محاسبه حق‌بیمه باورمندی تحت توابع زیان متعادل موزون مناسب

حسین نبی زاده[۱]، میررحیم طالبی[۲]، محمود قزلباش[۲]
[۱] بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران
[۲] گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

روش معمول برای محاسبه حق‌بیمه باورمندی، استفاده از تابع زیان توان دوم خطا و محاسبه حق‌بیمه بیزی می‌باشد. در این مقاله دو راهکار جدید برای محاسبه حق‌بیمه باورمندی ارائه می‌گردد، به عبارت دیگر یک تابع زیان متفاوت با قابلیت‌های مختلف را در نظر گرفته و حق‌بیمه باورمندی را تحت آنها مورد مطالعه قرار می‌دهیم، و نشان می‌دهیم که این حق‌بیمه باورمندی محاسبه شده جدید علاوه بر نگاه به حق‌بیمه تجمعی که از ادعاهای گذشته بدست آمده است، به حق‌بیمه انفرادی که مربوط به همان بیمه‌نامه خاص (مورد بررسی ما) می‌باشد را هم مورد توجه قرار می‌دهد، که این نشان دهنده دقت محاسبه این حق‌بیمه می‌باشد. در این مقاله چگونگی تقریب حق‌بیمه باورمندی، بصورت خطی، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در انتها با ارائه یک مثال واقعی، چگونگی استفاده از نتایج بدست آمده را در عمل نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تابع زیان، حق‌بیمه باورمندی، حق‌بیمه خالص، حق‌بیمه اِشر، توزیع تقریب آزاد.

۱ مقدمه

در حال حاضر در تمام دنیا یکی از مسائل مهم در مورد حق‌بیمه این است که حق‌بیمه بر اساس زیان‌ها و خسارت‌های گذشته محاسبه گردد، تا بیمه‌گر و بیمه‌گذار هیچکدام متضرر نشوند. چون در بیمه تا قرارداد به پایان نرسد معلوم نمی‌شود که شرکت بیمه چه روندی داشته است، در علم آمار بیمه، آمار و اطلاعات و تجربیات گذشته و زیان‌هایی که در گذشته اتفاق افتاده است نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در اوایل قرن بیستم آماربیمه‌دانان آمریکایی نظریه ای تحت عنوان نظریه باورمندی وارد علم آمار بیمه شد. ابتدا باورمندی در جنگ جهانی اول برای تعدیل حق‌بیمه کارگران مطرح شد وتوسعه یافت. بطور کلی باورمندی حاصل کار

آمار بیمه‌دان‌های آمریکای شمالی می‌باشد که ریشه در نظریه مخاطره و برآوردهای آماری دارد. البته افراد دیگری مانند، هرزاگ (۱۹۹۴) و مایرسون (۱۹۶۴) و کلاگمن (۱۹۹۲) در رابطه با دیدگاه بیزی نظریه باورمندی مطالبی را ارائه داده‌اند. در ادامه هلمن (۱۹۸۹) بیشترحق‌بیمه‌های باورمندی را تحت نظریه تصمیم آماری از نقطه نظر بیز و با استفاده از تابع زیان خطای توان‌دوم موزون که بصورت $L_1(\delta,\theta) = h(\theta)(\theta-\delta)^2$ می‌باشد، و جفت‌های درستنمایی و توزیع‌های پیشین (که در علم آمار بیمه به نام تابع ساختار شناخته شده است)، بدست آورده بود. در این فرمول با استفاده از شکل‌های تابعی مختلف $h(\theta)$، اصول حق‌بیمه مختلف خواهیم داشت. برای مثال با $h(\theta) = 1$ اصل حق‌بیمه خالص را داریم، و با $h(\theta) = e^{c\theta}$ اصل حق‌بیمه اِشر را خواهیم داشت.

هرگاه حق‌بیمه محاسبه شده تحت خانواده‌توزیع‌های نمایی به عنوان درستنمایی و پیشین مزدوج آن، با حق‌بیمه محاسبه شده باورمندی برابر شود در این حالت حق‌بیمه باورمندی دقیق را داریم، که پرومیسلو (۲۰۰۰) به بیان این موضوع پرداخته بود. موقعی که حق باورمندی دقیق داریم، حق‌بیمه بیزی را می توان به عنوان یک فرمول باورمندی بصورت $P_B^{L_1} = Z(t)g(\bar{x}) + (1-Z(t))P_C^{L_1}$ بیان نمود، که در آن $P_B^{L_1}$ حق‌بیمه بیز، و $P_C^{L_1}$ حق‌بیمه تجمعی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون می‌باشد، و $g(\bar{x})$ تابعی از داده‌های مشاهده شده می‌باشد. جعفری و همکاران (۲۰۰۶) بر روی برآورد تحت توابع زیان متعادل موزون بحث کردند. و گومز (۲۰۰۷) به بررسی تعمیم قضیه باورمندی تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون پرداخت. در این مقاله حق‌بیمه‌های باورمندی را تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون تعمیم می‌دهیم، این تابع زیان را جعفری و همکاران (۲۰۰۶) بصورت زیر معرفی کردند:

$$L_2(\delta,\theta) = wh(\theta)(\delta_0(x)-\delta)^2 + (1-w)h(\theta)(\theta-\delta)^2$$

که در آن $0 \leq w \leq 1$ عامل وزن داده شده می‌باشد و $h(\theta)$ تابع وزنی مثبت و $\delta_0(x)$ یک تابع از داده مشاهده‌شده (برآوردگر هدف) می‌باشد.

در ادامه نتایج گومز (۲۰۰۷) را تحت این تابع زیان را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از این نکته که برآوردگر بیزی را تحت تابع زیان آنتروپی برابر با امید ریاضی تابع پسین است، به مطالعه حق‌بیمه باورمندی تحت تابع زیان آنتروپی می‌پردازیم. همچنین در این مقاله با استفاده از تابع زیان متعادل موزون، یک تعمیم از بیان باورمندی تحت تقریب خطی را بدست می آوریم. در انتها با ارائه یک مثال عددی نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نتایج بدست آمده را در عمل مورد استفاده قرار داد.

۲ نظریه باورمندی

اولین بار با ارائه دو مقاله توسط بولمن (۱۹۶۷) و بولمن و استراب (۱۹۷۰) روش بیزی وارد علم آمار بیمه شد، که در آنجا به محاسبه حق‌بیمه باورمندی بیزی پرداخته شد. اگر X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع پواسن با پارامتر θ باشند، همچنین فرض می‌کنیم که توزیع گاما با پارامترهای α و β یک توزیع پیشین برای θ باشد، در اینصورت توزیع پسین دارای $Gamma(\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i, n+\beta)$ است. میانگین توزیع پسین که به عنوان یک برآورد بیز θ، تحت تابع زیان توان دوم خطا می‌باشد، برابر $\hat{P}_B=\frac{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+\beta}$ بوده و می توان آن را بصورت ترکیب خطی از میانگین نمونه‌ای ($\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$) و میانگین توزیع پیشین ($\frac{\alpha}{\beta}$) بصورت $\hat{P}_B=(\frac{n}{n+\beta})(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n})+(1-\frac{n}{n+\beta})(\frac{\alpha}{\beta})$ بیان نمود. همانطور که نشان داده شده است نظریه باورمندی را می‌توان بصورت بسط یک سیستم وزنی در نظر گرفت که برای برآورد کردن ادعاهای خسارت آینده، بصورت یک متوسط وزنی از ادعاهای خسارت مورد انتظار بر مبنای حوادث گذشته و ادعاهای خسارت واقعی برای گروه مورد بررسی بکار می‌رود که وزن‌ها تابعی از حجم حوادث بیمه‌ای در دسترس (در معرض بودگی[1]) می‌باشد.

نظریه باورمندی مجموعه‌ای از روشهای کمی است که به بیمه‌گر اجازه می‌دهد تا حوادث آینده را در مورد یک مخاطره و یا یک گروه از مخاطره‌ها بر اساس تجربیات گذشته تعدیل کند. و یا به عبارت دیگر حق‌بیمه‌های آینده را بر اساس حوادثی که در گذشته اتفاق افتاده است (زیان‌های گذشته) تعدیل کند. نظریه باورمندی را در مواردی که اطلاعات اندکی از یک گروه خاص در اختیار داشته باشیم، بدین ترتیب که از دیگر قراردادهایی که به این گروه شبیه است کمک گرفته و استفاده می‌کنیم، همچنین در حالتی که زیان‌های یک بیمه‌نامه خاص با حق‌بیمه دریافتی بیمه‌گر هم‌خوانی نداشته باشد، می‌توان از این روش برای تعدیل حق‌بیمه باورمندی استفاده کرد.

[1] Exposure

۳ روش بیزی

همانطور که می‌دانیم، در یک بیمه‌نامه خاص با زیان‌های X_1، ...، X_n، ما به دنبال حق‌بیمه‌ای برای پوشش زیان X_{n+1} هستیم. فرض می‌کنیم X_1، ...، X_n، X_{n+1} به شرط θ (پارامتر مخاطره برای بیمه نامه) مستقل از هم باشند (اگر چه لزوماً هم‌توزیع نیستند)، ما به توزیع شرطی X_{n+1} به شرط $\Theta = \theta$ برای پیشگویی زیان X_{n+1} برای همان بیمه‌نامه خاص نیازمندیم. اگر θ معلوم باشد، آنگاه پیش‌بینی زیان X_{n+1} از تابع $f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)$ به آسانی بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
\mu^{ind} &= \mu_{n+1}(\theta) = E(X_{n+1}|\Theta=\theta) = \int_{\chi} x_{n+1} f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)\, dx_{n+1}\,, \\
\mu^{coll} &= \mu_{n+1} = E[\mu_{n+1}(\Theta)] = \int_{\Theta} \mu_{n+1}(\theta)\pi(\theta)\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

که به μ^{ind} میانگین فرض یا حق‌بیمه انفرادی و به μ^{coll} حق بیمه جمعی یا حق بیمه خالص گفته می‌شود، که برابر با میانگین میانگین‌های فرضی می‌باشد. اما θ مجهول است. چون ما $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ (مقادیر مشاهده‌شده $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$) را برای بیمه‌نامه داریم، بجای شرط روی $\Theta = \theta$، روی $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ شرطی می‌کنیم. در نتیجه توزیع X_{n+1} به شرط X_1، ...، X_n که توزیع پیشگویی است را محاسبه می‌کنیم.

$$E(X_{n+1}|\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \int_{\Theta} \mu_{n+1}(\theta)\pi_{\Theta|\underset{\sim}{X}}(\theta|\underset{\sim}{x})\, d\theta\,,$$

که $E(X_{n+1}|\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x})$ حق‌بیمه بیزی و یا میانگین توزیع پیشگو می‌باشد. به عبارت دیگر حق‌بیمه بیزی همان امید ریاضی میانگین فرضی با گرفتن امید ریاضی روی توزیع پسین $\pi_{\Theta|\underset{\sim}{X}}(\theta|\underset{\sim}{x})$ می‌باشد.

۴ حق‌بیمه باورمندی

همیشه بیمه‌گذار به دنبال این است که حق‌بیمه انفرادی $\mu_{n+1}(\theta)$ که مربوط به بیمه‌نامه او است را پرداخت کند. و چون در $\mu_{n+1}(\theta)$، θ مجهول است، پس روی زمان‌های اتفاق افتاده در گذشته یعنی $\underset{\sim}{x}$، شرطی می‌کنیم که همانطور که گفته شده این کار به حق‌بیمه بیزی

$E(X_{n+1}|\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x})$ منجر می‌شود. چون این روش نیاز به انتگرال‌گیری دارد، ممکن است محاسبات اندکی پیچیده شود؛ به همین دلیل یک روش پیشهادی توسط بولمن (۱۹۶۷)، که در آن یک ترکیب خطی از زیان‌های قبل را برای تقریب $\mu_{n+1}(\theta)$ استفاده می‌کنیم که بصورت $\alpha_\circ + \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ می‌باشد. در اینجا α_iها با مینیمم کردن میانگین توان دوم خطای زیان و مشتق گرفتن از آن نسبت به نسبت به $\alpha_\circ$ و α_j ($j\neq \circ$) و حل معادلات آن حق‌بیمه باورمندی $\tilde{\alpha}_\circ + \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i X_i$ اکه بهترین برآوردگر خطی برای میانگین فرضی $E(X_{n+1}|\Theta)$، حق‌بیمه بیزی $E(X_{n+1}|\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x})$ و X_{n+1} می‌باشد را محاسبه کنیم.

ساده‌ترین مدل برای باورمندی، مدل بولمن است، که در این حالت تعداد درمعرض‌بودگی برای کلیه رده‌ها یکسان فرض می‌شود. در این مدل زیان‌های گذشته X_1، ...، X_n به شرط $\Theta=\theta$ مستقل و هم‌توزیع و دارای میانگین و واریانس یکسان می‌باشند. فرض کنید $\mu(\theta):=E(X_j|\Theta=\theta)$ حق‌بیمه انفرادی با میانگین فرضی بوده و $v(\theta):=Var(X_j|\Theta$ واریانس فرآیند می‌باشد. و همچنین $\mu:=E(\mu(\Theta))$ همان امید ریاضی میانگین‌های فرضی با حق‌بیمه تجمعی می‌باشد و $v:=E(v(\Theta))$ امید ریاضی واریانس فرآیند بوده و $a:=Var(\mu(\Theta))$ همان واریانس میانگین فرضی می‌باشد. طبق فرضیات بالا داریم:

$$E(X_j)=\mu,\quad Var(X_j)=v+a\quad ,Cov(X_i,X_j)=a;(i\neq j).$$

با توجه به این عبارت‌های فوق نتیجه می‌گیریم $\mu=\tilde{\alpha}_\circ+\mu\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i$، و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i=1-\frac{\tilde{\alpha}_\circ}{\mu}\Rightarrow\tilde{\alpha}_j &= \frac{a(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_i)}{v}=\frac{a\tilde{\alpha}_\circ}{\mu v}\,,\\ \tilde{\alpha}_\circ &= \frac{\mu v}{na+v}\,,\end{aligned}$$

و در نتیجه از عبارات بالا داریم:

$$\tilde{\alpha}_\circ+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j X_j=\frac{\mu v}{na+v}+\frac{na\bar{X}}{na+v}=Z\bar{X}+(1-Z)\mu\,,$$

که این عبارت همان حق‌بیمه باورمندی می‌باشد و $Z=\frac{n}{n+k}$ عامل باورمندی می‌باشد بطوریکه $k=\frac{v}{a}$. همانطور که ملاحظه می‌شود حق‌بیمه باورمندی، یک میانگین وزنی از میانگین نمونه $(\bar{X})$ و حق‌بیمه جمعی (μ) می‌باشد. وقتی n به سمت بینهایت میل کند آنگاه Z به سمت یک میل کرده و حق‌بیمه باورمندی به سمت $\bar{X}$ میل می‌کند که این رفتار منطقی است. اگر جامعه نسبت به پارامتر مخاطره Θ همگن باشد، در اینصورت $\mu(\Theta)=E(X_j|\Theta)$

در مقدار نزدیک به هم بوده و در نتیجه a نسبت به v کوچک است و در نتیجه k بزرگ و Z به سمت صفر میل می‌کند و این بدین معنی است که در یک جامعه با پارامتر مخاطره Θ همگن، میانگین روی هم μ برای پیشگویی زیان‌های سال آینده در یک بیمه‌نامه خاص برای ما مفید می‌باشد. حال اگر جامعه نسبت به پارامتر مخاطره Θ ناهمگن باشد، در اینصورت مانند قبل a بزرگ و در نتیجه k کوچک و در نهایت z به سمت یک میل می‌کند و این بدین معنی است که در یک جامعه با پارامتر مخاطره Θ ناهمگن، حوادث سایر بیمه‌نامه‌ها کمتر از حوادث یک بیمه‌نامه خاص در پیشگویی زیان‌های آینده، در همان بیمه‌نامه خاص موثر است.

در علوم بیمه‌ای هرگاه حق‌بیمه باورمندی با حق‌بیمه بیز برابر شود، در اینصورت ما باورمندی دقیق داریم. همچنین در علوم بیمه‌ای هرگاه عوامل باورمندی مشابه باشند، باورمندی دقیق داریم.

نتیجه ۱ اگر ما توزیع‌های خانواده نمایی را به عنوان درستنمایی و پیشین مزدوج آنها در نظر بگیریم، همیشه حق‌بیمه باورمندی و حق‌بیمه بیز با هم برابر بوده (همچنین همیشه عامل باورمندی آنها یکسان می‌باشد) و در این حالت باورمندی دقیق را داریم.

۵ محاسبه حق‌بیمه باورمندی تحت توابع زیان توان‌دوم خطای موزون

در علوم بیمه‌ای حق‌بیمه مخاطره $P_R^L \equiv P_R^L(\theta)$ با مینیمم کردن امید ریاضی زیان $E_{f(x|\theta)}[L(X,P)]$ برای بعضی از توابع زیان نسبت به P بدست می‌آید. اگر تجربه‌ای در دسترس نباشد بیمه‌آمارشناس حق‌بیمه جمعی P_C^L را با مینیمم کردن تابع مخاطره، یعنی مینیمم کردن $E_{\pi(\theta)}\left[L(P_R^L(\theta), P_C^L)\right]$، نسبت به P_C^L بدست می‌آورد. در نهایت اگر تجربه‌ای را در دسترس باشد، آنگاه بیمه‌آمارشناس با بکارگیری از آن تجربه، حق‌بیمه بیز P_B^L را با مینیمم کردن $E_{\pi(\theta|x)}\left[L(P_R^L(\Theta), P_B^L)\right]$ نسبت به P_B^L محاسبه می‌کند، که در حقیقت همان محاسبه حق‌بیمه جمعی است، که در آن فقط توزیع پیشین با توزیع پسین جابجا شده‌اند. با توجه به توضیحات ارائه شده برای تابع زیان توان دوم خطای موزون داریم:

$$P_R^{L_1} = \frac{E_{f(x|\theta)}[Xh(X)]}{E_{f(x|\theta)}[h(X)]}, \quad P_C^{L_1} = \frac{E_{\pi(\theta)}[P_R^{L_1} h(P_R^{L_1})]}{E_{\pi(\theta)}[h(P_R^{L_1})]}, \quad P_B^{L_1} = \frac{E_{\pi(\theta|x)}[P_R^{L_1} h(P_R^{L_1})]}{E_{\pi(\theta|x)}[h(P_R^{L_1})]}.$$

۶ محاسبه حق‌بیمه باورمندی تحت تابع زیان توان‌دوم خطای متعادل موزون

حال با استفاده از گزاره زیر حق‌بیمه مخاطره، جمعی و بیزی را تحت تابع زیان توان‌دوم خطای متعادل موزون بصورت زیر ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱ تحت تابع زیان توان‌دوم خطای متعادل موزون و توزیع پیشین $\pi(\theta)$، حق‌بیمه مخاطره، جمعی و بیز به ترتیب بصورت زیر می‌باشند:

$$P_R^{L_۲}(\theta) \equiv P_R^{L_۲} = \omega \frac{E_{f(x|\theta)}[\delta_\circ(X)h(X)]}{E_{f(x|\theta)}[h(X)]} + (۱-\omega)\frac{E_{f(x|\theta)}[Xh(X)]}{E_{f(x|\theta)}[h(X)]}, \quad (۱)$$

$$P_C^{L_۲} = \omega\delta_\circ^* + (۱-\omega)\frac{E_{\pi(\theta)}[P_R^{L_۲}h(P_R^{L_۲})]}{E_{\pi(\theta)}[h(P_R^{L_۲})]}, \quad (۲)$$

$$P_B^{L_۲} = \omega\delta_\circ^* + (۱-\omega)\frac{E_{\pi(\theta|x)}[P_R^{L_۲}h(P_R^{L_۲})]}{E_{\pi(\theta|x)}[h(P_R^{L_۲})]}, \quad (۳)$$

بطوریکه $\delta_\circ^*$ یک تابع هدف برای حق‌بیمه مخاطره $P_C^{L_۲}$ می‌باشد.

مشاهده می‌کنیم که در عبارت (۲) اگر $\gamma = \frac{E_{\pi(\theta)}[P_R^{L_۲}h(P_R^{L_۲})]}{E_{\pi(\theta)}[h(P_R^{L_۲})]}$ اختیار شود، آنگاه می‌توان نشان داد، $P_C^{L_۲}$ عددی بین γ و $\delta_\circ^*$ (برآوردگر هدف) خواهد بود(($\delta_\circ^* < \gamma$ اگر $P_C^{L_۲} \in (\delta_\circ^*, \gamma)$، و $(\gamma < \delta_\circ^*$ اگر $P_C^{L_۲} \in (\gamma, \delta_\circ^*)$). بنابراین بیمه‌آمارشناس می تواند با انتخاب مقدار $\delta_\circ^*$ یک حق‌بیمه مطابق اولویت و برتری‌های خودش بدست آورد. ضمناً این نتایج برای حق‌بیمه بیزی هم برقرار خواهد بود. گزاره زیر حق‌بیمه خالص تحت تابع زیان توان‌دوم خطای متعادل موزون، یعنی حالتی که $h(X) = ۱$ است، را بدست می‌دهد.

گزاره ۲ اگر حق‌بیمه خالص بیز بدست آمده تحت $L_۱(x,p)$ یک فرمول باورمندی باشد، حق‌بیمه خالص متعادل شده بیز هم یک فرمول باورمندی تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون بصورت زیر می‌باشد:

$$P_B^{L_۲} = Z(t)l(P_C^{L_۱}) + (۱-Z(t))l(\bar{X}),$$

که $Z(t) \in [\circ, ۱]$، و $l(x) = (۱-\omega)^۲ x + \omega(۱-\omega)E_{\pi(\theta|x)}[E_{f(x|\theta)}(\delta_\circ(X)|\theta)] + \omega\delta_\circ^*$.

توجه ۱ ملاحضه می‌کنیم که عامل باورمندی ارائه شده در گزاره ۲ مشابه عامل باورمندی ارائه شده تحت زیان $L_۱(x,p) = (x-p)^۲$ می‌باشد.

نتیجه ۲ اگر ما خانواده توزیع‌های نمایی را به عنوان درستنمایی و پیشین مزدوج آن فرض کنیم، آنگاه حق‌بیمه خالص بیز متعادل یک فرمول باورمندی دقیق است.

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر حق‌بیمه‌های مخاطره، تجمعی و بیزی را تحت تابع زیان آنتروپی موزون ($L_3(x,p) = h(x)(\frac{x}{p} - \log\frac{x}{p} - 1)$) در نظر بگیریم، گزاره و نتایج فوق به همان صورتی که در بالا ذکر شده است برقرار است.

گزاره ۳ اگر حق‌بیمه خالص بیز بدست آمده تحت $L_3(x,p)$ یک فرمول باورمندی باشد، حق‌بیمه خالص متعادل شده بیز هم یک فرمول باورمندی تحت تابع زیان آنتروپی متعادل موزون بصورت زیر می‌باشد:

$$P_B^{L_4} = Z(t)l(P_C^{L_1}) + (1 - Z(t))l(\bar{X})$$

وقتیکه $Z(t) \in [0, 1]$ و $l(x) = (1-\omega)^2 x + \omega(1-\omega)E_{\pi(\theta|x)}[E_{f(x|\theta)}(\delta_0(X)|\theta)] + \omega\delta_0^*$.

توجه ۲ مشاهده نمودیم که عامل باورمندی ارائه شده در گزاره ۴ مشابه عامل باورمندی ارائه شده تحت زیان $L(x,p) = (x-p)^2$ می‌باشد، در نتیجه باورمندی دقیق داریم.

چون در مثال واقعی ارائه شده در انتهای این مقاله از زوج مزدوج نرمال ـ نرمال استفاده شده، بنابراین مابقی این بخش را به مطالعه حق‌بیمه باورمندی تحت زوج نرمال ـ نرمال می‌پردازیم.

گزاره ۴ فرض کنید توزیع ادعاها نرمال با پارامتر $\theta > 0$ و γ^2 توزیع پیشین دارای توزیع نرمال با پارامتر μ و σ^2 باشد. همچنین فرض می‌کنیم که کارورز، تابع زیان توان‌دوم خطای موزون را برای بدست آوردن حق‌بیمه مخاطره اِشر، و تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون را برای بدست آوردن حق‌بیمه‌های جمعی و بیزی انتخاب کند. آنگاه حق‌بیمه‌های متعادل وزنی خالص مخاطره، جمعی و بیزی بصورت زیر هستند:

$$P_R^{L_1} = \theta, \tag{4}$$

$$P_C^{L_2} = \omega\delta_0^* + (1-\omega)\mu, \tag{5}$$

$$P_B^{L_2} = Z(t)l(\bar{X}) + (1 - Z(t))l(P_C^{L_1}), \tag{6}$$

که در آن $l(x) = (1-\omega)x + \omega\delta_0^*$ می‌باشد.

نتیجه ۳ فرمول (۲۹) یک فرمول باورمندی به شکل زیر است:

$$P_B^{L_2} = Z(t)l(\bar{X}) + (1 - Z(t))l(P_C^{L_1}),$$

بطوریکه $l(x) = (1-\omega)x + \omega\delta_0^*$، و عامل باورمندی بصورت $Z(t) = \frac{\frac{t}{\gamma^2}}{\frac{t}{\gamma^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$ می‌باشد.

توجه ۳ دوباره مشاهده نمودیم که عامل باورمندی فوق بدست آمده مشابه عامل باورمندی بدست آمده تابع زیان توان دوم خطای موزون، $L_1(x,p) = (x-p)^2$ می‌باشد.

۷ کاربرد عددی برای حق‌بیمه باورمندی تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون

در این بخش به بررسی گزاره ۴ در بخش قبل بر روی داده‌های کل بیمه باربری سال ۱۳۸۶ بیمه ایران در کشور ایران می‌پردازیم. در اینجا دو دسته داده قراردادهای حق‌بیمه در سال ۱۳۸۶، شامل ۸۷۶۲۰ قرارداد که از این قراردادها مبلغ ۲۸,۹۲۵,۲۵۲,۵۰۵,۱۷۰ ریال حق‌بیمه اخذ شده، و ۷۱۶ زیان اتفاق افتاده که در مجموع مبلغ ۶۴,۱۲۲,۷۵۱,۴۱۴ ریال زیان پرداخت شده موجود است. ما این داده‌ها را در طی سال ۱۳۸۶، به ازای هر ماه مجموع حق بیمه و زیان با توجه به تعداد قراردادهای بیمه ثبت شده در طی ماه را داریم، یعنی در کل سال ۱۳۸۶ ما ۱۲ داده برای مجموع حق بیمه و ۱۲ داده برای مجموع زیان داریم. ما در اینجا به دنبال برآورد مجموع حق‌بیمه‌ای که باید از n قرارداد (تعداد درمعرض‌بودگی) برای ماه آینده اخذ شود، هستیم. برای یافتن برآورد برای حق‌بیمه، نیاز داریم که توزیع‌های $\underset{\sim}{X}|\theta$ و θ را بدانیم. به دلیل نبود اطلاعات کافی درباره توزیع پیشین (توزیع مخاطره) ، به داده‌های حق‌بیمه سال قبل، یک مدل مناسب برازش کرده و آن را به عنوان توزیع پیشین در نظر می‌گیریم. در بیمه اغلب با توزیع‌های دم سنگین مواجه هستیم. راه حلی برای سبک کردن دم‌ها، استفاده از لگاریتم داده‌ها می‌باشد. در عمل لگاریتم باورمندی به همان سادگی استفاده از باورمندی معمولی است. در کل در بیمه‌های باربری به علت بزرگ بودن حق‌بیمه و زیان‌های باربری ترانزیتی، داده‌های باربری دم‌سنگین می‌باشند. همانطور که گفتیم استفاده از لگاریتم داده‌ها در باورمندی اختلالی در محاسبات ایجاد نمی‌کند و با توجه به بحث بخش قبل که روی توزیع نرمال ـ نرمال بوده است پس ما از هر دو سری داده‌ها (یعنی داده‌های زیان و حق‌بیمه) لگاریتم گرفته و روی لگاریتم آنها که دارای توزیع نرمال می‌باشد کار می‌کنیم. لگاریتم حق‌بیمه‌ها با توجه به آزمون نیکویی برازش (جدول ۱) دارای توزیع نرمال با پارامترهای ۱۵/۳۰۶۲ و $(۰/۴۳۲۵۲)^۲$ می‌باشد.

با توجه به مطالب ذکر شده در بخش قبل $P_C^{L_1} = \mu = ۱۵/۳۰۶۲$ است. همچنین لگاریتم زیان‌ها با توجه به آزمون نیکویی برازش (جدول ۱) دارای توزیع نرمال با پارامترهای ۱۳/۱۲۹۸ و $(۰/۸۸۷۸۰)^۲$ می‌باشد. حال در اینجا داریم:

$$P_B^{L_1} = \frac{\frac{t\bar{x}}{\gamma^۲} + \frac{\mu}{\sigma^۲}}{\frac{t}{\gamma^۲} + \frac{۱}{\sigma^۲}} = \frac{\frac{۱۲\times ۱۳/۱۲۹۸}{۰/۸۸۷۸۰^۲} + \frac{۱۵/۳۰۶۲}{۰/۴۳۲۵۲^۲}}{\frac{۱۲}{۰/۸۸۷۸۰^۲} + \frac{۱}{۰/۴۳۲۵۲^۲}} = ۲۱۰/۶۱۷۹\,.$$

با توجه به مصوب بیمه مرکزی برای حق‌بیمه باربری مبنی بر اینکه برای هر نوع بار خاص یک ضریب متفاوتی از کل قیمت آن بار خاص را به عنوان حق‌بیمه در نظر می‌گیرد، بنابراین برای بدست آوردن تابع هدف، ما میانگین این ضرایب یعنی $\frac{۲۴۱/۱}{۱۶۴} \times \frac{۱}{۱۰۰}$ را به عنوان یک ضریب تابع هدف در نظر می‌گیریم، یعنی $\delta_{\circ}(x) = \frac{۲۴۱/۱}{۱۶۴} \times \frac{۱}{۱۰۰} x$، حال داریم:

$$\begin{aligned} \delta_{\circ}^{*}(x) &= E_{\pi(\theta)}[\delta_{\circ}(P_R^{L_۲})] = E_{\pi(\theta)}[\frac{۲۴۱/۱}{۱۶۴} \times \frac{۱}{۱۰۰}\theta] \\ &= \frac{۲۴۱/۱}{۱۶۴} \times \frac{۱}{۱۰۰} \times E_{\pi(\theta)}[\theta] = ۲/۵۴۵۹۵۵ . \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} P_C^{L_۲} &= \omega\,\delta_{\circ}^{*} + (۱-\omega)\mu = (\omega) \times (۲/۵۴۵۹۵۵) + (۱-\omega) \times (۱۳/۱۲۹۸), \\ Z(t) &= \frac{\frac{t}{\gamma^۲}}{\frac{t}{\gamma^۲} + \frac{۱}{\sigma^۲}} = \frac{\frac{۱۲}{۰/۸۸۷۸۰^۲}}{\frac{۱۲}{۰/۸۸۷۸۰^۲} + \frac{۱}{۰/۴۳۲۵۲^۲}} = ۰/۷۴۰۱۳۵۱, \\ P_B^{L_۲} &= Z(t)l(\bar{X}) + (۱ - Z(t))l(P_C^{L_۱}) \\ &= ۰/۷۴۰۱۳۵۱ * [(۱-w) \times ۱۳/۱۲۹۸ + (w) \times ۲/۵۴۵۹۵۵] \\ &\quad +(۱ - ۰/۷۴۰۱۳۵۱) \times [(۱-w) * ۱۵/۳۰۶۲ + (w) \times ۰/۷۴۰۱۳۵۱], \end{aligned}$$

که در اینجا به ازای wهای مختلف، حق‌بیمه‌های مختلف داریم. که این مقدار بر حسب اهمیت شرکت بیمه به تابع هدف می‌تواند از مقدار صفر تا یک باشد (با توجه به گفته‌های گفته‌های قبل، باید $۰ \leq w < ۱$ باشد). در زیر حق‌بیمه را به ازای چند w مختلف بدست آورده و در نهایت عبارت حاصل را به توان نمایی می‌رسانیم تا مقدار واقعی بدست آید. در نهایت عدد بدست آمده را در تعداد در معرض بودگی این ماه (n) ضرب کرده و در نهایت آن مقدار حق‌بیمه که در ماه جدید باید کسب کنیم حاصل می‌شود. برای تفسیر جدول ۲، فرض می‌کنیم که $\omega = ۰/۱۱$ را داریم؛ یعنی به تفاضل بین δ و $\delta_{\circ}$ وزن ۰/۱۱، و به تفاضل بین δ و θ وزن ۰/۸۹ را می‌دهیم. با توجه به جدول ۳.۴، ملاحظه می‌کنیم که برای $\omega = ۰/۱۱$، $P_B^{L_۲} = ۱۲/۴۶۸۹۳$ و $exp(P_B^{L_۲}) = ۲۶۰۱۲۹/۴$ می‌باشد، که اگر عدد ۲۶۰۱۲۹/۴ را در تعداد در معرض بودگی ماه آینده ضرب کنیم، کل مبلغ حق‌بیمه ای که باید در ماه آینده از این تعداد در معرض بودگی اخذ شود را کسب می‌کنیم.

فرض کنیم که تعداد در معرض بودگی ماه آینده همان تعداد در معرض بودگی ماه گذشته، یعنی ۷۵۵۸ باشد، در نتیجه، $۷۵۵۸ \times ۲۶۰۱۲۹/۴ = ۱,۹۶۶,۰۵۸,۰۰۵$، کل حق‌بیمه‌ای است که در ماه آینده باید اخذ شود، که نسبت به کل حق‌بیمه‌ای که در ماه گذشته اخذ شده بود(۳۶,۱۸۴,۱۸۸,۳۰۹ ریال) بسیار تفاوت دارد و این نشان می‌دهد که شرکت

بیمه خیلی بیشتر از مقدار واقعی بیمه اخذ نموده است و باید به فکر تعدیل حق‌بیمه خود باشد.

مراجع

[1] Buhlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *Astin Bulletin*, **4(3)**, 199-207.

[2] Buhlmann, H., Straub, E. (1970). Credibility for loss ratios. *Mitteilungen der Vereinigunge Schweizerischer Versicherungs Mathematiker*, **70**, 111-133.

[3] Gomez, E. (2007). A generalization of the credibility theory obtained by using the weighted balanced loss function. *Insurance: Mathematics and Economics.*

[4] Herzog, T. N.(1994), *Introduction to credibility theory.* ACTEX Publications, Winsted, **2nd edition**.

[5] Heilmann, W. (1989). Desision theoric fundations of credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, **8(1)**, 77-95.

[6] Jafari, M., Marchand, E., Parsian, A. (2006). On estimation with weighted balanced-type loss function. *Statistics & Probability Letters*, **springer**, pp. 371-390.

[7] Klugman, S. A.(1992), Bayesian Statistics in Actuarial Sciences with Emphasis on Credibility. *Boston: Kluwer.*

[8] Mayerson, A. L. (1964). *Bayesian view of credibility. Proc. Cas Act. Soc.*, **51**, 85-104.

[9] Promislow, S. D. (2000). Equity and exact credibility. *Astin Bulletin*, **30(1)**, 3-11.

		لگاریتم حق‌بیمه	لگاریتم زیان
تعداد		۱۲	۱۲
پارامترهای نرمال	میانگین	۱۵/۳۰۶۲	۱۳/۱۲۹۸
	انحراف معیار	۰/۴۳۲۵۲	۰/۸۸۷۸۰
تغییرات	قدرمطلق	۰/۲۶۴	۰/۱۸۴
	مثبت	۰/۲۶۴	۰/۱۲۸
	منفی	-۰/۱۶۳	-۰/۱۸۴
آماره کولموگروف - اسمیرنف		۱/۹۱۵	۰/۶۳۸
P-مقدار دوطرفه		۰/۳۷۲	۰/۸۱۱

جدولِ ۱: جدول نیکویی برازش برای حق‌بیمه‌های باربری و ادعاهای باربری

ω	$P_B^{L_۲}$	$exp(P_B^{L_۲})$
۰/۴	۹/۲۳۵۶۰۴	۱۰۲۵۵/۸۵
۰/۲	۱۱/۴۶۵۴۹	۹۵۳۶۶/۹۱
۰/۱۱	۱۲/۴۶۸۹۳	۲۶۰۱۲۹/۴

جدولِ ۲: جدول محاسبه حق‌بیمه برای ωهای مختلف