تعیین حجم نمونه‌ی بیزی برای توزیع نرمال با استفاده از فاصله‌های LPL

نرگس نجفی، حسین بیورانی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ماکو
گروه آمار، دانشگاه تبریز

هدف از برآورد حجم نمونه، انجام استنباط یا اخذ تصمیمی در مورد پارامتر نامعلوم θ است. نوع استنباط‌ها مربوط به پارامتر و تصمیم‌های ساخته شده در مورد آن، پتانسیلی برای پیشامدهای ما بعد مرتبط با سیستم‌های مورد علاقه است. در واقع روش‌های تعیین حجم نمونه به محقق این اجازه را می‌دهد که حجم نمونه را با معین کردن هدف مشخص یا اکسترمم سازی یک تابع ذهنی خاص به دست آورد.
در این مقاله ابتدا فاصله‌های p-تحمل با کمترین زیان پسین (LPL) را تعریف نموده، سپس از سه روش متوسط طول، متوسط همگرایی و بدترین برآمد برای محاسبه‌ی اندازه‌ی نمونه برای پارامتر θ در توزیع نرمال با توزیع پیشین نرمال می‌پردازیم.
واژه‌های کلیدی: استنباط بیزی، تعیین حجم نمونه، تابع زیان مربع خطا، ناحیه‌های LPL.

۱ مقدمه

یکی از روش‌های تعیین حجم نمونه استفاده از برآورد فاصله‌ای است. در آمار کلاسیک، دسو و رواگاوار [۶]، لیپسی [۱۱] و لمشو و همکاران [۱۰] فرمول‌هایی برای اندازه‌ی نمونه برای توزیع نرمال با استفاده از فاصله‌ی اطمینان $100p$ درصد و طول l به دست آورده‌اند. فاصله‌های اطمینان کلاسیک اغلب برای تعیین حجم نمونه برای آزمایش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. محقق با مشخص کردن سطح اطمینان p و با فرض اینکه طول فاصله‌ی اطمینان برابر l باشد، معادله را برحسب n حل کرده و اندازه‌ی نمونه‌ی مناسب را به صورت $n=(\frac{2q\sigma}{l})^2$ به دست می‌آورد، که در آن q چندک p درصد از توزیع مورد نظر است. در عمل معمولاً واریانس نامعلوم بوده و از برآورد آن استفاده می‌شود. مسئله‌ای که از حجم نمونه‌ی به دست آمده آشکار است این است که:

۱. هرچه سطح اطمینان p افزایش یابد، حجم نمونه نیز بیشتر می‌شود؛

۲. هر چه طول فاصله کوچکتر شود، اندازه‌ی نمونه بزرگتر می‌شود و بالاخره واریانس‌های بزرگتر منجربه حجم نمونه‌ی بزرگتری می‌شوند.

اخیراً برای برآورد حجم نمونه‌ی بیزی روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است. آدکوک [۲] در سال ۱۹۸۸ و فام گیا و ترکان [۱۲] در سال ۱۹۹۲ این نگرش بیزی را برآورد فاصله‌ای بر اساس تقریب‌های نرمال برای چگالی‌های پسین یا فاصله‌ها بر اساس میانگین‌ها و واریانس‌های پسین به کار برده‌اند.

هدف از این مقاله برآورد حجم نمونه‌ی بیزی بر اساس فاصله‌های LPL [1] است. در این مقاله با به کار بردن نظریه‌ی تصمیم و استفاده از تابع زیان به کمک سه روش متوسط طول (ALC) [2]، متوسط پوشش (ACC) [3] و بدترین برآمد (WOC) [4]، حجم نمونه‌ی بهینه را برای پارامتر θ در توزیع نرمال به دست می‌آوریم. جوزف وهمکاران [۷]،[۸]، [۹] در سال ۱۹۹۵ این سه روش را براساس فاصله‌های (HPD) [5] برای تعیین اندازه‌ی نمونه بیزی برای پارامتر دو جمله‌ای و در سال ۱۹۹۷ برای تفاضل نسبت‌های دوجمله‌ای و برآورد میانگین نرمال و تفاضل میانگین‌های نرمال به کار برده‌اند و تا آنجایی که مولفین بررسی نموده‌اند، استفاده از این سه روش برای یافتن حجم نمونه‌ی بیزی براساس فاصله‌های LPL تاکنون انجام نشده است.

۲ فاصله‌های LPL برای توزیع نرمال

فرض کنید $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ نمونه‌ی تصادفی به حجم n از توزیع نرمال $N(\theta, \sigma^2)$ باشد، که σ^2 معلوم است. همچنین فرض کنید که θ متغیر تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, \tau^2)$ است که μ و τ نیز معلوم هستند. اگر $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ میانگین این نمونه‌ی n تایی از x_i ها باشد، با استفاده از قضیه‌ی بیز توزیع پسین برای θ، توزیع نرمال $N(\mu_n(\bar{x}), Var(\theta \mid \bar{x}))$ خواهد بود، به طوری که:

[1] $Lowest Posterior Loss$

[2] $Average Length Criterion$

[3] $Average Coverage Criterion$

[4] $Worst Outcome Criterion$

[5] $Highest Posterior Density$

$$\mu_n(\bar{x}) = \frac{\sigma^۲}{\sigma^۲ + n\tau^۲}\mu + \frac{n\tau^۲}{\sigma^۲ + n\tau^۲}\bar{x} \tag{۱}$$

$$Var(\theta \mid \bar{x}) = \sigma_n^۲ = \frac{\sigma^۲\tau^۲}{\sigma^۲ + n\tau^۲} \tag{۲}$$

همچنین تابع چگالی پیشگو برای $\bar{x}$ توزیع $N(\mu, \sigma'_n)$ است که در آن $\sigma'_n = \frac{\sigma^۲+n\tau^۲}{n}$ می‌باشد (برناردو و اسمیت [۴]).

فرض کنید تابع $L(\theta, \delta(\underline{x})) = (\delta(\underline{x}) - \theta)^۲$ تابع زیان مربع خطا باشد؛ در این صورت فاصله‌ی p-تحمل با کمترین زیان پسین برای توزیع نرمال زیرمجموعه‌ای به صورت R_p^l از فضای پارامتر است، هرگاه داشته باشیم:

$$i) \int_{R_p^l} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^۲) d\theta = p$$

$$ii) \forall\theta_i \in R_p^l \ \ , \ \ \forall\theta_j \notin R_p^l \ \ , \ \ R(\pi, \theta_i) \leq R(\pi, \theta_j)$$

که در آن $R(\pi, \delta(\underline{x})) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^۲)(\delta(\underline{x}) - \theta)^۲ \ d\theta$ ریسک پسین است و $\mu_n(\bar{x})$ و $\sigma_n^۲$ در روابط (۱) و (۲) آمده است. بنابراین داریم:

$$R(\pi, \delta(\underline{x})) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^۲)(\delta(\underline{x}) - \theta)^۲ \ d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^۲)(\delta^۲(\underline{x}) - ۲\delta(\underline{x})\theta + \theta^۲) \ d\theta$$

$$= \delta^۲(\underline{x}) - ۲\delta(\underline{x})E(\theta \mid \underline{x}) + E(\theta^۲ \mid \underline{x})$$

$$= \delta^۲(\underline{x}) - ۲\delta(\underline{x})\mu_n(\bar{x}) + (\sigma_n^۲ + \mu_n^۲(\bar{x})) \tag{۳}$$

برای مقادیر مشخص $\sigma^۲$، μ، $\tau^۲$، n و $\bar{x}$، ریسک پسین، تابع درجه‌ی دوم از برآوردگر $\delta(\underline{x})$ است. بنابراین با الگوریتم کامپیوتری می‌توان مقادیری از $\delta(\underline{x})$ را چنان انتخاب کرد که ضمن مینیمم کردن ریسک پسین، مساحت سطح زیر نمودار تابع چگالی پسین برای این

مقادیر، مقدار ثابت p باشد و به این ترتیب فاصله‌ی LPL را به دست آوریم. برای مثال، اگر $\sigma^۲ = ۱$، $\mu = ۱$، $\tau^۲ = ۰/۱$، $n = ۱۰$ و $\bar{x} = ۰/۵$ باشد، معادله‌ی ریسک پسین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(\pi, \delta(\underline{x})) = \delta^۲(\underline{x}) - ۰/۷۵\delta(\underline{x}) + ۰/۶۱$$

که با جستجوی کامپیوتری و حل این معادله به ازای مقادیر مختلف ریسک پسین فاصله‌ای LPL به صورت (۱/۳۸۰۵ و ۰/۱۱۹۵) به دست می‌آید که نقاط فاصله‌ی LPL برای این معادله زیر خط ریسک پسین برابر با ۰/۴۴۵ قرار دارند.

۳ تعیین حجم نمونه‌ی بیزی با استفاده از فاصله‌های LPL برای میانگین توزیع نرمال

همانطور که قبلاً اشاره شد، برای تعیین حجم نمونه به یک فاصله‌ی تحمل و استفاده از سه روش متوسط طول، متوسط پوشش و بدترین برآمد نیازمندیم. آدکوک [۲] در سال ۱۹۸۸ پیشنهاد می‌کند که فاصله‌ی به کار گرفته شده فاصله‌ای متقارن حول میانگین پسین $R_p^l = E(\theta \mid \underline{x}) \pm \frac{l}{۲}$ باشد، که در آن l، طول معلوم است. جوزف و همکاران [۸] در سال ۱۹۹۷ ناحیه‌ای به صورت زیر پیشنهاد می‌کنند:

$$R_p^l = [a, a+l]$$

که در آن l از قبل معلوم است و a چنان تعیین می‌شود که فاصله‌ی R_p^l یک فاصله با بیشترین چگالی پسین یا HPD باشد. اگرچه در کل، نتیجه‌ی حاصل از این دو روش متفاوت است، ولی با توجه به اینکه برای توزیع‌های تک‌مدی و متقارن مانند توزیع نرمال، ناحیه‌ی با بیشترین چگالی پسین، فاصله‌ای متقارن حول میانگین است، پس نتیجه‌ای مشابه از دو روش به دست می‌آید.

در حالتی که واریانس توزیع نرمال معلوم است و علاقمند به برآورد میانگین هستیم، چون $\sigma_n^۲$ فقط به n بستگی دارد و مستقل از مقادیر مشاهدات است، آدکوک و جوزف به این نتیجه رسیده‌اند که هر سه روش متوسط طول، متوسط پوشش و بدترین برآمد منجر به نتیجه‌ی مشابهی به صورت زیر برای حجم نمونه می‌شوند:

$$۲Z_{\frac{p}{۲}}\sqrt{\sigma_n^۲} \le l \overset{\sigma_n^۲ = \frac{\sigma^۲\tau^۲}{\sigma^۲ + n\tau^۲}}{\longrightarrow} n \ge \frac{۴\sigma^۲ Z_{\frac{p}{۲}}^۲}{l^۲} - \frac{\sigma^۲}{\tau^۲} \qquad (۴)$$

فاصله‌های LPL مانند فاصله‌های HPD برای توزیع نرمال متقارن نیستند مگر اینکه تابع زیان موردنظر پایا باشد، مانند تابع زیان اختلاف حقیقی (برناردو [۵]). بنابراین در ادامه‌ی این مقاله تعیین حجم نمونه با استفاده از فاصله‌های LPL و سه روش ذکر شده را برای توزیع نرمال تعریف نموده و با استفاده از شبیه‌سازی، مقادیر حجم نمونه را محاسبه می‌کنیم.

۳-۱ روش پوشش متوسط برای توزیع نرمال

روش ACC (جوزف [۷]) کمترین مقدار n را طوری تعیین می‌کند که داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{R_{LPL}} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2)\ d\theta\right\} N(\bar{x} \mid \mu, \sigma'_n) d\bar{x} \geq p \qquad (۵)$$

که در آن R_{LPL} ناحیه‌ی تحمل LPL است. چون $\mu_n(\bar{x})$ به مقدار مشاهدات و n بستگی دارد، به دست آوردن مقدار عددی برای طرف چپ نامعادله‌ی (۵) بسیار مشکل خواهد بود. بنابراین باید از جستجوی عددی برای رسیدن به اندازه‌ی نمونه‌ی درست استفاده کرد. یک روش برای این فرآیند به کار بردن استراژی جستجوی زیربخشی است. این فرآیند زمانی متوقف می‌شود که نتایج مطلوب و موردنظر برای n برقرار باشد نه برای $n-1$. در زیر به طور خلاصه از الگوریتم مونت‌کارلو برای تکمیل روش‌های توصیف شده استفاده می‌کنیم. به طور کلی می‌توان روش ACC را به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\chi}\left\{\int_{R_p^l} \pi(\theta \mid \underline{x})\ d\theta\right\} f(\underline{x})\ d\underline{x} \geq p \qquad (۶)$$

که در آن R_p^l فاصله‌ای به طول l و $f(\underline{x})$ تابع چگالی پیشگو و χ دامنه‌ی مقادیر x است. الگوریتم با تولید یک نمونه‌ی تصادفی به حجم M از توزیع $f(\underline{x})$ ادامه می‌یابد و برای هر M نمونه، انتگرال داخل اکولاد محاسبه می‌شود. متوسط این M انتگرال، سمت چپ نامعادله‌ی (۶) را تقریب می‌زند تا نتیجه‌ی مطلوب برای n به دست آید. این نگرش به نگرش آمیخته‌ی بیزی / درستنمایی معروف است که جوزف و همکاران [۹] آن را برای طرح آزمایش‌هایی برای برآورد تفاضل بین دو نسبت دوجمله‌ای به کار می‌برند و نتایج ان را با نتایج فرمول‌های استاندارد مقایسه می‌کنند.

برای اینکه از خطای روش مونت‌کارلو مطمئن شویم، می‌توان شبیه‌سازی را چندین بار تکرار کرده و واریانس اندازه‌ی نمونه را محاسبه کنیم. مسلماً هر چه تعداد M و تکرارها افزایش

یابد، خطای روش مونت‌کارلو کاهش می‌یابد. در این مقاله به دلیل طولانی بودن جستجوی کامپیوتری از یک تکرار و $M = ۵۰$ استفاده نموده‌ایم. الگوریتم کلی در زیر آمده است:

۱. مقدار اولیه‌ای برای اندازه‌ی نمونه‌ی n در نظر می‌گیریم؛

۲. M مقدار از متغیر تصادفی $\bar{x}_i$ را از توزیع $N(\mu, \sigma'_n)$ تولید می‌کنیم؛

۳. برای هر مقدار $\bar{x}_i$، تابع درجه دوم ریسک پسین را از رابطه‌ی (۳) محاسبه کرده و آن را به ازای مقادیر مختلف حل می‌کنیم تا ناحیه‌ی LPL به طول l را به دست آوریم. برای هر M مقدار از $\bar{x}_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, M$ مقدار زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$coverage(\bar{x}_i) = \int_{R_{LPLi}} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^۲)\ d\theta;$$

۴. سپس $p' = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M} coverage(\bar{x}_i)$، متوسط پوشش را برای مقادیر مختلف محاسبه می‌کند؛

۵. اگر $p' \geq p$ باشد، الگوریتم متوقف می‌شود و مقدار n حجم نمونه‌ی بهینه است. در غیر این صورت مقدار n را تغییر داده و مراحل را تکرار می‌کنیم تا به کمترین مقدار برای n دست یابیم.

۳-۲ روش طول متوسط برای توزیع نرمال

روش ALC (جوزف [۷]) کمترین مقدار n را چنان تعیین می‌کند که داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{R_{LPL}} d\theta \right\} N(\bar{x} \mid \mu, \sigma'_n)\ d\bar{x} \leq l$$

می‌توان الگوریتمی مشابه با الگوریتم بالا برای تعیین حجم نمونه برای روش ALC نوشت. فرقی که بین روش ALC و ACC وجود دارد این است که در روش ALC باید برای هر $\bar{x}_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, M$، فاصله‌ای را جستجو کنیم که پوشش آن p باشد، سپس طول این فاصله را به دست آورده و l' را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$l' = \frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m} length(\bar{x}_i)$$

که در آن $length(\bar{x}_i)$ طول فاصله‌ی LPL برای هر $\bar{x}_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, M$ با پوشش p است. برای هر l مشخص هرگاه $l' \leq l$ شود، الگوریتم متوقف می‌شود و در غیر این صورت الگوریتم تا جایی ادامه می‌یابد تا این شرط برقرار شود و مقدار بهینه‌ی n به دست آید.

۳-۳ روش بدترین برآمد برای توزیع نرمال

روش WOC (جوزف [۷])، مینیمم n را طوری جستجو می‌کند که داشته باشیم:

$$inf_{x\in X}\left\{\int_{R_{LPL}} N(\theta \mid \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^{۲})\ d\theta\right\} \geq p$$

با الگوریتمی مشابه می‌توان حجم نمونه‌ی بهینه را برای روش بدترین برآمد به دست آورد. در آن p مقدار معلومی است.

۴-۳ شبیه‌سازی حجم نمونه برای توزیع نرمال

برنامه‌های مربوط به این شبیه‌سازی به وسیله‌ی نرم‌افزار $MATLAB$ برای مقادیر $\sigma^{۲} = ۱$، $\mu = ۱$، $\tau^{۲} = ۰/۱$ نوشته شده و حجم نمونه با استفاده از روش‌های متوسط پوشش، متوسط طول برحسب مقادیر مختلف پوشش p و طول l به ترتیب در جداول (۱) و (۲) آورده شده است. طبق نتایج، حجم نمونه‌ی به دست آمده از دو روش ACC و WOC یکسان هستند؛ زیرا همانطور که قبلاً اشاره شد، تابع چگالی حاشیه‌ای پسین برای $\bar{x}$، توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^{۲}+n\tau^{۲}}{n})$ است، بنابراین با مقادیر در نظرگرفته شده، هر مقداری که به n بدهیم، واریانس این توزیع مقداری کمتر از یک به دست می‌آید. به طور مثال برای $n = ۵۰$، $\frac{\sigma^{۲}+n\tau^{۲}}{n} = ۰/۱۲$. همانطور که در الگوریتم نیز بیان شد، M عدد تصادفی از توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^{۲}+n\tau^{۲}}{n})$ تولید می‌کنیم، که در این شبیه‌سازی فرض کردیم $M = ۵۰$ باشد. با توجه به میانگین و واریانس این توزیع، اعداد تصادفی تولید شده اعدادی نزدیک یک هستند. این ۵۰ عدد تصادفی تولید شده در محاسبه‌ی میانگین توزیع پسین، یعنی $\mu_n(\bar{x}) = \frac{\sigma^{۲}}{\sigma^{۲}+n\tau^{۲}}\mu + \frac{n\tau^{۲}}{\sigma^{۲}+n\tau^{۲}}\bar{x}$ به کار می‌روند و چون اعداد خیلی نزدیک به هم هستند، میانگین توزیع پسین نیز برای اعداد تفاوت چندانی با هم ندارند. بنابراین پوشش‌های فاصله‌های LPL برای این اعداد تصادفی تقریباً با هم برابرند. حال تفاوتی که بین روش ACC و WOC وجود دارد این است که روش ACC، متوسط این ۵۰ پوشش را با مقدار معلوم p مقایسه می‌کند و روش WOC مینیمم پوشش‌ها را با p مقایسه می‌کند. بنابراین با توجه به یکسان بودن این مقادیر مینیمم مقدار با متوسط مقدار،

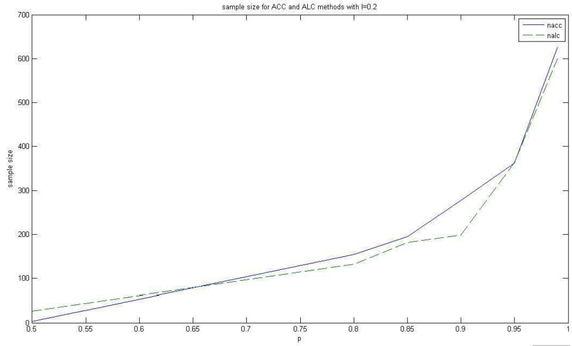
برابر است. پس حجم نمونه‌ی به دست آمده از دو روش تقریباً مساوی است. شاید اگر مقادیر دیگری برای $\sigma^۲$، μ و $\tau^۲$ درنظر بگیریم، نتایج متفاوتی به دست آید. نمودار (۱) تغییرات اندازه‌ی نمونه با دو روش ذکر شده برای مقادیر متفاوت p و $l = ۰/۲$ و نمودار (۲) تغییرات اندازه‌ی نمونه با این دو روش را برای مقادیر مختلف l و $p = ۰/۹$ نشان می‌دهد.

l	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵
p	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۵	۲۱	۱۱	۳	۲	۰
۰/۸	۱۵۵	۹۶	۶۳	۳۲	۱۷
۰/۸۵	۱۹۵	۱۲۴	۸۳	۴۲	۲۴
۰/۹	۲۷۷	۱۵۴	۱۱۰	۶۰	۳۴
۰/۹۵	۳۶۲	۲۴۴	۱۶۳	۸۷	۵۳
۰/۹۹	۶۲۷	۴۱۴	۲۸۲	۱۵۵	۹۸

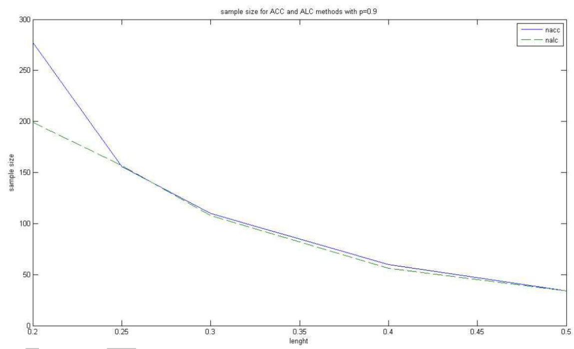
جدول ۱) اندازه‌ی نمونه‌ی بیزی به روش ACC برای توزیع نرمال با طول و پوشش‌های مختلف با $\sigma^۲ = ۱$، $\mu = ۱$ و $\tau^۲ = ۰/۱$.

l	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۴	۰/۵
p					
۰/۵	۲۶	۱۸	۱۰	۱	۰
۰/۸	۱۳۲	۸۷	۶۲	۲۹	۱۳
۰/۸۵	۱۸۲	۱۱۷	۷۸	۴۱	۵۲
۰/۹	۱۹۹	۱۵۷	۱۰۸	۵۶	۳۴
۰/۹۵	۳۶۳	۲۲۵	۱۴۸	۷۹	۴۴
۰/۹۹	۶۰۱	۳۶۱	۲۴۹	۱۲۹	۸۵

جدول ۲) اندازه‌ی نمونه‌ی بیزی به روش ALC برای توزیع نرمال با طول و پوشش‌های مختلف با $\sigma^۲ = ۱$، $\mu = ۱$ و $\tau^۲ = ۰/۱$.



شکلِ ۱: حجم نمونه‌ای ACC و ALC برای توزیع نرمال با pهای مختلف و $l = ۰/۲$.



شکلِ ۲: حجم نمونه‌ای ACC و ALC برای توزیع نرمال با lهای مختلف و $p = ۰/۹$.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله حجم نمونه‌ی بیزی را با استفاده از فاصله‌های LPL و سه روش ذکر شده محاسبه نموده‌ایم. با مقادیر معلوم بیان شده در بخش قبل، حجم نمونه‌ی به دست آمده با استفاده از فاصله‌های LPL در جداول (۱) و (۲) نزدیک به مقادیر به دست آمده توسط آدکوک و جوزف با بکارگیری رابطه‌ی (۴) است. به عنوان مثال با استفاده از رابطه‌ی (۴)، برای ۰/۲۵ و ۰/۲ $= l$ و ۰/۸ $= p$ حجم نمونه به ترتیب ۱۵۴ و ۹۴ به دست می‌آید، در حالیکه برای همین مقادیر با توجه به جداول (۱) و (۲)، حجم نمونه به روش ACC به ترتیب ۱۵۵ و ۹۶ و به روش ALC به ترتیب ۱۳۲ و ۸۷ می‌باشد. بنابراین همانطور که ملاحظه می‌کنیم حجم نمونه به روش ALC با استفاده از فاصله‌های LPL کوچکتر از فاصله‌های HPD است، که آدکوک و جوزف محاسبه نموده‌اند. البته مزیت دیگری که فاصله‌های LPL دارند این است که در محاسبه‌ی آن‌ها تابع زیان نیز به کار می‌رود که امری مهم در آنالیز بیزی است. با توجه به نمودارهای (۱) و (۲) برای l ثابت با افزایش p حجم نمونه افزایش، و برای p ثابت با افزایش l حجم نمونه کاهش می‌یابد.

مراجع

[1] Adcock, C.J.(1987), *A Bayesian Approach to Calculating Sample Sizes for Multinomial Sampling*, Statistician, 36: 155-159.

[2] Adcock, C. J.(1988), *Bayesian Approach to Calculating Sample Size*, Statistician, 37: 433-439.

[3] Adcock, C. J.(1997), *Sample Size Determination: A Review*, Statistician, 46:261-283.

[4] Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M.(1994), *Baysian Theory*, Chichester: Wiley.

[5] Bernardo, J. M.(2005), *Intrinsic Credible Regions: An Objective Bayesian Approach to Interval Estimation*, Test. 14: 317-384.

[6] Desu, M. M. and Raghavarao. D.(1990), *Sample Size Methodology*, Boston: Academic Press.

[7] Joseph, L. , Wofson, D. and du Berger, R.(1995), *Sample Size Calculations for Binomial Proportions via Highest Posterior Density Ivtervals*, Statistician. 44: 143-154.

[8] Joseph, L. , Belisle, P.(1991), *Bayesian Sample Size Determination for Normal Means and Difference Beween Normal Means*, Statistician, 46: 209-226.

[9] Joseph, L. , du Berger, R. , Belisle, P.(1997), *Bayesian and Mixed Bayesian/Likelihood Criteria for Sample Size Determination*, Statis. Med, 16: 769-781.

[10] Lemeshoa, S. , Hosmer, Jr, D. W. , Klar, J. and Lwanga, S. K.(1990), *Adequancy of Sample size in Health Studies*, Chichester: Wiley.

[11] Lipsey, M. W.(1990), *Design Sensitivity Statistical Power for Expermental Research*, Newbury Park: Sage.

[12] Pham-Gia, T. and Turkkan, N.(1992), *Sample Size Determination in Bayesian Analysis (Disc: P399-404)*, The Statistician, 41: 389-397.