آماره آزمون فازی بر پایه فرضیه‌ها و داده‌های فازی

محسن عارفی، سید محمود طاهری
گروه آمار، دانشگاه صنعتی اصفهان

در این مقاله، مسئله آزمون فرضیه‌های آماری، در حالتی که فرضیه‌ها و داده‌ها هر دو فازی باشند، مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد. در این راستا، ابتدا فرضیه‌های فازی به صورتی مناسب تعریف می‌شود. همچنین یک برآورد نقطه‌ای فازی بر اساس داده‌های فازی معرفی می‌گردد. آنگاه، آماره آزمون فازی بر اساس سطوح تراز فرضیه صفر فازی و تحت سطوح تراز برآورد نقطه‌ای فازی ساخته می‌شود. بعد از محاسبه آماره آزمون فازی، با معرفی یک سطح اعتبار، فرضیه‌های فازی مورد ارزیابی و آزمون قرار می‌گیرند. این روش برای آزمون فرضیه‌های فازی میانگین و واریانس در توزیع نرمال تشریح شده است.

واژه‌های کلیدی: آماره آزمون فازی، داده فازی، سطح اعتبار، فرضیه فازی.

۱ مقدمه

در روش‌های کلاسیک، آزمون یک فرضیه آماری بر این اصول استوار است که فرضیه مورد آزمون و داده‌ها هر دو دقیق باشند. اما در انجام برخی استنباطها، در نظر گرفتن یک فرضیه به صورت دقیق منطقی به نظر نمی‌رسد و یا صورت‌بندی آن به صورت نادقیق جواب بهتری را به ما می‌دهد. از طرفی دیگر ممکن است که داده‌های مشاهده شده نیز نادقیق یا مبهم باشند. یک راه مناسب برای مدل‌سازی چنین فرضیه‌ها و داده‌هایی، استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی است که توسط زاده (۱۹۶۵) معرفی شده است. در این راستا، این مقاله به بررسی آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس یک آماره آزمون فازی هنگامی که داده‌ها نیز فازی باشند، می‌پردازد. این مقاله، تعمیم نگرش طاهری و عارفی (۲۰۰۹) برای حالتی است که داده‌ها نیز فازی باشند.
آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی به وسیله نویسندگان بسیاری مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. مسئله آزمون فرضیه با داده‌های فازی توسط کازالس و همکاران (۱۹۸۶)، کازالس و گیل (۱۹۸۹)، گرزگورزوسکی (۲۰۰۰)، و مونتنگرو و همکاران (۲۰۰۱) مورد

بررسی قرار گرفته است. آزمون فرضیه‌های فازی توسط ترابی و شمشیری (۱۳۸۶)، عارفی و طاهری (۱۳۸۶)، آرنولد (۱۹۹۶،۱۹۹۸)، طاهری و بهبودیان (۱۹۹۹،۲۰۰۱)، و طاهری و عارفی (۲۰۰۹) مورد مطالعه قرار گرفته است. مبحث آزمون فرضیه‌های فازی بر پایه داده‌های فازی، نیز توسط گرزگورزوسکی (۲۰۰۲)، طاهری و بهبودیان (۲۰۰۶) و ترابی و همکاران (۲۰۰۶) بررسی شده است. شیوه آزمون فرضیه بر اساس pـمقدار در یک محیط فازی توسط فیلزموزر و فیتل (۲۰۰۴) و پرچمی و همکاران (۲۰۱۰) مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. همچنین باکلی (۲۰۰۴) آزمون فرضیه‌های آماری را بر اساس یک آماره آزمون فازی مورد بررسی و مطالعه قرار داده است. برای بررسی بیشتر در مورد مباحث مختلف آمار فازی به‌ویژه آزمون فرضیه در محیط فازی به فیتل (۱۹۹۶)، طاهری (۲۰۰۳)، و طاهری و ماشین‌چی (۱۳۸۷) مراجعه نمایید.

در زیر به معرفی برخی از مفاهیم ضروری و نمادگذاریهای مورد استفاده در مقاله می‌پردازیم.

فرض کنید Ω یک مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، یک تابع به صورت $\tilde{A}: X \to [0,1]$ است، که برای هر $0 < \alpha \leq 1$، αـبرش (سطح تراز) $\tilde{A}$ آن به صورت $\tilde{A}[\alpha] = \{x | \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می‌شود.

یک عدد فازی $\tilde{N}$، یک زیر مجموعه فازی از اعداد حقیقی با دو شرط زیر می‌باشد:

الف) $x \in \Re$ وجود داشته باشد که $\tilde{N}(x)$ برابر یک باشد.

ب) $\tilde{N}[\alpha]$ یک فاصله بسته و کراندار به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ باشد.

یک عدد فازی مثلثی $\tilde{T}_1 = (a_1, a_2, a_3)_T$ به وسیله سه عدد $a_1 < a_2 < a_3$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\widetilde{T}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 < x \leq a_2, \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 < x \leq a_3. \end{cases}$$

فرض کنید $I = [a,b]$ و $J = [c,d]$ دو بازه بسته از $\Re$ باشند. آنگاه حساب بازه‌ای برای آنها به صورت زیر تعریف می‌شود (در حالت تقسیم فرض می‌شود که بازه $[c,d]$ شامل صفر نیست)

$$\begin{aligned} & I + J = [a+c, b+d], \\ & I - J = [a-d, b-c], \\ & I.J = [\alpha_1, \beta_1], \qquad \alpha_1 = \min\{ac, ad, bc, bd\}, \quad \beta_1 = \max\{ac, ad, bc, bd\}, \\ & I \div J = [\alpha_2, \beta_2], \qquad \alpha_2 = \min\{\tfrac{a}{c}, \tfrac{a}{d}, \tfrac{b}{c}, \tfrac{b}{d}\}, \quad \beta_2 = \max\{\tfrac{a}{c}, \tfrac{a}{d}, \tfrac{b}{c}, \tfrac{b}{d}\}. \end{aligned}$$

۲ فرضیه‌های فازی

یکی از مسایل بسیار مهم در آزمون فرضیه‌های آماری، تنظیم فرضیه‌های مورد آزمون است. به علل مختلفی ممکن است نتوانیم فرضیه‌ها را به طور دقیق بررسی نماییم و یا بررسی فرضیه‌ها به صورت نادقیق نتایج بهتری را بیان نمایید. در این راستا فرضیه‌های فازی ساده، یکطرفه و دوطرفه را به صورت زیر مدل‌بندی می‌کنیم (برای بررسی بیشتر به طاهری و عارفی (۲۰۰۹) مراجعه نمایید).

تعریف ۱ فرض کنید θ_0 یک مقدار ثابت معلوم باشد.

الف) هر فرضیه به صورت $(H: \theta \textit{ is approximately } \theta_0)$ یک فرضیه ساده فازی است، که با مجموعه فازی $\widetilde{H}_0 = (a_1, \theta_0, a_3)_T$ فرمول‌بندی می‌شود.

ب) هر فرضیه به صورت $(H: \theta \textit{ is not approximately } \theta_0)$ یک فرضیه دوطرفه فازی است، که با مجموعه فازی $\widetilde{H}_1 = 1 - \widetilde{H}_0$ فرمول‌بندی می‌شود.

ج) هر فرضیه به صورت $(H: \theta \textit{ is essentially smaller than } \theta_0)$ یک فرضیه یکطرفه چپ فازی است، که با مجموعه فازی $\widetilde{H}_{1L}$ فرمول‌بندی می‌شود.

د) هر فرضیه به صورت $(H_1: \theta \textit{ is essentially larger than } \theta_0)$ یک فرضیه یکطرفه راست فازی است، که با مجموعه فازی $\widetilde{H}_{1S}$ فرمول‌بندی شود.

که در فرضیه‌های فوق، $\widetilde{H}_0 = (a_1, \theta_0, a_3)_T$، $\widetilde{H}_1 = 1 - \widetilde{H}_0$، $\widetilde{H}_{1L}$ و $\widetilde{H}_{1S}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{H}_{1L} = (a'_1, \theta_0)_{EL} = \begin{cases} \frac{\theta - a'_1}{\theta_0 - a'_1} & a'_1 \leq \theta < \theta_0, \\ 1 & \theta_0 \leq \theta, \end{cases}$$

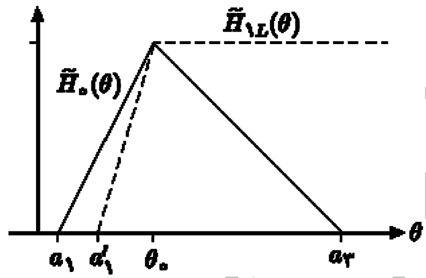
$$\widetilde{H}_{1S} = (\theta_0, a'_3)_{ES} = \begin{cases} 1 & \theta \leq \theta_0, \\ \frac{a'_3 - \theta}{a'_3 - \theta_0} & \theta_0 \leq \theta < a'_3, \end{cases}$$

که $a'_1 \leq a_1$ و $a_3 \leq a'_3$.

با توجه به حجم زیاد مطالب، فقط آزمون فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه یکطرفه راست فازی بررسی می‌گردد. بنابراین در بخش بعدی، فقط فرضیه‌های یکطرفه فازی زیر را

آزمون می‌کنیم (شکل ۱):

$$\left\{\begin{array}{l} H_{\circ}: \theta \ is \ approximately \ \theta_{\circ}, \\ H_{\backslash L}: \theta \ is \ essentially \ larger \ than \ \theta_{\circ}, \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{l} H_{\circ}: \theta \ is \ \widetilde{H}_{\circ}, \\ H_{\backslash}: \theta \ is \ \widetilde{H}_{\backslash L}, \end{array}\right.$$



شکل ۱: فرضیه‌های یکطرفه فازی

۳ آزمون فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه یکطرفه راست فازی

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از یک تابع چگالی احتمال (یا تابع جرم احتمال) $f(x;\theta)$ باشد، که θ یک پارامتر نامعلوم است. فرض کنید داده‌های موجود به جای داده‌های دقیق $x_1, ..., x_n$ به صورت اعداد فازی $\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_n$ با αـبرش‌های $\widetilde{X}_i[\alpha] = [\widetilde{X}_i^L, \widetilde{X}_i^U]$ مشاهده شده باشند. یک برآورد نقطه‌ای فازی برای پارامتر θ به صورت زیر به دست می آید.

تعریف ۱ فرض کنید $\theta^* = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ یک برآورد نقطه‌ای برای θ بر اساس داده‌های دقیق $x_1, ..., x_n$ باشد. αـبرش برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{\theta}^*$، بر پایه αـبرش‌های اعداد فازی $\widetilde{X}_i, \ i = 1, ..., n$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{\theta}^*[\alpha] := \left\{u(x_1, x_2, ..., x_n); \ x_i \in \widetilde{X}_i[\alpha], \ i = 1, 2, ..., n\right\}.$$

مثال ۱ فرض کنید یک نمونه تصادفی به حجم n از یک توزیع نرمال $N(\theta, \sigma^2)$ گرفته شده است و اعداد فازی $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, ..., \widetilde{X}_n$ به‌دست آمده‌اند.

• **برآورد نقطه‌ای فازی برای میانگین:** برآورد نقطه‌ای معمول برای θ به صورت $\theta^* = \overline{x}$

است. بر پایه α-برش‌های اعداد فازی $\widetilde{X}_i,\ i=1,...,n$، α-برش برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{\theta}^*=\widetilde{\overline{X}}$ برابر است با

$$\begin{aligned}\widetilde{\overline{X}}[\alpha] &= \left\{\overline{x}=\frac{x_1+...+x_n}{n};\ x_i\in\widetilde{X}_i[\alpha],\ i=1,2,...,n\right\}\\ &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^L,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^U\right]=[\widetilde{\overline{X}}^L,\widetilde{\overline{X}}^U].\end{aligned}$$

• **برآورد نقطه‌ای فازی برای واریانس:** برآورد نقطه‌ای معمول برای σ^2 به صورت $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ است. با جایگذاری α-برش‌های $\widetilde{X}_i,\ i=1,...,n,$ ($\widetilde{X}_i[\alpha]=[\widetilde{X}_i^L,\widetilde{X}_i^U]$) به جای x_i، α-برش‌های برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{S^2}$ به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}\widetilde{S^2}[\alpha] &= \left\{s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2;\ x_i\in\widetilde{X}_i[\alpha],\ i=1,2,...,n\right\}\\ &= \left[\widetilde{S^2}^L[\alpha],\widetilde{S^2}^U[\alpha]\right],\end{aligned}$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases}\widetilde{\overline{X}}[\alpha]=[\widetilde{\overline{X}}^L,\widetilde{\overline{X}}^U]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\widetilde{X}_i^L,\widetilde{X}_i^U]=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^L,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^U\right],\\ \widetilde{S^2}^L[\alpha]=\max\left[0,\min\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^L-\widetilde{\overline{X}}^U)^2,\right.\right.\\ \qquad\left.\left.\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^L-\widetilde{\overline{X}}^U)(\widetilde{X}_i^U-\widetilde{\overline{X}}^L),\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^U-\widetilde{\overline{X}}^L)^2\right]\right],\\ \widetilde{S^2}^U[\alpha]=\max\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^L-\widetilde{\overline{X}}^U)^2,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^L-\widetilde{\overline{X}}^U)(\widetilde{X}_i^U-\widetilde{\overline{X}}^L),\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{X}_i^U-\widetilde{\overline{X}}^L)^2\right].\end{cases}$$

در ادامه، می‌خواهیم یک شیوه برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس آماره آزمون فازی و تحت داده‌های فازی $\widetilde{X}_1,...,\widetilde{X}_n$ معرفی نماییم. فرضیه‌های یکطرفه فازی زیر را که در بخش قبل معرفی گردید، در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}H_0:\theta\ is\ approximately\ \theta_0,\\ H_{1L}:\theta\ is\ approximately\ larger\ than\ \theta_0,\end{cases}\equiv\begin{cases}H_0:\theta\ is\ \widetilde{H}_0,\\ H_1:\theta\ is\ \widetilde{H}_{1L},\end{cases}$$

که در آن $\widetilde{H}_{\circ} = (a_{۱}, \theta_{\circ}, a_{۳})_T$ و $\widetilde{H}_{۱L} = (a'_{۱}, \theta_{\circ})_{EL}$ $(a_{۱} \leq a'_{۱})$. در حالت معمولی، فرضیه ساده $H_{\circ} : \theta = \theta_{\circ}$ در برابر فرضیه یکطرفه $H_{\circ} : \theta > \theta_{\circ}$، در سطح معناداری β، به صورت زیر آزمون می‌گردد:

$$\begin{cases} Q_{\circ} \geq Q_{۱-\beta} \Rightarrow RH_{\circ}, \\ Q_{\circ} < Q_{۱-\beta} \Rightarrow AH_{\circ}, \end{cases}$$

که در آن $Q_{\circ}$ آماره آزمون معمولی و $Q_{۱-\beta}$ چندک مورد نظر از آماره آزمون است. اکنون، شیوه آزمون فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه یکطرفه راست فازی بر اساس داده‌های فازی $\widetilde{X}_{۱}, \widetilde{X}_{۲}, ..., \widetilde{X}_n$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

الف) ابتدا بر اساس تعریف 1 یک برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{\theta}^*$ برای پارامتر θ به دست می‌آوریم.

ب) با جایگذاری αـبرش‌های برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{\theta}^*$ به جای برآورد نقطه‌ای θ^* و αـبرش‌های فرضیه صفر فازی $\widetilde{H}_{\circ}$ به جای فرضیه صفر $\theta_{\circ}$ در آماره آزمون معمولی $Q_{\circ}$، و با استفاده از حساب بازه‌ای، αـبرش‌های آماره آزمون فازی $\widetilde{Z}$ محاسبه می‌شود.

اکنون بر اساس آماره آزمون فازی فوق، تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا رد فرضیه صفر فازی، در سطح معناداری β، بر اساس اصول چهارگانه زیر انجام می‌گیرد (به طاهری و عارفی (۲۰۰۹) مراجعه نمایید).

۱ـ مساحت تحت آماره آزمون فازی را محاسبه و با A_T نشان می‌دهیم.

۲ـ مساحتی از آماره آزمون که بزرگتر از چندک $Q_{۱-\beta}$ است را محاسبه و با A_R نشان می‌دهیم.

۳ـ مقدار $\phi \in (۰, ۱)$ را به عنوان سطح اعتبار انتخاب می‌کنیم.

۴ـ سرانجام تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه ساده فازی به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\begin{cases} \frac{A_R}{A_T} \geq \phi \Rightarrow RH_{\circ}, \\ \frac{A_R}{A_T} < \phi \Rightarrow AH_{\circ}. \end{cases}$$

نکته ۱ باید توجه داشت که در شیوه فوق برای پذیرش یا رد فرضیه صفر با یک آماره آزمون فازی، از یک سطح اعتبار $\phi \in (۰, ۱)$ استفاده می‌شود. بنابراین این شیوه انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به شیوه کلاسیک از خود نشان می‌دهد.

نکته ۲ باید توجه داشت که اگر در آزمون فرضیه‌های معمولی، مقداره آماره آزمون به چندک مورد نظر نزدیک باشد، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر با حساسیت

خاصی مواجه است. در این مواقع استفاده از شیوه‌های فازی مناسب به نظر می‌رسد. یکی از این شیوه‌ها استفاده از روش فوق تحت داده‌ها و فرضیه‌های فازی است (برای بررسی شیوه‌های دیگر به باکلی (۲۰۰۴)، طاهری و عارفی (۲۰۰۹) و عارفی و طاهری (۱۳۸۶) مراجعه نمایید).

۴ آزمون فرضیه‌های فازی در توزیع نرمال

۴-۱ آزمون فرضیه‌های فازی برای میانگین

فرض کنید یک نمونه تصادفی به حجم n از یک توزیع نرمال $N(\theta,\sigma^2)$ (با σ^2 معلوم) گرفته شده باشد و اعداد فازی $\widetilde{X}_1,...,\widetilde{X}_n$ مشاهده شده باشند. می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را، در سطح معناداری β، آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \textit{ is approximately } \theta_0, \\ H_{1L} : \theta \textit{ is approximately larger than } \theta_0, \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \theta \textit{ is } \widetilde{H}_0, \\ H_1 : \theta \textit{ is } \widetilde{H}_{1L}. \end{cases}$$

αـبرش‌های برآورد نقطه‌ای فازی در مثال 1 به صورت $\widetilde{\overline{X}}[\alpha] = [\widetilde{\overline{X}}^L, \widetilde{\overline{X}}^U]$ به دست آمد. مقدار آماره آزمون معمولی تحت فرض صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ به صورت $z_0 = \frac{\overline{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ است. با جایگذاری αـبرش‌های برآورد نقطه‌ای فازی $\widetilde{\overline{X}}$ به جای $\overline{x}$ و αـبرش‌های فرضیه صفر فازی $\widetilde{H}_0$ به جای فرضیه صفر θ_0 در آماره آزمون معمولی z_0، و با استفاده از حساب بازه‌ای، αـبرش‌های آماره آزمون فازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{Z}[\alpha] = \frac{\widetilde{\overline{X}}[\alpha] - \widetilde{H}_0[\alpha]}{\sigma/\sqrt{n}} = \left[\frac{\widetilde{\overline{X}}^L - a_3 + (a_3 - \theta_0)\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{\widetilde{\overline{X}}^U - a_1 - (\theta_0 - a_1)\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}\right].$$

اکنون بر اساس اصول چهارگانه بیان شده در بخش قبل، می‌توان در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی قضاوت کرد.

مثال ۱ فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۵۰$ از یک توزیع نرمال $N(\theta, \sigma^۲ = ۹)$، اعداد فازی مثلثی زیر مشاهده شده‌اند

$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$	$(x_i, r_i)_T$
$(۲/۹, ۰/۴)_T$	$(-۰/۴, ۰/۲)_T$	$(۲/۱, ۰/۲)_T$	$(۱/۰, ۰/۲)_T$	$(-۳/۴, ۰/۴)_T$	$(۲/۸, ۰/۳)_T$	$(۱/۸, ۰/۲)_T$
$(۶/۸, ۱/۴)_T$	$(۰/۹, ۰/۲)_T$	$(۰/۹, ۰/۲)_T$	$(۱/۴, ۰/۱)_T$	$(-۲/۱, ۰/۲)_T$	$(۲/۴, ۰/۱)_T$	$(۱/۳, ۰/۲)_T$
$(۶/۰, ۰/۸)_T$	$(۳/۸, ۰/۴)_T$	$(۳/۷, ۰/۷)_T$	$(۱/۳, ۰/۳)_T$	$(۳/۰, ۰/۶)_T$	$(۰/۸, ۰/۱)_T$	$(۱/۹, ۰/۳)_T$
$(۳/۰, ۰/۶)_T$	$(-۱/۳, ۰/۲)_T$	$(۴/۴, ۰/۴)_T$	$(۱/۲, ۰/۲)_T$	$(-۲/۸, ۰/۴)_T$	$(۰/۳, ۰/۱)_T$	$(۵/۰, ۱/۰)_T$
$(۶/۹, ۱/۰)_T$	$(۶/۹, ۱/۲)_T$	$(۷/۳, ۱/۵)_T$	$(۶/۰, ۱/۲)_T$	$(۱/۷, ۰/۳)_T$	$(۱/۶, ۰/۳)_T$	$(۱/۶, ۰/۲)_T$
$(۵/۷, ۱/۰)_T$	$(۱/۸, ۰/۲)_T$	$(۶/۲, ۱/۱)_T$	$(۵/۱, ۱/۰)_T$	$(-۱/۲, ۰/۲)_T$	$(۰/۵, ۰/۱)_T$	$(۰/۹, ۰/۲)_T$
$(۳/۱, ۰/۴)_T$	$(-۰/۷, ۰/۱)_T$	$(۴/۹, ۱/۰)_T$	$(۵/۸, ۱/۱)_T$	$(-۴/۶, ۰/۳)_T$	$(۳/۴, ۰/۴)_T$	$(۳/۴, ۰/۵)_T$
$(۵/۸, ۱/۱)_T$						

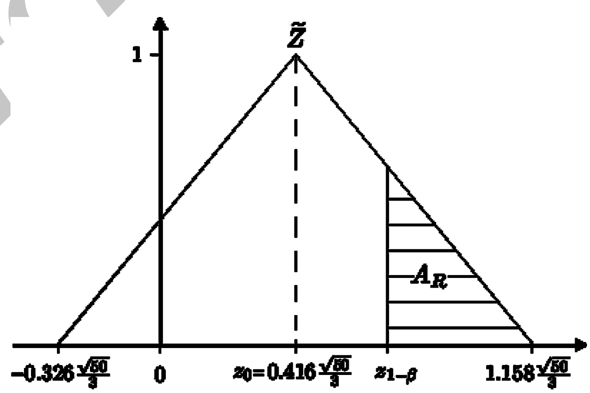
برآورد نقطه‌ای فازی بر اساس این داده‌های فازی به صورت یک عدد فازی مثلثی $\widetilde{\widetilde{X}} = (\overline{x} - \overline{r}, \overline{x}, \overline{x} + \overline{r})_T = (۱/۹۲۴, ۲/۴۱۶, ۲/۹۰۸)_T$ است که در آن $\overline{x} = ۲/۴۱۶$ و $\overline{r} = ۰/۴۹۲$. فرض کنید بخواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری $\beta = ۰/۰۵$ آزمون نماییم

$$\begin{cases} H_۰ : \theta \ is \ approximately \ ۲ \\ H_{۱L} : \theta \ is \ approximately \ larger \ than \ ۲ \end{cases} \equiv \begin{cases} H_۰ : \theta \ is \ \widetilde{H}_۰, \\ H_۱ : \theta \ is \ \widetilde{H}_{۱L}, \end{cases}$$

که در آن $\widetilde{H}_۰ = (۱/۷۵, ۲, ۲/۲۵)_T$ و $\widetilde{H}_{۱L} = (۱/۸۰, ۲)_{EL}$. در نتیجه، α-برش‌های آماره آزمون فازی به صورت زیر به دست می آید:

$$\widetilde{Z}[\alpha] = \frac{\widetilde{\widetilde{X}}[\alpha] - \widetilde{H}_۰[\alpha]}{\sigma/\sqrt{n}} = \left[(۰/۴۱۶ - ۰/۷۴۲(۱-\alpha)) \frac{\sqrt{۵۰}}{۳}, (۰/۴۱۶ + ۰/۷۴۲(۱-\alpha)) \frac{\sqrt{۵۰}}{۳} \right].$$

بنابراین، $A_T = ۰/۷۴۲ \frac{\sqrt{۵۰}}{۳} = ۱/۷۴۸۹$ و $A_R = ۰/۶۲۰۲$. لذا $A_R/A_T = ۰/۳۵۴۶$، و فرض صفر فازی برای هر سطح اعتبار $\phi \in (۰, ۰/۳۵۴۶]$ رد می‌شود (شکل ۲).



شکل ۲: آماره آزمون فازی برای فرضیه‌های فازی در مثال ۱

۲-۴ آزمون فرضیه‌های فازی برای واریانس

فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی به حجم n از یک توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^{۲})$ (μ نامعلوم)، اعداد فازی $\widetilde{X}_{۱},...,\widetilde{X}_n$ مشاهده شده‌اند. می‌خواهیم فرضیه‌های یکطرفه فازی زیر را در سطح معناداری β آزمون نماییم

$$\begin{cases} H_{\circ}: \theta \text{ is approximately } \theta_{\circ}, \\ H_{۱L}: \theta \text{ is approximately larger than } \theta_{\circ}. \end{cases} \equiv \begin{cases} H_{\circ}: \theta \text{ is } \widetilde{H}_{\circ}, \\ H_{۱}: \theta \text{ is } \widetilde{H}_{۱L}, \end{cases}$$

α-برش‌های برآورد نقطه‌ای فازی برای $\sigma^{۲}$ در مثال 1 به صورت $\widetilde{S^{۲}}[\alpha] = \left[\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha], \widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]\right]$ داده شده است. تحت فرضیه صفر معمولی $H_{\circ}: \theta = \theta_{\circ}$، آماره آزمون معمولی $\frac{(n-۱)S^{۲}}{\theta_{\circ}}$ دارای توزیع کای‌دو $\chi^{۲}_{(n-۱)}$ است و مقدار آن را با $Q_{\circ} = \frac{(n-۱)s^{۲}}{\theta_{\circ}}$ نشان می‌دهیم. با جایگذاری α-برش‌های برآورد نقطه‌ای فازی به جای $s^{۲}$ و α-برش‌های فرضیه صفر فازی $\widetilde{H}_{\circ} = (a_{۱}, \theta_{\circ}, a_{۳})_T$ (در اینجا $a_{۱} > \circ$) به جای $\theta_{\circ}$ در $Q_{\circ}$، و با استفاده از حساب بازه‌ای، α-برش‌های آماره آزمون فازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{Z}[\alpha] = \frac{(n-۱)\widetilde{S^{۲}}[\alpha]}{\widetilde{H}_{\circ}[\alpha]} = \frac{(n-۱)\left[\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha], \widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]\right]}{[a_{۱}+\alpha(\theta_{\circ}-a_{۱}), a_{۳}-\alpha(a_{۳}-\theta_{\circ})]}$$

$$= \left[\frac{(n-۱)\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha]}{a_{۳}-\alpha(a_{۳}-\theta_{\circ})}, \frac{(n-۱)\widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]}{a_{۱}+\alpha(\theta_{\circ}-a_{۱})}\right].$$

اکنون، بر اساس آماره آزمون فازی فوق، فرضیه‌های فازی بر طبق اصول چهارگانه آزمون می‌شود.

مثال ۲ فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۲۰$ از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^{۲})$، داده‌های فازی زیر مشاهده شده‌اند:

$(r_{۱i}, x_i, r_{۲i})_T$	$(r_{۱i}, x_i, r_{۲i})_T$	$(r_{۱i}, x_i, r_{۲i})_T$	$(r_{۱i}, x_i, r_{۲i})_T$
$(۲/۸۲, ۳/۵۳, ۴/۲۴)_T$	$(۲/۱۰, ۲/۶۳, ۳/۱۶)_T$	$(۱/۲۱, ۱/۵۱, ۱/۸۱)_T$	$(۱/۰۳, ۱/۲۹, ۱/۵۵)_T$
$(۱/۱۰, ۱/۳۷, ۱/۶۴)_T$	$(۲/۱۸, ۲/۷۲, ۳/۲۶)_T$	$(۰/۱۸, ۰/۲۳, ۰/۲۸)_T$	$(۱/۸۰, ۲/۲۵, ۲/۷۰)_T$
$(۱/۶۹, ۲/۱۱, ۲/۵۳)_T$	$(۰/۵۶, ۰/۷۰, ۰/۸۴)_T$	$(۰/۴۳, ۰/۵۴, ۰/۶۵)_T$	$(۲/۴۶, ۳/۰۸, ۳/۷۰)_T$
$(۲/۸۳, ۳/۵۴, ۴/۲۵)_T$	$(۱/۲۹, ۱/۶۱, ۱/۹۳)_T$	$(۲/۴۴, ۳/۰۵, ۳/۶۶)_T$	$(۱/۳۰, ۱/۶۲, ۱/۹۴)_T$
$(۳/۸۸, ۴/۸۵, ۵/۸۲)_T$	$(۲/۰۸, ۲/۶۰, ۳/۱۲)_T$	$(۳/۱۳, ۳/۹۱, ۴/۶۹)_T$	$(۲/۶۳, ۳/۲۹, ۳/۹۵)_T$

در نتیجه، α-برش‌های برآورد نقطه‌ای فازی به صورت $\widetilde{S^{۲}}[\alpha]=\left[\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha],\widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]\right]$ است که در آن داریم

$$\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha]=\begin{cases}\frac{۱}{۱۹}[۲۸/۰۹۰۸۶\alpha^{۲}+۵۶/۱۸۱۷۱\alpha(۱-\alpha)+۹/۷۰۴۳۴(۱-\alpha)^{۲}] & ۰\leq\alpha\leq ۰/۶۹۴۲,\\ \frac{۱}{۱۹}[۲۸/۰۹۰۸۶\alpha^{۲}+۴۴/۹۳۵۷۸\alpha(۱-\alpha)+۳۵/۲۳۱۴۴(۱-\alpha)^{۲}] & ۰/۶۹۴۲<\alpha\leq ۱,\end{cases}$$

$$\widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]=\frac{۱}{۱۹}[۲۸/۰۹۰۸۶\alpha^{۲}+۶۷/۴۲۷۶۴\alpha(۱-\alpha)+۵۷/۷۲۳۳۰(۱-\alpha)^{۲}].$$

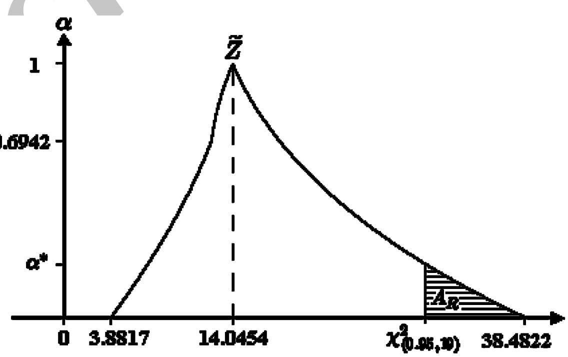
اکنون، می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری $\beta=۰/۰۵$ آزمون نماییم

$$\begin{cases}H_{\circ}:\theta\ is\ approximately\ ۲,\\ H_{۱L}:\theta\ is\ approximately\ larger\ than\ ۲,\end{cases}\equiv\begin{cases}H_{\circ}:\theta\ is\ \widetilde{H}_{\circ},\\ H_{۱}:\theta\ is\ \widetilde{H}_{۱L},\end{cases}$$

که در آن $\widetilde{H}_{\circ}=(۱/۵,۲,۲/۵)_{T}$ و $\widetilde{H}_{۱L}=(۱/۷۵,۲)_{EL}$. در نتیجه، α-برش آماره آزمون فازی برابر است با:

$$\widetilde{Z}[\alpha]=\left[\frac{(n-۱)\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha]}{a_{۳}-\alpha(a_{۳}-\theta_{\circ})},\frac{(n-۱)\widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]}{a_{۱}+\alpha(\theta_{\circ}-a_{۱})}\right]=\left[\frac{۱۹\widetilde{S^{۲}}^{L}[\alpha]}{۲/۵-۰/۵\alpha},\frac{۱۹\widetilde{S^{۲}}^{U}[\alpha]}{۱/۵+۰/۵\alpha}\right].$$

با استفاده از قاعده ذوزنقه، مساحت‌های $A_{T}=۱۳/۴۶۹۹$ و $A_{R}=۰/۸۴۲۵$ به دست می‌آید. لذا $A_{R}/A_{T}=۰/۰۶۲۵$، و فرضیه صفر فازی برای هر سطح اعتبار $\phi\in(۰,۰.۰۶۲۵]$ رد می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳: آماره آزمون فازی و مساحت‌های مورد نظر برای فرضیه‌های فازی در مثال ۲

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک آماره آزمون فازی برای آزمون فرضیه‌های فازی هنگامی که داده‌ها نیز فازی باشند، معرفی گردید. در نهایت، با توجه به شیوه بیان شده، فرضیه‌های فازی بر اساس دو معیار «سطح معناداری» و «سطح اعتبار» مورد ارزیابی و آزمون قرار گرفتند.

مراجع

[۱] ترابی، حمزه؛ شمشیری، رقیه (۱۳۸۶) تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی برای فرض‌های فازی. اندیشه آماری، **سال ۱۲**، شماره ۱ (ویژه‌ی کارگاه آمار و احتمال فازی)، ۲۶_۲۰.

[۲] طاهری، سید محمود؛ ماشین‌چی، ماشاء الله (۱۳۸۷) مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۳] عارفی، محسن؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۶) آزمون فرض فازی بر پایه آماره آزمون فازی. گزارش هفتمین کنفرانس سیستمهای فازی و هوشمند، دانشگاه فردوسی مشهد، ۵۷۹_۵۷۵.

[4] Arnold, B.F. (1996). An approach to fuzzy hypothesis testing, *Metrika,* **44**, 119-126.

[5] Arnold, B.F.(1998). Testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Fuzzy Sets and Systems,* **94**, 323-333.

[6] Buckley, J.J. (2004). Fuzzy statistics: hypothesis testing, *Soft Computing,* **9**, 512-518.

[7] Casals, M.R. and Gil, M.A. (1989). A note on the operativeness of Neyman-Pearson tests with fuzzy information, *Fuzzy Sets and Systems,* **30**, 215-220.

[8] Casals, M.R., Gil, M.A., and Gil, P. (1986). The fuzzy decision problem: an approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, *European Journal of Operation Research,* **27**, 371-382.

[9] Filzmoser, P. and Viertl, R. (2004). Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy P-value, *Metrika,* **59**, 21-29.

[10] Grzegorzewski, P. (2000). Testing statistical hypotheses with vague data, *Fuzzy Sets and Systems,* **112**, 501-510.

[11] Grzegorzewski, P. (2002). Testing fuzzy hypotheses with vague data. In: Bertoluzza C et al. (ed), *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data,* Springer, Heidelberg, pp: 213-225.

[12] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A., and Gil, M.A. (2001). Two sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable, *Information Sciences,* **133**, 89-100.

[13] Parchami, A., Taheri, S.M., and Mashinchi, M. (2010). Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Statistical Papers,* **51**, 209-226.

[14] Taheri, S.M. (2003). Trends in Fuzzy Statistics, *Austrian Journal of Statistics,* **32**, 239-257.

[15] Taheri, S.M. and Arefi, M. (2009). Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic, *Soft Computing,* **13**, 617-625.

[16] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (1999). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing, *Metrika,* **49**, 3-17.

[17] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2001). A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing, *Fuzzy Sets and Systems,* **123**, 39-48.

[18] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2006). On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,* **19**, 139-154.

[19] Torabi, H., Behboodian, J., and Taheri, S.M. (2006). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Metrika,* **64**, 289-304.

[20] Viertl, R. (1996). *Statistical Methods for Non-Precise Data.* CRC Press, Boca Roton.

[21] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control,* **8**, 338-353.