تبدیل نرمال سازی، بررسی توزیع و خواص آن

حسین بیورانی، کانیاو کمری
گروه آمار، دانشگاه تبریز
گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

یکی از روشهای بی مقیاس‌سازی متغیرهای تصادفی، نرمال سازی است که کاربردهای فراوانی در علوم مختلف دارد. در این مقاله ضمن معرفی تبدیل نرمال‌سازی و بیان ویژگی‌های آن، سعی در یافتن تابع توزیع، امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور آن داریم و نتایج به دست آمده را با استفاده از تابع یکنواخت استاندارد مجدداً بررسی خواهیم نمود.

واژه‌های کلیدی: نرمال‌سازی، آماره ترتیبی، بسط سری تیلور، شبکه عصبی، آماره معین.

۱ مقدمه

در آمار کاربردی اغلب به دنبال تبدیل هایی هستیم تا داده ها مستقل از واحد اندازه گیری شوند که بتوان آنها را مقایسه کرد. بدین منظور روشهای مختلفی وجود دارد. یکی از این روش ها، تبدیل نرمال سازی[1] است که به صورت زیر تعریف می شود: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F_X(x)$ و تابع چگالی $f_X(x)$ باشد و $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از آن باشد. تبدیل نرمال سازی متغیر تصادفی X_i را با Y_i نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y_i = \frac{X_i - X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}$$

در این تبدیل $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(i)} < ... < X_{(n)}$ آماره های ترتیبی متغیرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ می باشد.
برای این تبدیل ویژگی‌های زیر وجود دارد که به دلیل سادگی از اثبات آنها خودداری می شود:

[1] Normalization

- متغیر تصادفی Y_i کراندار[2] بوده و متعلق به بازه بسته[۰, ۱] است.

- در صورتی که تابع چگالی X_iها مکانی[3]، مقیاسی[4] یا مکانی مقیاسی باشد Y_i یک آماره معین[5] است .

- Y_i به شرط ثابت بودن $X_{(1)}, X_{(n)}$ یک تابع خطی از X_i ها است.

تغییر مقیاس نقطهٔ قوت نرمال سازی است، چرا که عناصر اصلی یک ویژگی به مقیاسی که با آن اندازه گیری شده است بستگی دارد. از مهمترین کاربردهای نرمال سازی استفاده از آن در شبکه‌های عصبی[6] و شبکه‌های عصبی فازی است[۴].
قبل از پردازش داده ها بوسیله این شبکه‌ها باید آنها را نرمال سازی نمود. این کار توان پیش بینی را بالا برده و عملکرد شبکه را بهبود می بخشد. ضمنا در مدیریت جهت رتبه بندی شرکت‌ها، بانک ها و غیره همچنین در روش‌های تصمیم گیری چندمعیاره جهت بی مقیاس سازی متغیرها از آن استفاده می‌شود.
با توجه به ساختار تبدیل نرمال سازی مهمترین مورد یافتن توزیع آن است که مولفین این مقاله تا جایی که بررسی کرده‌اند، هیچ مقاله یا منبعی یافت نشده است. لذا ابتدا تابع توزیع Y_i را محاسبه نموده و در ادامه به محاسبه امیدریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور آن پرداخته و در پایان با استفاده از توزیع یکنواخت بین صفر و یک مراحل مذکور را مرور خواهیم داد.

۲ یافتن تابع توزیع تبدیل نرمال سازی

قضیه ۱ فرض می کنیم متغیر تصادفی X_i دارای تابع چگالی $f(x_i)$ و تابع توزیع $F(x_i)$ باشد. تابع توزیع متغیر تصادفی Y_i به صورت زیر است:

$$F_{Y_i}(y) = \frac{1 + (-1)^n + n}{n + 1} - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} (n - i - 1)$$

[2] bounded
[3] location
[4] scale
[5] ancillary
[6] Neural network

$$.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} f(t)F(t)^{n-i-2}f(x)F(\frac{x+t(y-1)}{y})^{i+1}dxdt(-1)^{n-i}$$

اثبات : برای یافتن توزیع Y_i از قضیه احتمال کل استفاده می شود، داریم :

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(y) &= p(\frac{X_i - X(1)}{X(n)-X(1)} \le y) = p(\frac{X_i - X(1)}{X(n)-X(1)} \le y, X_{(1)} \in R, X_{(n)} \in R) \\ &= \iint p((\frac{X_i - X(1)}{X(n)-X(1)} \le y) n(n-1)(F(z)-F(t))^{n-2} f(t)f(z)dzdt \end{aligned}$$

با استفاده از بسط دو جمله ای و اینکه :

$$p(\frac{X_i - X(1)}{X(n)-X(1)} \le y) = F(y(z-t)+t) = \int_{-\infty}^{y(z-t)+t} f(x)dx$$

می توان نوشت :

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} n(n-1)(-1)^{n-i-2}$$

$$.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{y(z-t)+t} f(x)(F(z))^{i}(F(t))^{n-i-2}f(t)f(z)dxdzdt$$

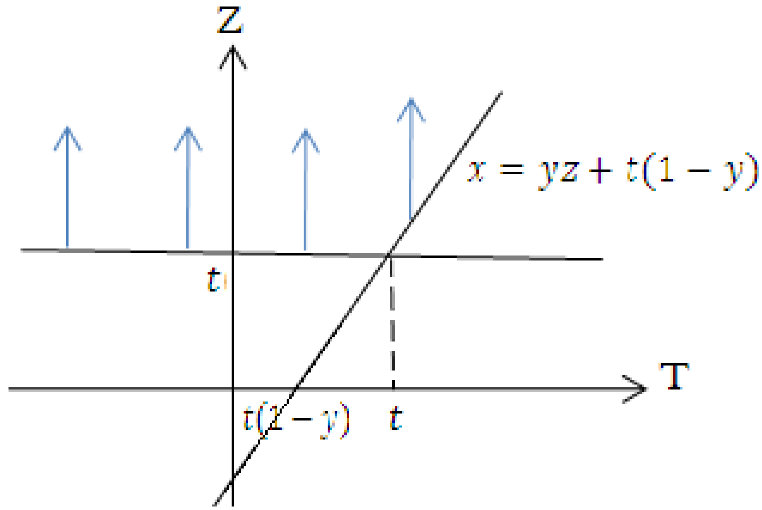
برای راحتتر شدن محاسبه انتگرال‌ها، انتگرال بیرونی را ثابت گرفته و جای دو انتگرال را عوض می کنیم، دو حالت زیر باید یررسی شوند:

۱. اگر $t \ge 0$ باشد و $t \le z \le \infty, -\infty < x \le y(z-t)+t$ آنگاه ناحیه مشترک بین آنها در شکل ۱ آمده است.

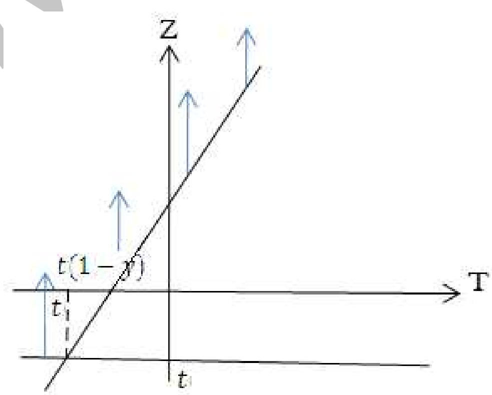
۲. اگر $t < 0$ باشد و $t \le z \le \infty, -\infty < x \le y(z-t)+t$ آنگاه ناحیه مشترک بین آنها به صورت شکل ۲ است.

برای هر دو حالت حدود انتگرال پس از تعویض آنها به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{aligned} &\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{y(z-t)+t} f(x)(F(z))^{i}(F(t))^{n-i-2}f(t)f(z)dxdz \\ &\quad = \frac{f(t)(F(t))^{n-i-2}}{i+1}\left\{1-(F(t))^{i+2} - \int_{t}^{\infty} f(x)(F(\frac{x+t(y-1)}{y}))^{i+1}dx\right\} \end{aligned}$$



شکلِ ۱: ناحیه بین انتگرالها برای $t \geq \circ$



شکلِ ۲: ناحیه بین انتگرالها برای $t < \circ$

پس تابع توزیع Y_i ها به صورت زیر به دست خواهد آمد :

$$F_{Y_i}(y)=n(n-2)\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i-2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)(F(t))^{n-i-2}}{i+1}-\frac{f(t)(F(t))^{n}}{i+1}$$
$$-\frac{f(t)(F(t))^{n-i-2}\int_t^{\infty}f(x)(F(\frac{x+t(y-1)}{y}))^{i+1}dx}{i+1}\,dt$$
$$=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i-2}\Bigg\{\frac{i+2}{(i+1)(n+1)(n-i-1)}$$
$$-\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}f(t)(F(t))^{n-i-2}f(x)(F(\frac{x+t(y-1)}{y}))^{i+1}dxdt}{i+1}\Bigg\}$$

با استفاده از رابطه ی $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}=(1-1)^n=0$ بدست می آید:

$$F_{Y_i}(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1+(-1)^n+n}{n+1}-\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i+1}(n-i-1)\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}f(t)(F(t))^{n-i-2}f(x)(F(\frac{x+t(y-1)}{y}))^{i+1}dxdt(-1)^{n-i} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

با گرفتن مشتق از تابع توزیع Y_i ، تابع چگالی آن برای $0<Y_i<1$ به صورت زیر به دست می آید:

$$f_{Y_i}(y)=\frac{1}{y^2}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i+1}(n-i-1)(i+1)$$
$$.\int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{\infty}(x-t)f(t)(f(t))^{n-i-2}f(x)(f(\frac{x+t(y-1)}{y}))^{i}dxdt(-1)^{n-i}$$

حالتی که $Y_i=0$ زمانی که $X_i=X_{(1)}$ و $Y_i=1$ زمانی که $X_i=X_{(n)}$ اتفاق بیافتد. بنابراین داریم :

۱. $Y_i=0$ معادل این است که در اصل تعداد کل داده ها n+1 تا بوده و $minX_j=a=X_i$ و چون هنگام مرتب کردن داده ها برای آماره های ترتیبی تکرار مجاز نیست، یکی از

آنها حذف شده است . پس در حالت کلی n+1 تا شی به $(n+۱)!$ طریق در کنار هم قرار می گیرند و تعداد حالاتی که iامی در مکان اول باشد، برابر$n!.۱$ است. پس:

$$p(Y_i=\circ)=\frac{n!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{n+۱}$$

۲. به طور مشابه برای $Y_i=۱$ داریم :

$$p(Y_i=۱)=\frac{۱}{n+۱}$$

۳ محاسبه امید ریاضی و واریانس و تابع مولد گشتاور Y_i

برای محاسبه امید ریاضی دو روش را بیان می کنیم :
روش اول : پیدا کردن امید ریاضی متغیر تصادفی Y_i با شرطی کردن روی مقادیر کوچکترین و بزرگترین آماره های ترتیبی X_i

قضیه ۱ اگر تابع چگالی X_i به صورت $f(X_i)$ باشد که $X_i\neq X_{(۱)},X_{(n)}$ و تعریف کنیم:

$$g(t,z)=E(X_i|X_{(۱)}=t,X_{(n)}=z)$$

آنگاه امید ریاضی Y_i به صورت زیر خواهد بود :

$$E(Y_i)=\sum_{i=\circ}^{\infty}E\left(\frac{t^i}{z^{i+۱}}g(t,z)\right)-E((\frac{t}{z}))^{i+۱}$$

اثبات : با استفاده از تساوی $E(X)=E(E(X|Y))$ می توان نوشت :

$$E(Y_i)=E\left(E\Big(\frac{X_i-X(۱)}{X(n)-X(۱)}|X_{(۱)}=t,X_{(n)}=z\Big)\right)$$
$$=E(\int\Big(\frac{X_i-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\Big)f(x_i|X_{(۱)}=t,X_{(n)}=z)dx_i)$$
$$=E(\frac{۱}{z-t}\{E(x_i|X_{(۱)}=t,X_{(n)}=z)-t\})$$

با توجه به اینکه $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}} = \left|\frac{t}{z}\right| \leq 1$ چون $\frac{1}{z-t} = \frac{1/z}{1-t/z} = \frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{t}{z})^i$ امید را که $E(X_i|t,z) = g(t,z)$ به فرم ساده تر زیر می توانیم بنویسیم :

$$E(Y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} E\left(\frac{t^i}{z^{i+1}} g(t,z)\right) - E(\frac{t}{z})^{i+1}$$

نکته قابل توجه این است که برای پیدا کردن امید ریاضی فوق در حالتی که $X_{(1)} < X_i < X_{(n)}$ است نیاز به توزیع شرطی $f(x_i|X_{(1)} = t, X_{(n)} = z)$ داریم که در لم زیر آن را معرفی می کنیم .

لم ۱ برای متغیر تصادفی پیوسته X_i که $X_i \neq X_{(1)}, X_{(n)}$ است، تابع چگالی شرطی $f(x_i|X_{(1)} = t, X_{(n)} = z)$ عبارت است از:

$$f(x_i|t,z) = \frac{(n-2)!}{m!(n-3-m)!}\frac{(F(x_i)-F(t))^m(F(z)-F(x_i))^{n-3-m}f(x_i)}{(F(z)-F(t))^{n-2}}; \quad m = 1, ..., n-3$$

روش دوم : پیداکردن امید ریاضی Y_i با استفاده از آماره های ترتیبی X_i

اگر $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ آماره های ترتیبی X_i ها برای $i = 1, 2, ..., n$ باشد، آنگاه با استفاده از این تساوی $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)}$ داریم :

$$Y_i = \frac{X_i - X(1)}{X(n) - X(1)} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - X(1)}{X(n) - X(1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - X(1)}{X(n) - X(1)}$$

از طرفین عبارت به دست آمده امید ریاضی می گیریم :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = E(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - X(1)}{X(n) - X(1)})$$

با توجه به ویژگی سوم Y_i ها متغیرهای تصادفی هم توزیع اند چون X_i ها مستقل و هم توزیع اند. پس

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = nE(Y_i)$$

اما طرف دوم تساوی بالا را به صورت زیر می نویسیم :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - X(1)}{X(n) - X(1)}\right) = E\left(\frac{X_{(1)} - X(1)}{X(n) - X(1)}\right) + E\left(\frac{X_{(2)} - X(1)}{X(n) - X(1)}\right) + ...$$

$$+E\left(\frac{X_{(n)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)$$
$$=E\left(\frac{X_{(۲)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+...+E\left(\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+...$$
$$+E\left(\frac{X_{(n-۱)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+۱$$

هر تابع داخل پرانتز یک متغیر تصادفی است، چون X_i ها متغیر تصادفی اند. اما آماره های ترتیبی مستقل و هم توزیع نیستند، بنابراین که $\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}$ ها برای $i=۲,...,n-۱$ مستقل و هم توزیع نیستند. پس باید هرکدام از امید ریاضی ها را محاسبه نمود.

$$E(Y_i)=\frac{E\left(\frac{X_{(۲)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+...+E\left(\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+...+E\left(\frac{X_{(n-۱)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)+۱}{n}$$

$$E\left(\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)=\iiint\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}f(x_{(۱)},x_{(i)},x_{(n)})dx_n dx_i dx_۱;$$
$$i=۲,...,n-۱$$

انتگرال سه‌گانه فوق را تنها زمانی می توان به دست آورد که تابع چگالی X_i را داشته باشیم. پس از محاسبه امید ریاضی تک تک متغیرها امید Y_i را به دست می آوریم .

واریانس Y_i

قضیه ۲ اگر X_i ها متغیرهای تصادفی با چگالی $f(X_i)$ باشند و تعریف کنیم:

$$E(X_i^۲|t,z)=g_۲(t,z)\ ,\qquad E(X_i|t,z)=g(t,z)$$

آنگاه واریانس Y_i عبارت است از

$$var(Y_i)=\sum_{i=۰}^{\infty}i\left\{E\left(\frac{t^{i-۱}}{z^{i+۱}}g(t,z)\right)-۲E\left(\frac{t^i}{z^{i+۱}}g(t,z)\right)+E((\frac{t}{z}))^{i+۱}\right\}$$

اثبات : می دانیم که فرمول واریانس برای متغیر تصادفی Y_i به صورت زیر است :

$$var\left(\frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}\right)=var(Y_i)=E(Y_i^۲)-(E(Y_i))^۲$$

با توجه به مطالب قبل، کافی است $E(Y_i^{۲})$ را محاسبه کنیم که برای آن از روش ارایه شده برای $E(Y_i)$ استفاده می کنیم .

$$E(Y_i^{۲}) = E(E(Y_i^{۲}|X_{(۱)} = t, X_{(n)} = z))$$
$$= \int \frac{X_i^{۲} - ۲X_i t + t^{۲}}{(z-t)^{۲}} f(x_i|t,z)dx_i$$

نکته ۱

$$\frac{۱}{(z-t)^{۲}} = \frac{d(\frac{۱}{z-t})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{z}\sum_{i=۰}^{\infty}(\frac{t}{z})^i\right) = \sum_{i=۰}^{\infty}\frac{it^{i+۱}}{z^{i+۱}}$$

با استفاده از نکته فوق انتگرال بالا را می توان به صورت زیر ساده نمود :

$$= \sum_{i=۰}^{\infty}\frac{it^{i+۱}}{Z^{i+۱}}\{E(X_i^{۲}|t,z) - ۲tE(X_i|t,z) + t^{۲}\} = \sum_{i=۰}^{\infty}\frac{it^{i+۱}}{Z^{i+۱}}\{g_{۲}(t,z) - ۲tg(t,z) + t^{۲}\}$$
$$E(Y_i^{۲}) = \sum_{i=۰}^{\infty} i\left\{E\left(\frac{t^{i-۱}}{Z^{i+۱}}g_{۲}(t,z)\right) - ۲E\left(\frac{t^i}{Z^{i+۱}}g(t,z)\right) + E(\frac{t}{z})^{i+۱}\right\}$$

تابع مولد گشتاور Y_i

قضیه ۳ اگر X_i ها متغیرهای تصادفی با توزیع $F(X_i)$ باشند وداشته باشیم $g_j(t,z) = \int X_i^j f(x_i|t,z)dx_i$ آنگاه تابع مولد گشتاور [7] Y_i عبارت است از :

$$M_{Y_i}(w) = \sum_{j=۰}^{\infty}\sum_{k=۰}^{j}\frac{۱}{j!}\binom{j}{k}(-۱)^{j-k}E(\frac{w^j}{(z-t)^j}t^{j-k}g_j(t,z))$$

اثبات : طبق فرمول تابع مولد گشتاور و $e^h = \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{h^k}{k!}$ داریم :

$$M_{Y_i}(w) = E\left(e^{w\frac{X_i - X(۱)}{X(n)-X(۱)}}\right) = E(\sum_{j=۰}^{\infty}\frac{(w\frac{X_i-X(۱)}{X(n)-X(۱)})^j}{j!})$$
$$= E(\frac{w^j}{(z-t)^j}\int(X_i - X_{(۱)})^j f(x_i|t,z)dx_i)$$

[7] *Moment generating function*

با استفاده از بسط دو جمله ای و فرض قضیه خواهیم داشت :

$$\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}E(\frac{w^j}{(z-t)^j}t^{j-k}\int x_i^k f(x_i|t,z)dx_i)$$
$$=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}E(\frac{w^j}{(z-t)^j}t^{j-k}g_k(t,z))$$
$$M_{Y_i}(w)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{j!}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}E(\frac{w^j}{(z-t)^j}t^{j-k}g_k(t,z))$$

۴ نرمال سازی با توزیع یکنواخت

فرض می کنیم $X_1,...,X_n$ مستقل و هم توزیع از خانواده چگالی یکنواخت $[0,1]$ باشند، تابع توزیع تجمعی Y_i به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
F_{Y_i}(y) &= p\Big(\frac{(X_i-X(1)}{X(n)-X(1)}\le y\Big)\\
&= \iint p\Big(\frac{(X_i-X(1)}{X(n)-X(1)}\le y\big|X_{(1)}=t,X_{(n)}=z\Big)f(X_{(1)}=t,X_{(n)}=z)dzdt\\
&= \int_0^1\int_t^1\int_0^{y(z-t)+t}dxn(n-1)(z-t)^{n-2}dzdt
\end{aligned}$$

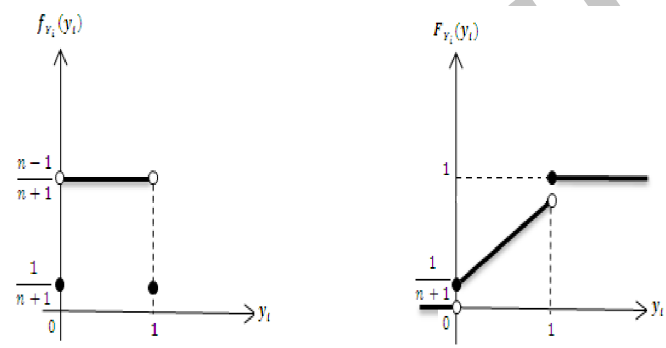
پس:

$$F_{Y_i}(y)=\begin{cases} 0 & y<0\\ y\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{n+1} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

برای $0 < Y_i < 1$ تابع چگالی آن عبارت است از : $f_{Y_i}(y) = \frac{n-1}{n+1}$ طبق قضیه ۱ داریم :

$$f_{Y_i}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{اگر} \quad Y_i = 0 \\ \frac{n-1}{n+1} & \text{اگر} \quad 0 < Y_i < 1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{اگر} \quad Y_i = 1 \end{cases}$$

شکل تابع چگالی و توزیع Y_i به صورت زیر است :



شکلِ ۳: تابع توزیع (سمت راست) و تابع چگالی احتمال(سمت چپ) Y_i

پس امید ریاضی آن به صورت زیر است :

$$E(Y_i) = \int_0^1 y\frac{n-1}{n+1}dy + 0 * \frac{1}{n+1} + 1 * \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$var(Y_i) = \int_0^1 y^2\frac{n-1}{n+1}dy + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4} = \frac{n+5}{12(n+1}$$

$$M_{Y_i}(y) = \int_0^1 e^{ty}\frac{n-1}{n+1}dy + \frac{e^0}{n+1} + \frac{e^t}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}\frac{e^t-1}{t} + \frac{e^t+1}{n+1}$$

آماره های ترتیبی متغیر تصادفی Y_i یعنی $Y_{(1)} \leq ... \leq Y_{(i)} \leq ... \leq Y_{(n)}$، دارای توزیع بتا

هستند، با فرض $X_i \sim U(\circ, ۱)$، و اینکه $Y_{(i)} \equiv \frac{X_{(i)}-X(۱)}{X(n)-X(۱)}$، و تغییر متغیرهای زیر داریم:

$$\begin{cases} W = X_{(۱)} \\ R + W = X_{(n)} \\ Y_{(i)}R + W = X_{(i)} \end{cases}$$

$$f_{X_{(۱)},X_{(i)},X_{(n)}}(x_۱, x_i, x_n) = \frac{n!}{(i-۲)!(n-i-۱)!}(x_i - x_۱)^{i-۲}(x_n - x_i)^{n-i-۱}$$

$$f_{W,Y_i,R}(w, y_i, r) = \frac{n!}{(i-۲)!(n-i-۱)!}r^{n-۲}y_i^{i-۲}(۱-y_i)^{n-i-۱}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i) &= \int_\circ^۱ \int_\circ^{۱-r} \frac{n!}{(i-۲)!(n-i-۱)!}r^{n-۲}y_i^{i-۲}(۱-y_i)^{n-i-۱}dwdr \\ &= \frac{n!}{(i-۲)!(n-i-۱)!}r^{n-۲}y_i^{i-۲}(۱-y_i)^{n-i-۱}\frac{(n-۲)!}{n!} \\ &= \frac{(n-۲)!}{(i-۲)!(n-i-۱)!}r^{n-۲}y_i^{i-۲}(۱-y_i)^{n-i-۱} \end{aligned}$$

و در نتیجه $Y_{(i)}$ دارای توزیع بتا است.

۵ نتیجه گیری

بی مقیاس سازی متغیرهای تصادفی کاربردهای زیادی از جمله در روشهای تصمیم گیری چند معیاره و نیز تحلیل شبکه های عصبی دارد ، در این مقاله به معرفی تبدیل نرمال سازی پرداخته و در قالب چند قضیه تابع توزیع، امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور آن را بدست آورده و به کمک توزیع یکنواخت نتایج به دست امده را بررسی نمودیم .

مراجع

[۱] مود الکساندر م ، گریبیل فرانکلین آ، بوز دون س ، مقدمه ای بر نظریه آمار،

ترجمه علی مشکانی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد،چاپ هفتم،تابستان ۱۳۸۵.

[2] George Casella,Roger L. Berger,2002,*Statistical inference*, Wadsworth Group, United States of America.

[3] D. G .Kab, 1969 , *Some Distribution Problems of Order Statistics from Discrete Populations* ,ST.Mary's University, Halifax, N.S, Canada.

[4] Xuan Liu, Tijun Lu, and Huibo Jia, 2004, *Application Research of Artifical Neural Network in Network Attached Optical Jukebox* , International journal of Information Technology,Vol.11,No.5, pp.8-25.