta(\alpha)W) \\ T = W \end{cases}$$

بنابراین ژاکوبین تبدیل این تبدیل عبارت است از:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} & \frac{\delta(\alpha)}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[3] Truncated Normal Distribution

یا $|J| = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}$.
در این صورت می توان نوشت:

$$f_{(X,W)}(x,w) = |J| f_{(U,T)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}(x-\mu-\delta(\alpha))w, w\right)$$

$$f_{(X,W)}(x,w) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} f_U\left(\frac{x-\mu-\delta(\alpha)}{\sqrt{\delta^2(\alpha)}}\right) f_T(w)$$

$$f_{(X,W)}(x,w) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))}(x-\mu-\delta(\alpha))^2\} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}w^2\}$$

از آنجا که متغیر T و W مساوی هستند، می توان نوشت:

$$f_{(X,T)}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} \frac{1}{\pi\sigma^2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{(x-\mu)^2+t^2-2\delta(\alpha)t(x-\mu)}{1-\delta^2(\alpha)}\right]\right\}$$

$$f_{(X,T)}(x,t) = \frac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} exp\{-\frac{1}{2\sigma^2\}(x-\mu)^2}.exp\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))}[t-\delta(\alpha)(x-\mu)]^2\}$$

پس از ساده کردن و انتگرال گیری روی متغیر T با استفاده از تبدیل: $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))}}[t - \delta(\alpha)(x-\mu)] = Z$ داریم:

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))}}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \int_{-\frac{\delta(\alpha)(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} exp(-\frac{1}{2}z^2)dz$$

پس از ساده کردن و جایگذاری $\delta(\alpha)$ نتیجه به صورت زیر به دست می آید که نتیجه مورد نظر است.

$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

با بکارگیری تعریف توزیع بریده شده نرمال می توان نشان داد:

$$T|X=x \sim TN\left(\delta(\alpha)(x-\mu), \sigma^{2}(1-\sigma^{2}(\alpha))\right) I\{t>0\} \qquad (2)$$

زیرا داریم:

$$f(t|x)=\frac{f(x,t)}{f(x)}=\frac{exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}(1-\delta^{2}(\alpha))}[(x-\mu)^{2}-2\delta(\alpha)(x-\mu)t+t^{2}]\right\}}{\pi\sigma^{2}\sqrt{1-\delta^{2}(\alpha)}2\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\begin{aligned} f(t|x) &= \left\{\Phi\left(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{-1} \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}(1-\delta^{2}(\alpha))}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}(1-\delta^{2}(\alpha))}[t^{2}-\delta(\alpha)(x-\mu)]^{2}\right\} \end{aligned}$$

و بطور خلاصه داریم:

$$\begin{aligned} f(t|x) &= \left\{1-\Phi\left(-\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{-1} \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}(1-\delta^{2}(\alpha))}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}(1-\delta^{2}(\alpha))}[t^{2}-\delta(\alpha)(x-\mu)]^{2}\right\} \end{aligned}$$

به این معناست که: $T|X=x \sim TN\left(\delta(\alpha)(x-\mu), \sigma^{2}(1-\sigma^{2}(\alpha))\right) I\{t>0\}$

فرع ۱ فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای توزیع بریده شده با پارامترهای μ, σ^{2} در فاصله (α_1, α_2) باشد. در اینصورت می توان نشان داد:

$$E(Y)=\mu-\sigma\frac{\phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$E(Y^{2})=\mu^{2}+\sigma^{2}-\sigma^{2}\frac{\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}-2\mu\sigma\frac{\phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha_1-\mu}{\sigma}\right)}$$

بنابراین با استفاده از (۲) و فرع۱ داریم:

$$E(T|X=x)= \qquad (3)$$

$$\delta(\alpha)(x-\mu)+\frac{\phi\left(\frac{\delta(\alpha)(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}\right)}{\Phi\left(\frac{\delta(\alpha)(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}\right)}\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)} \tag{4}$$

$$E(T^2|X=x)=$$

$$\delta^2(\alpha)(x-\mu)^2+\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))+\frac{\phi\left(\frac{\delta(\alpha)(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}\right)}{\Phi\left(\frac{\delta(\alpha)(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}\right)}\delta(\alpha)(x-\mu)\sigma^2(1-\delta^2(\alpha)) \tag{5}$$

در اینجا نیز باید دقت داشته باشیم که برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامترها در توزیع نرمال چوله به صورت دقیق میسر نبوده و باید از روش های عددی استفاده کنیم. یکی از معروفترین روشهای عددی الگوریتم EM[4] می باشد که توسط دمپستر(۱۹۷۸)معرفی گردید.

۳ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها

از آنجا که به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای پارامترهای توزیع نرمال چوله به دلیل وجود انتگرال موجود در تابع چگالی آن به صورت معمول امکان پذیر نمی باشد، بنابراین از تابع درستنمایی توأم $\underline{T},\underline{X}$ استفاده می کنیم. با به کارگیری نمونه های تصادفی $\underline{T}=(T_1,...,T_n),\underline{X}=(X_1,...,X_n)$ می توانیم تابع درستنمایی را برای پارامترهای α,σ^2,μ به شرط داده های کامل $(\underline{X},\underline{T})$ به صورت زیر بنویسیم. در واقع بردار $\underline{T}$ مانند بردار متغیرهای پنهان می توانند ما را در انجام کار کمک کنند.

$$L_c(\psi|\underline{x},\underline{t})=\Pi_{j=1}^n\frac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\delta^2(\alpha)}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2(\alpha))}[t_j-\delta(\alpha)(x_j-\mu)]^2\right\} \tag{6}$$

در تابع درستنمایی فوق ψ بردار پارامترهای موجود به صورت:$\psi=(\mu,\sigma^2,\alpha)$ می باشد.حال اگر نسبت به پارامترهای α,σ^2 از $\ln$ رابطه (۵) مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، می

[4] Expectation and maximization algorthm

توانیم برآوردهای ماکسیمم درستنمایی این پارامترها را بدست آوریم. پس:

$$\frac{\partial \ell_c(\psi|\underline{x},\underline{t})}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2(1-\sigma^2(\alpha))}\left[2\delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n} t_j - 2\delta^2(\alpha)\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)\right] = 0$$

پس از ساده کردن و حل معادله فوق نسبت به μ داریم:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \delta^{-1}(\alpha)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t_j \qquad (7)$$

بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر μ با پیش بینی کردن t_j ها و برآورد کردن α و جایگذاری آنها در (۶) به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \delta^{-1}(\hat{\alpha})\sum_{j=1}^{n} \hat{t_j} \qquad (8)$$

بطور مشابه برای σ^2 داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j^2 - 2\delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)T_j + \sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2}{2n(1-\delta^2(\alpha))} \qquad (9)$$

با پیش بینی T_j^2, T_j و براورد α,μ براورد ماکسیمم درستنمایی برای σ^2 به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{T_j^2} - 2\delta(\hat{\alpha})\sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})\hat{T}_j + \sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})^2}{2n(1-\delta^2(\hat{\alpha}))} \qquad (10)$$

و بالاخره برای بدست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای α باید معادله زیر را برحسب α حل کنیم.

$$\begin{aligned} n\sigma^2\delta(\alpha)(1-\delta^2(\alpha)) \quad &+ \quad (1+\delta^2(\alpha))\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)T_j \\ &- \quad \delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n} T_j^2 - \delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu)^2 = 0 \qquad (11) \end{aligned}$$

با جایگذاری $\hat{\sigma^2}, \hat{\mu}$ در (۱۰) و حل آن برحسب α برآورد ماکسیمم درستنمایی را برای این پارامتر به دست می دهد.

یعنی:

$$n\hat{\sigma^{2}}\delta(\hat{\alpha})(1-\delta^{2}(\hat{\alpha})) + (1+\delta^{2}(\hat{\alpha}))\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu})\hat{T_j} - \delta(\hat{\alpha})\sum_{j=1}^{n}\hat{T_j^{2}} - \delta(\hat{\alpha})\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu})^{2} = 0 \qquad (12)$$

اگر در توزیع شرطی T به شرط $X=x$ یعنی (۲) فرض کنیم: $\mu_T=\delta(\alpha)(x-\mu)$ و $\sigma_T=\sigma\sqrt{1-\delta^{2}(\alpha)}$ در اینصورت با استفاده از (۳)و(۴) می توان امید ریاضی شرطی و امید ریاضی درجه دو شرطی آن را که در واقع همان S_{1j} و S_{2j} می باشند به صورت زیر نوشت.

$$S_{1j}=E(T_j|x_j)=\mu_{T_j}+\frac{\phi\left\{\alpha(\frac{x_j-\mu}{\sigma})\right\}}{\Phi\left\{\alpha(\frac{x_j-\mu}{\sigma})\right\}}\sigma \qquad (13)$$

$$S_{2j}=E(T_j^{2}|x_j)=\mu_{T_j}^{2}+\sigma_T^{2}+\frac{\phi\left\{\alpha(\frac{x_j-\mu}{\sigma})\right\}}{\Phi\left\{\alpha(\frac{x_j-\mu}{\sigma})\right\}}\mu_{T_j}\sigma_T \qquad (14)$$

همانگونه که مشاهده می شود معادلات (۷)(۹)(۱۱) برحسب پارامترهای مورد نظر دارای جواب صریح نمی باشند. بنابراین می توانیم از الگوریتم‌ـEM استفاده کنیم. برای این منظور $\alpha^{(0)},\sigma^{2(0)},\mu^{(0)}$ را به عنوان مقادیر اولیه برای این پارامترها در نظر گرفته و توسط روابط (۱۲)(۱۳) مقادیر $\hat{S}_{2j}^{(k)},\hat{S}_{1j}^{(k)}$ را که در واقع مرحله‌ـE از الگوریتم موردنظر است به دست آورده و سپس در مرحله‌ـM که مرحله ماکسیمم کردن است برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α,σ^{2},μ را در معادلات (۷)(۹)(۱۱) به دست می آوریم. بنابراین می توان نوشت:

$$\hat{S}_{1j}^{(k)}=E_{\hat{\psi}^{(k)}}(T_j|x_j)=\hat{\mu}_{T_j}^{(k)}+\frac{\phi\left\{\hat{\alpha}^{(k)}(\frac{x_j-\hat{\mu}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})\right\}}{\Phi\left\{\hat{\alpha}^{(k)}(\frac{x_j-\hat{\mu}^{(k)}}{\hat{\sigma}(k)})\right\}}\hat{\sigma}_T^{(k)} \qquad (15)$$

$$\hat{S}_{2j}^{(k)}=E_{\hat{\psi}^{(k)}}(T_j^{2}|x_j)=\hat{\mu}_{T_j}^{(k)^{2}}+\hat{\sigma}_T^{(k)^{2}}+\frac{\phi\left\{\hat{\alpha}^{(k)}(\frac{x_j-\hat{\mu}^{(k)}}{\hat{\sigma}^{(k)}})\right\}}{\Phi\left\{\hat{\alpha}^{(k)}(\frac{x_j-\hat{\mu}^{(k)}}{\hat{\sigma}(k)})\right\}}\hat{\sigma}_T^{(k)}\hat{\mu}_{T_j}^{(k)} \qquad (16)$$

بنابراین با در نظر گرفتن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامتر μ که در (۷) به دست آوردیم، اکنون می توانیم برآورد این پارامتر را از رابطه زیر در مرحله $k+1$ به دست آوردیم$(Update)$. در واقع مرحله ـ M از الگوریتم ـ EM به صورت زیر انجام می شود.

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \delta^{-1}(\hat{\alpha}^{(k)})\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{S}_{1j}^{(k)} \qquad (17)$$

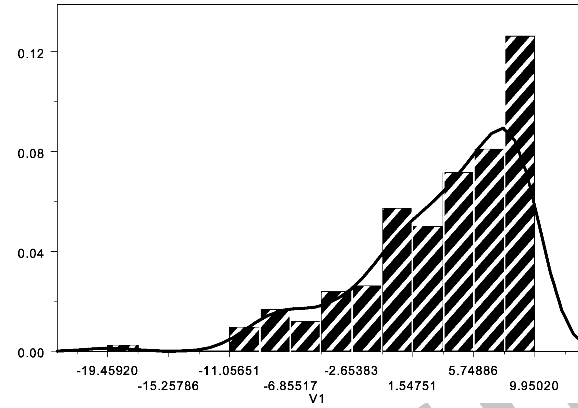
به طور مشابه با مشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی شرطی نسبت به σ^2 و به کارگیری مرحله ـ E یعنی روابط (۹)(۱۱) می توانیم برآورد پارامتر σ^2 را در مرحله $k+1$ به صورت زیر به دست آوریم:

$$\hat{\sigma^2}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\hat{S}_{2j}^{(k)} - 2\delta(\hat{\alpha}^{(k)})\sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu}^{(k+1)})\hat{S}_{1j}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu}^{(k+1)})^2}{2n(1-\delta^2(\hat{\alpha}^{(k)}))} \qquad (18)$$

و بالاخره با ثابت نگه داشتن $\mu = \hat{\mu}^{(k+1)}$ و $\sigma^2 = \hat{\sigma^2}^{(k+1)}$ می توانیم $\hat{\alpha}^{(k+1)}$ را از حل معادله زیر به دست آوریم که خود مستلزم نوشتن یک زیر برنامه در نرم افزار مورد استفاده بود.

$$\begin{aligned} n\hat{\sigma^2}^{(k+1)}\delta(\alpha)(1-\delta^2(\alpha)) &+ (1+\delta^2(\alpha))\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu}^{(k+1)})\hat{S}_{1j}^{(k)} - \delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n}\hat{S}_{2j}^{(k)} \\ &- \delta(\alpha)\sum_{j=1}^{n}(y_j-\hat{\mu}^{(k+1)})^2 = 0 \end{aligned}$$

مثال ۱ تعداد ۲۰۰ عدد را از توزیع نرمال چوله با پارامترهای $\mu = 100$ و $\sigma^2 = 64$ و پارامتر شکل $\alpha = -4$ تولید کرده‌ایم. با استفاده از الگوریتم EM و آنچه که در بالا توضیح داده شد، برآورد پارامترها را به دست می آوریم. برای این منظور ابتدا هیستوگرام داده‌ها را رسم می کنیم. هسیتوگرام رسم شده در شکل ۳ کاملاً چولگی داده‌ها را نشان می‌دهد.



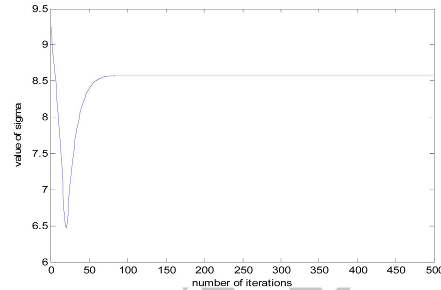
شکل ۳: هیستوگرام داده‌های توزیع نرمال چوله

با نوشتن برنامه‌ای در نرم افزار MATLAB و اجرای آن برآورد پارامترها در جدول ۱ نوشته شده است.

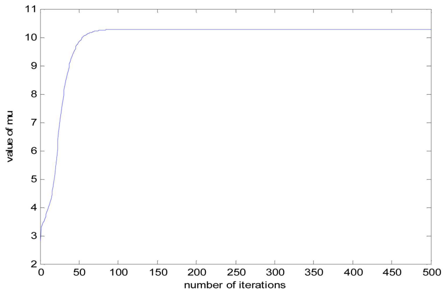
پارامتر	مقدار واقعی	برآورد	انحراف استاندارد
μ	۱۰	۱۰.۲۷۸۳	۰.۴۴۵۹
σ	۸	۸,۵۸۷۷	۰.۳۲۶۸
α	$-$۴	$-$۳.۸۸۷۵	۰.۰۶۷۲۱

جدول ۱. مقادیر به دست آمده برآورد پارامترها برای چگالی نرمال چوله .

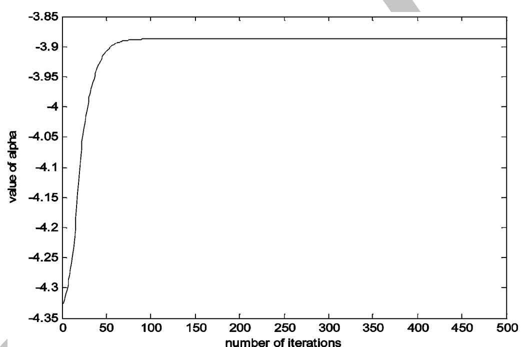
برای بررسی درستی برآوردهای بدست آمده برای پارامترهای موجود، نمودارهای همگرایی برآورد این پارامترها را رسم می‌کنیم.



شکل ۴: نمودار همگرایی برآورد پارامتر μ



شکل ۵: نمودار همگرایی برآورد پارامتر σ



شکل ۶: نمودار همگرایی برآورد پارامتر α

مراجع

[1] Azzalini, A. (1985). Further result on a class of distribution which includes the normal ones, *Statistica*, **46**, 199-208.

[2] Dempster A.P, Laird N.M ,Rubin D. Maximum Likelihood from incomplete Data Via the EM algorithm. *J.Roy,Statist.Soc.Ser.B*, **1977**, 39:1-38.

[3] Genton, M.G;He, L. and Liu, X.(2001). Moments of Skew-Normal random vector and their Quadratic Forms, *Statistics and probability letters*, **51**, 319-325.

[4] Henz, N. (1986). A probabilistic Representation of Skew-Normal distribution, *Scandinavian.J.Statistics*, **13**, 271-275.

[5] Reinaldo, B. (2003). A new class of Skew-Normal distribution, *Technical Report,North Carolina State University, Institue of Statistics*, 1-15.

[6] Pewsey, A. (2001). Problems of inference for Azzalini skew-normal distribution, *Journal of Applied Statistics*, **27**, 859-870.